بسمه تعالی

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

تجزیه و تحلیل روش گالرکین ناپیوسته برای معادله‌ی زیرپخش

سخنران: مجید جمالی

زمان: سه‌شنبه ۹۲/ ۶/ ۱۹ ساعت ۱ بعدازظهر
مکان: سالن خوارزمی دانشکده علوم ریاضی

هیئت داوران

۱– دکتر مهدی تاتاری

۲– دکتر محمدرضا رئوفی

۳– دکتر رضا مختاری

۴– دکتر داوود میرزایی (دانشگاه اصفهان)

چکیده

در بعضی موارد با مسایلی روبه‌رو هستیم که جواب یا مشتق‌های جواب دارای ناپیوستگی است، و از این دیدگاه استفاده از عناصر متناهی پیوسته مناسب این گونه مسایل نیستند. همچنین در حل بعضی مسایل با استفاده از روش گالرکین، ماتریس سختی، ماتریسی منفرد می‌شود. برای حل این مسایل از روش گالرکین ناپیوسته استفاده می‌کنیم.
در این پایان‌نامه ابتدا روش گالرکین ناپوسته و سپس معادله‌ی زیرپخش معرفی می‌شوند. در ادامه به حل و آنالیز همگرایی این معادله با استفاده از روش گالرکین ناپیوسته‌ی قطعه‌ای خطی و قطعه‌ای ثابت می‌پردازیم. مثال‌ها و نتایج عددی ارایه شده در فصل آخر کارایی و دقت روش مطرح شده را به خوبی نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: روش گالرکین ناپیوسته، معادله‌ی زیرپخش، معادله‌ی سرسخت، انتگرال کسری ریمان–لیوویل

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

تجزیه و تحلیل روش گالرکین ناپیوسته برای معادله‌ی زیرپخش

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

مجید جمالی

استاد راهنما

دکتر مهدی تاتاری

شهریور ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی آقای مجید جمالی
تحت عنوان

تجزیه و تحلیل روش گالرکین ناپیوسته برای معادله‌ی زیرپخش

در تاریخ ۱۹/ ۶/ ۹۲ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱– استاد راهنما — دکتر مهدی تاتاری

۲– استاد مشاور — دکتر محمدرضا رئوفی

۳– استاد داور۱ — دکتر رضا مختاری

۴– استاد داور۲ — دکتر داوود میرزایی (دانشگاه اصفهان)

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده — دکتر حمید رضا ظهوری زنگنه

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می کند و سلامت امانت هایی را که به دستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه از پدر و مادر عزیزم این دو معلم بزرگوارم که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند؛ از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکتر مهدی تاتاری که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛ از استاد صبور و با تقوا، جناب آقای دکتر محمدرضا رئوفی، که زحمت مشاوره این رساله را در حالی متقبل شدند که بدون مساعدت ایشان، این پروژه به نتیجه مطلوب نمی رسید؛ و از اساتید فرزانه و دلسوز؛ آقایان دکتر رضا مختاری و دکتر داوود میرزایی که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم. باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به پدر و مادر

و

برادرانم...

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

چکیده

در بعضی موارد با مسایلی روبه‌رو هستیم که جواب یا مشتق‌های جواب دارای ناپیوستگی است، و از این دیدگاه استفاده از عناصر متناهی پیوسته مناسب این گونه مسایل نیستند. همچنین در حل بعضی مسایل با استفاده از روش گالرکین، ماتریس سختی، ماتریسی منفرد می‌شود. برای حل این مسایل از روش گالرکین ناپیوسته استفاده می‌کنیم.

در این پایان‌نامه ابتدا روش گالرکین ناپوسته و سپس معادله‌ی زیرپخش معرفی می‌شوند. در ادامه به حل و آنالیز همگرایی این معادله با استفاده از روش گالرکین ناپیوسته‌ی قطعه‌ای خطی و قطعه‌ای ثابت می‌پردازیم. مثال‌ها و نتایج عددی ارایه شده در فصل آخر کارایی و دقت روش مطرح شده را به خوبی نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: روش گالرکین ناپیوسته، معادله‌ی زیرپخش، معادله‌ی سرسخت، انتگرال کسری ریمان–لیوویل

فصل ۱

مقدمه

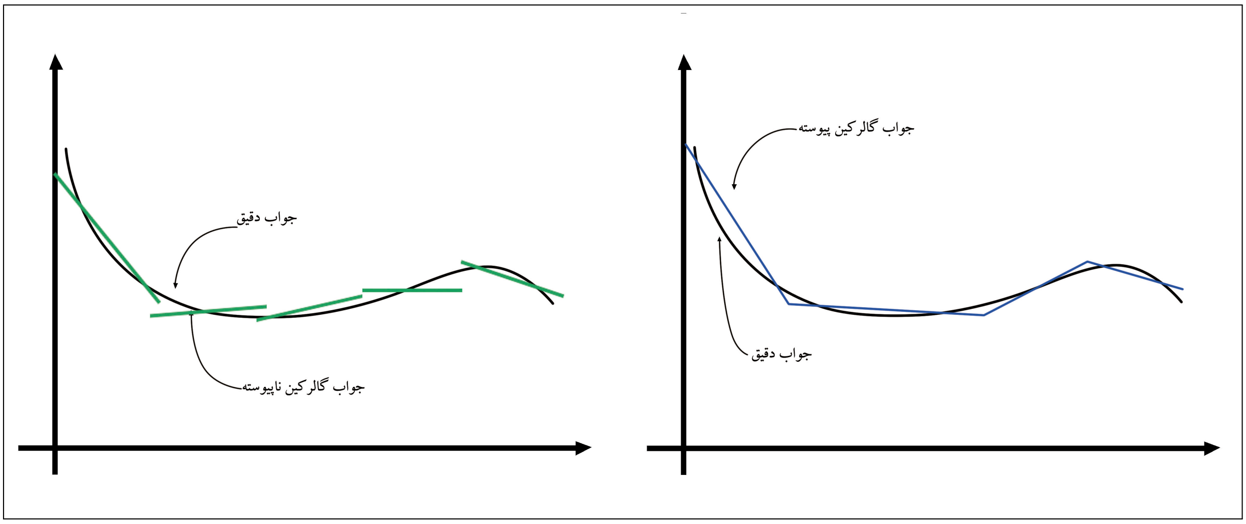
در این فصل ابتدا به معرفی اجمالی روش گالرکین ناپیوسته یا به اختصار DG می‌پردازیم. در آخر تعاریف و مفاهیم مورد استفاده در پایان نامه را مطرح خواهیم کرد.

۱.۱ تاریخچه

در دنیای مهندسی امروز با مسایل، مشکلات و پدیده‌هایی مواجه هستیم که در آن‌ها جابجایی نقش بسیار مهمی بازی می‌کند. دامنه‌ی این مسایل بسیار متنوع است: هواشناسی، پیش‌بینی‌های جوی، دینامیک گازها، آکوستیک، جریان‌های توربولانس، شبیه‌سازی جریان‌های نفتی، مدل سازی آب‌های کم عمق، انتقال مواد آلوده کننده‌ی زیرزمینی، محیط‌های متخلخل، الکترومغناطیس و غیره. حل این مسایل بسیار مهم بوده و به همین جهت علاقه‌ی پژوهشگران و دانشمندان زیادی را به خود جلب کرده است. در واقع این مسایل که جز دسته‌ی معادلات هذلولوی قرار می‌گیرند، دارای مشکلات مشترکی هستند. این نوع مسایل مقدار مرزی باعث جواب‌هایی می‌شود که این جواب‌ها دارای شوک یا موج‌هایی غیرخطی هستند و در نتیجه این گونه جواب‌ها را نمی‌توان توسط روش‌های معمولی عناصر متناهی، احجام متناهی و یا تفاضلات متناهی به‌دست آورد.

در راستای حل چنین مسایلی، روش گالرکین ناپیوسته هر روز بیشتر و بیشتر در کانون توجه قرار می‌گیرد. ولی چرا گالرکین ناپیوسته؟

در روش عناصر متناهی همیشه با این سوال روبرو هستیم که آیا عناصر متناهی پیوسته به عناصر متناهی ناپیوسته برتری دارند یا خیر؟ در جواب باید گفت، عناصر متناهی پیوسته برای مسایلی با جواب‌های پیوسته مناسبند. در مسایل قوانین بقا با مسایلی روبرو هستیم که جواب دارای ناپیوستگی است و از این دیدگاه استفاده از عناصر متناهی پیوسته مناسب این گونه مسایل نیست. گالرکین ناپیوسته بر این پایه بنا شده که یک مساله‌ی مقدار مرزی می‌تواند توسط توابع چندجمله‌ای تکه‌ای روی یک شبکه‌ی عناصر متناهی بدون هیچ گونه شرطی از پیوستگی حل شود. در شکل زیر تفاوت بین عناصر متناهی پیوسته و ناپیوسته نشان داده شده است.



شکل ۱.۱: نمودار تفاوت بین عناصر متناهی پیوسته و ناپیوسته

در سال ۱۹۷۱ برای اولین بار نیچه [۳۰] از توابع ناپیوسته برای تقریب یک معادله‌ی بیضوی مرتبه دو استفاده نمود. روش گالرکین ناپیوسته در حل مسایل هذلولوی برای اولین بار در سال ۱۹۷۳ توسط رید و هیل [۳۳] در حل مساله‌ی انتقال نوترون خطی

$$\sigma u + \nabla.(au) = f,$$

که σ یک عدد حقیقی و a نیز یک بردار ثابت است، مطرح شد. البته به علت پایین بودن توان محاسباتی و نرم‌افزاری در دهه‌های ۷۰ و ۸۰، روش‌های گالرکین ناپیوسته از سوی جامعه مهندسی مورد استقبال قرار نگرفت. با بالا رفتن توان محاسباتی کامپیوترها، روش‌های گالرکین ناپیوسته از اوایل دهه‌ی ۹۰ تاکنون به علت خواص جالب آن‌ها بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند. علاوه بر روش‌های اولیه گالرکین ناپیوسته، روش‌های گالرکین ناپیوسته موضعی (LDG) نیز در سال‌های اخیر توسعه یافته و مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

برای اولین بار تحلیل روش گالرکین ناپیوسته برای مسایل ODE در سال ۱۹۷۴ توسط لِساینت و رِاویارت [۲۰]، انجام شد. آن‌ها با استفاده از این روش و با به‌کارگیری چندجمله‌ای‌های تکه‌ای خطی از درجه‌ی k، خطایی از مرتبه‌ی $2k+1$ برای حل این معادلات به‌دست آوردند. در ادامه تلاش‌های دیگری برای آنالیز روش DG برای حل معادلات ODE توسط هولم [۱۲،۱۳] و اشواب [۳۷] انجام گرفت و همچنین در سال ۱۹۸۸ جانسون [۱۵]، به حل و تحلیل این روش برای معادلات سخت پرداخت.

در سال ۱۹۷۸، جامت [۱۴] برای حل معادلات سهموی از روش DG استفاده کرد. در ادامه در سال ۱۹۸۵، تلاش‌هایی توسط اریکسون، جانسون و تامی [۱۰] برای تحلیل خطای این معادلات انجام شد. همچنین از سال ۱۹۸۷ تا ۱۹۹۵، اریکسون و جانسون به بحث در مورد کنترل خطای این روش برای حل معادلات سهموی پرداختند.

در سال‌های اخیر روش گالرکین ناپیوسته برای حل معادلات هیدرودینامیکی–مغناطیسی که شامل معادلات ماکسول هستند مورد استفاده قرار گرفت [۴،۱۷، ۴۰، ۴۱]. در سال ۱۹۸۲ چاونت و سالزانو [۶] روش رانگ کوتای

گالرکین ناپیوسته را برای مسایل قوانین بقا ابداع کرده و توسعه دادند. در روش رانگ کوتای گالرکین ناپیوسته، برای گسسته‌سازی فضا از روش گالرکین ناپیوسته و برای پیشروی در زمان از روش رانگ کوتا استفاده می‌شود. در ادامه در سال ۱۹۸۹ کاکبرن و چاونت [۵] به بهبود پایداری این روش پرداختند.

۲.۱ مفاهیم پایه

در این بخش به معرفی مفاهیم و نتایجی می‌پردازیم که در فصل بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند. بعضی از آن‌ها قضایای مشهوری هستند که بدون اثبات آورده شده‌اند. برای مشاهده‌ی اثبات آن‌ها و جزییات بیشتر به [۱–۳، ۱۶، ۱۸، ۳۲] مراجعه کنید.

تعریف ۱.۲.۱ هر فضای باضرب داخلی را که نسبت به نرم القا شده به وسیله‌ی ضرب داخلی خود کامل باشد، یک فضای هیلبرت می‌نامیم.

تعریف ۲.۲.۱ خانواده‌ی $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ از بردارهای متعلق به یک فضای هیلبرت، یک پایه‌ی متعامد یکه گوییم، هرگاه: $\langle\varphi_i, \varphi_i\rangle = \delta_{ij}$، که در آن δ_{ij} دلتای کرونکر است و به صورت

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

تعریف می‌شود.

گزاره ۳.۲.۱ اگر به ازای هر i داشته باشیم $\langle x, \varphi_i\rangle = 0$، آنگاه $x = 0$.

تعریف ۴.۲.۱ اگر $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه‌ی متعامد یکه در یک فضای هیلبرت و x بردار دلخواهی متعلق به این فضا باشد، خانواده‌ی اسکالرهای $\{\langle x, \varphi_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ را خانواده‌ی ضرایب فوریه x نسبت به پایه‌ی متعامد یکه $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ می‌نامیم.

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنید $\mathbb{H}_1$ و $\mathbb{H}_2$ دو فضای هیلبرت و $T : \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_2$ نیز یک عملگر خطی کراندار باشد. آنگاه $T^* : \mathbb{H}_2 \to \mathbb{H}_1$ را عملگر الحاقی T گویند هرگاه برای هر $x \in \mathbb{H}_1$ و $y \in \mathbb{H}_2$

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle.$$

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنید $\mathbb{H}$ فضایی هیلبرت و $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ نیز یک عملگر خطی کراندار باشد. حال اگر $T^* = T$ یعنی $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$، آنگاه T^* را عملگر خطی خود الحاق T می‌گویند.

تعریف ۷.۲.۱ اگر $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ عملگر خودالحاق باشد و برای هر $x \in \mathbb{H}$، عبارت $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ برقرار باشد آنگاه

T را عملگر نامنفی نامند.

قضیه ۸.۲.۱ اگر T عملگری نامنفی باشد آنگاه عملگر یکتای B وجود دارد به طوری که $B^۲ = T$.

تعریف ۹.۲.۱ تابع v تعریف شده در بازه‌ی Ω دارای پیوستگی هولدر از مرتبه‌ی $\beta \in (۰,۱]$ است، هرگاه برای هر $x, y \in \Omega$ ثابت c وجود داشته باشد به طوری که

$$|v(x) - v(y)| \leq c\|x - y\|^{\beta}.$$

تعریف ۱۰.۲.۱ فضای لبگ $L_p(\Omega)$ برای $۱ \leq p < \infty$، فضای توابع اندازه پذیر u است که

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty.$$

در این‌جا منظور از انتگرال، انتگرال لبگ است. نرم L_p در این فضا به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{۱/p}, \quad ۱ \leq p < \infty.$$

تعریف ۱۱.۲.۱ تبدیل فوریه‌ی تابع $v \in L_۱(\mathbb{R}^d)$ به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{F}v(y) = \frac{۱}{(۲\pi)^{d/۲}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\lambda t} v(t) dt,$$

همچنین تبدیل لاپلاس تابع v به صورت زیر است

$$\mathcal{L}v(y) = \int_{۰}^{\infty} e^{-\lambda t} v(t) dt.$$

نتیجه ۱۲.۲.۱ اگر تابع $v \in L_۱(\mathbb{R})$ در بازه‌ی $(-\infty, ۰]$ مقدار صفر اختیار کند آنگاه داریم

$$\mathcal{F}v(y) = \frac{۱}{(۲\pi)^{۱/۲}} \mathcal{L}v(iy). \qquad (۱.۱)$$

قضیه ۱۳.۲.۱ (پارسوال-پلانچرل) فرض کنید $u, v \in L_2(\mathbb{R}^d)$. آنگاه

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}u(y)\bar{\mathcal{F}}v(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\bar{v}(x)dx.$$

قضیه ۱۴.۲.۱ (نابرابری کوشی-شوارتز) فرض کنید $u, v \in L_2(\Omega)$، آنگاه

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)}.$$

تعریف ۱۵.۲.۱ فرض کنید V یک فضای برداری باشد. عملگر $a : V \times V \to \mathbb{R}$ را دو خطی گویند، اگر a نسبت به هر کدام از مولفه‌هایش خطی باشد. به عبارت دیگر، برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ و $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V$ داشته باشیم

$$a(v_1 + v_2, w) = a(v_1, w) + a(v_2, w);$$

$$a(\alpha v, w) = \alpha a(v, w);$$

$$a(v, w_1 + w_2) = a(v, w_1) + a(v, w_2);$$

$$a(v, \alpha w) = \alpha a(v, w).$$

در بعضی موارد عملگر دوخطی دارای خواص زیر می‌باشد

- $a(.,.)$ متقارن است اگر

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V.$$

- $a(.,.)$ پیوسته یا کراندار است اگر ثابت $M > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$|a(u, v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V \quad \forall u, v \in V.$$

- $a(.,.)$ را V-بیضوی گویند اگر ثابت $\beta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$|a(v, v)| \geq \beta\|v\|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

• $a(.,.)$ معین مثبت است اگر

$$a(u,v) > 0 \quad \forall v,u \in V.$$

تعریف ۱۶.۲.۱ فرض کنید Ω یک دامنه‌ی کراندار چندوجهی باشد. مجموعه‌ی $\mathcal{T}_h$ شامل افرازی متناهی از Ω را درنظر می‌گیریم به طوری که $\bar{\Omega} = \bigcup_{K\in\mathcal{T}_h} \bar{K}$. قطر h_K را به صورت $h_K := \sup\{|x-y| \,|\, x,y \in K\}$ تعریف کرده و قرار می‌دهیم $h = \max\{h_K : K \in \mathcal{T}_h\}$، که در این‌جا h پارامتر گسسته‌سازی است. حال ثابت C مستقل از h وجود دارد به طوری که برای هر $K \in \mathcal{T}_h$ عبارت $h \leq Ch_K$ برقرار است، آنگاه $\mathcal{T}_h$ را افرازی کوشی-یکنواخت می‌نامند.

تعریف ۱۷.۲.۱ تابع میتاگ لفلر یکی دیگر از توابع خاص ریاضی است که به طور مستقیم با تابع گاما در ارتباط است. این تابع در جواب دقیق بسیاری از معادلات دیفرانسیل کسری ظاهر می‌شود.
تابع میتاگ لفلر $E_\alpha(z)$ برای $\alpha > 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

همچنین تابع میتاگ لفلر تعمیم یافته برای $\alpha, \beta > 0$ به صورت زیر است

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

تعریف ۱۸.۲.۱ فضای $L_p((0,T);X)$ شامل تمام توابع اندازه‌پذیر به شکل $u : (0,T) \to X$ است که برای $1 \leq p < \infty$ داریم

$$\|u\|_{L_p((0,T);X)} := \left(\int_0^T |u(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty$$

و

$$\|u\|_{L_\infty((0,T);X)} := ess \sup_{0<t<T} |u(t)| < \infty.$$

تعریف ۱.۲.۱۹ اگر هسته‌ی یک معادله‌ی انتگرالی به شکل

$$k(x,t) = \frac{\hat{k}(x,t)}{(x-t)^{\alpha}}$$

باشد، به طوری که $\hat{k}$ تابعی کراندار و $\alpha \in (۰,۱)$، آنگاه گوییم k دارای تکینگی ضعیف است.

فصل ۲

روش گالرکین و گالرکین ناپیوسته

در این فصل به معرفی روش گالرکین و سپس گالرکین ناپیوسته می‌پردازیم. به‌طور کلی در این دو روش، به محاسبه و تخمین بهترین تقریب جواب دقیق مساله در یک زیرفضای با بعد متناهی داده شده می‌پردازیم. برای مشاهده‌ی جزییات بیشتر به [۱۱،۷] مراجعه کنید.

۱.۲ قضیه‌ی تصویر

قضیه‌ی تصویر نتیجه‌ای بنیادین در جبرخطی است که با استفاده از آن می‌توان جواب مساله را تقریب زد. به عنوان مثال فرض کنید بردار u عضوی از فضای ضرب داخلی V و W نیز زیرفضایی با بعد متناهی از آن باشد. به کمک این قضیه می‌توان بهترین تقریب u در W را یافت یا به عبارت دیگر $w \in W$ را طوری می‌توان پیدا کرد که $\|u-w\|$ کوچک‌ترین مقدار ممکن شود.

تعریف ۱.۱.۲ اگر V یک فضای ضرب داخلی با ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ و نیز u و v دو عضو این فضا باشند به‌طوری‌که $\langle u,v\rangle = ۰$، آنگاه گوییم u و v متعامدند.

چون نرم یک فضای ضرب داخلی با استفاده از ضرب داخلی تعریف می‌شود، پس قضیه‌ی فیثاغورث برای هر فضای ضرب داخلی برقرار است. اگر u و v دو بردار از فضای ضرب داخلی V و همچنین $\langle u,v\rangle = ۰$، آنگاه

$$\begin{aligned}\|u+v\|^{۲} &= \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + ۲\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle \\ &= \|u\|^{۲} + \|v\|^{۲}.\end{aligned}$$

قضیه‌ی فیثاغورث پایه‌ای برای اثبات قضیه‌ی تصویر به حساب می‌آید.

قضیه ۲.۱.۲ (قضیه‌ی تصویر). فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی و W نیز یک زیرفضای با بعد متناهی از

V باشد، همچنین درنظر می‌گیریم $u \in V$. آنگاه

۱. بردار یکتای $w \in W$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\|u - w\| < \|u - z\| \quad , \forall z \in W, z \neq w.$$

بردار w را بهترین تقریب u در فضای W یا تصویر u در W نامند.

۲. بردار w بهترین تقریب u از فضای W است، اگر و تنها اگر برای هر $z \in W$ در عبارت زیر صدق کند

$$w \in W, \quad \langle u - w, z \rangle = 0. \tag{۱.۲}$$

فرض کنید $\{w_1, \dots, w_n\}$ پایه‌ای برای فضای با بعد متناهی W باشد، حال با فرض $w \in W$ می‌توان نوشت

$$w = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j.$$

اگر w در عبارت (۱.۲) صادق باشد، داریم

$$\begin{aligned}
&\left\langle u - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j, w_i \right\rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \\
&\Rightarrow \langle u, w_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle w_j, w_i \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \\
&\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \langle w_j, w_i \rangle \alpha_j = \langle u, w_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned}$$

بنابراین یک دستگاه معادله‌ی خطی حاصل می‌شود که شامل n معادله و n متغیر $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ است. پس با حل این دستگاه می‌توان w یعنی بهترین تقریب را پیدا کرد.
اگر $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $b \in \mathbb{R}^n$ به شکل زیر تعریف شده باشند

$$\begin{aligned}
G_{ij} &= \langle w_j, w_i \rangle, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \\
b_i &= \langle u, w_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n,
\end{aligned}$$

آنگاه دستگاه معادلات خطی به‌صورت $G\alpha = b$ حاصل می‌شود. اگر $\{w_1, \dots, w_n\}$ یک پایه‌ی متعامد برای W باشد، آنگاه برای $i \neq j$، داریم $\langle w_j, w_i \rangle = 0$؛ در نتیجه G یک ماتریس قطری و جواب دستگاه $G\alpha = b$ به‌صورت

زیر است

$$\alpha_i = \frac{\langle u, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle}, \quad i = ۱, ۲, \ldots, n.$$

۲.۲ روش گالرکین برای یک مساله‌ی تغییراتی

می‌دانیم شکل تغییراتی یک مساله با مقدار اولیه‌ی مرزی به‌صورت زیر است

$$u \in V, \quad a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V, \tag{۲.۲}$$

که V یک‌فضای هیلبرت و $a(.,.) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ یک عملگر دوخطی و $l(.) : V \longrightarrow \mathbb{R}$ نیز بیانگر یک تابعک خطی پیوسته است. شکل دو خطی $a(.,.)$ نشان دهنده‌ی ضرب داخلی در فضای V است که نرم مربوط به این فضای ضرب داخلی به نرم انرژی معروف است پس برای هر $v \in V$ می‌توان نوشت

$$\|v\|_E = \sqrt{a(v, v)}.$$

در ادامه فرض کنید $W = \{w_۱, \ldots, w_n\}$ زیرفضای با بعد متناهی از V باشد، همچنین می‌دانیم $u \in V$ جواب مساله‌ی (۲.۲) است حال برای یافتن بهترین تقریب u در نرم انرژی باید جواب دستگاه $KU = F$ را به دست آورد به‌طوری‌که K ماتریسی است $n \times n$ که به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$K_{ij} = a(w_j, w_i), \quad i, j = ۱, ۲, \ldots n,$$

علاوه بر این $F \in \mathbb{R}^n$ نیز به شکل زیر تعریف می‌شود

$$F_i = a(u, w_i) = l(w_i), \quad i, j = ۱, ۲, \ldots n.$$

در این‌جا به ماتریس K، ماتریس سختی و بردار F را بردار نیرو می‌نامند. با استفاده از $U \in \mathbb{R}^n$ می‌توان جواب تقریبی را به‌شکل زیر بیان کرد

$$w = \sum_{i=۱}^{n} U_i w_i.$$

به روش بالا برای پیدا کردن بردار U، روش گالرکین می‌گویند. چون

$$a(w, w_i) = a(u, w_i) = l(w_i), \quad i = ۱, ۲, \ldots, n$$