دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی ، گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

جواب‌های مثبت برای مسئله‌ی مقدار مرزی معادله‌ی دیفرانسیل کسری غیرخطی

استاد راهنما

دکتر فریبا بهرامی

استاد مشاور

دکتر کریم ایواز

پژوهشگر

صمد محمودوند

۱۳۹۰

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

که وجود پر مهرشان انیس دیروز و امید فردای من است

و هر آنچه امروز دارم از وجود آن هاست.

سپاس گزاری...

در آغاز وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای عزیزم، خانم دکتر فریبا بهرامی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید.

از جناب آقای دکتر کریم ایواز که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در پایان، بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می کنم وجود مقدس شان را و تشکر می کنم از خواهر عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودش، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بود.

صمد محمودوند

بهمن ۱۳۹۰

نام خانوادگی: محمودوند **نام:** صمد

عنوان پایان‌نامه: جواب‌های مثبت برای مسئله‌ی مقدار مرزی معادله‌ی دیفرانسیل کسری غیرخطی

استاد راهنما: دکتر فریبا بهرامی

استاد مشاور: دکتر کریم ایواز

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی کاربردی **گرایش:** معادلات دیفرانسیل

دانشگاه: تبریز **دانشکده:** علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: زمستان ۱۳۹۰ **تعداد صفحه:** ۷۴

کلیدواژه‌ها: معادله‌ی دیفرانسیل کسری، مسئله‌ی مقدار مرزی، جواب مثبت، تابع گرین، قضیه‌ی نقطه ثابت

چکیده:

در این پایان‌نامه وجود و چندگانگی جواب‌های مثبت مسئله‌ی مقدار مرزی، معادله‌ی دیفرانسیل کسری غیرخطی را بررسی می‌کنیم. ابتدا تابع گرین مسئله را می‌یابیم که در نتیجه مسئله به یک معادله‌ی انتگرال فردهلم نوع دوم تبدیل می‌شود. در نهایت با استفاده از برخی از قضایای نقطه ثابت وجود و چندگانگی جواب‌های را اثبات می‌کنیم.

□

فهرست مطالب

فهرست مطالب ث
۱.۰ مقدمه . . . . چ

۱ محاسبات کسری ۱
۱.۱ تاریخچه ۱
۲.۱ انتگرال کسری ریمان-لیوویل ۵
۱.۲.۱ چند مثال از انتگرال کسری ۵
۲.۲.۱ مشتق از انتگرال کسری و انتگرال کسری از مشتق ۱۳
۳.۲.۱ قاعده‌ی لایبنیتز برای انتگرال کسری ۱۵
۳.۱ مشتق کسری ریمان-لیوویل ۱۷
۱.۳.۱ چند مثال از مشتق کسری ۱۷
۲.۳.۱ قاعده‌ی لایبنیتز برای مشتق کسری ۲۲
۴.۱ تبدیل لاپلاس انتگرال و مشتق کسری ۲۳
۱.۴.۱ تبدیل لاپلاس انتگرال کسری ۲۴
۲.۴.۱ تبدیل لاپلاس مشتق کسری ۲۵
۵.۱ مشتق کاپوتو ۲۸
۱.۵.۱ مزیت‌های مشتق کاپوتو ۲۹

۲ معادلات دیفرانسیل کسری ۳۰
۱.۲ مقدمه ۳۰
۲.۲ معرفی ۳۰
۳.۲ روش مستقیم ۳۲
۴.۲ تبدیل لاپلاس ۳۶
۵.۲ حل معادله‌ی همگن ۳۹
۶.۲ نمایش صریح جواب‌ها ۴۰

۳ جواب‌های مثبت مسئله‌ی مقدار مرزی ۴۴
۱.۳ مقدمه ۴۴

۲.۳ مسئله‌ی اصلی ۵۶

مراجع **۶۸**

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی **۷۱**

۱.۰ مقدمه

معادلات دیفرانسیل کسری اخیراً خیلی مورد توجه قرار گرفته است، علت آن توجه خیلی زیاد به تئوری محاسبات کسری و کاربردهای چنین ساختارهای در علوم مختلف ازقبیل : فیزیک، مکانیک، شیمی، مهندسی و غیره است که برای جزئیات بیشتر به [۶-۱] و مراجع موجود در آنها می‌توان مراجعه کرد. اخیراً برخی از مقالات، مسئله‌ی وجود جواب برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات کسری مجرد را مورد بحث قرار داده‌اند که ریاضیدانانی مثل : هرناندز [۱]، اورگان [۲] و بالاچاندرن [۳] طی مقاله‌ای [۷] آن کارها را مورد بررسی و نقد اساسی قرار داده‌اند و نشان داده‌اند که جواب‌های ملایم ارائه شده در کارهای قبلی صحیح نبوده و تعریف جواب ملایم صحیح و وجود آن را برای مسائل مقادیر اولیه بررسی کرده‌اند. هم‌چنین بعضی از مقالات، وجود و چندگانگی جواب (یا جواب مثبت) معادله‌ی دیفرانسیل کسری غیرخطی با شرایط اولیه را با استفاده از فنون آنالیز غیرخطی (قضیه‌ی نقطه-ثابت و قضیه‌ی لری-شودر [۴] و غیره) بحث کرده‌اند، مراجع [۱۳-۸] را ببینید. در مورد مسائل دیریکله، برای معادلات دیفرانسیل کسری تحقیقات کمی صورت گرفته است که در حالت خطی می‌توان به [۱۵]و [۱۴] اشاره کرد.

مطالب این نوشته را در سه فصل مجزا بیان کرده‌ایم. فصل اول را به معرفی محاسبات کسری اختصاص داده‌ایم. در فصل دوم این نوشته معادلات دیفرانسیل کسری را معرفی کرده‌ایم. در فصل سوم که بر اساس مقاله [۲۱] است به مسئله‌ی اصلی می‌پردازیم و مسئله‌ی مقدار مرزی درگیر با معادله‌ی دیفرانسیل کسری غیرخطی را در نظر می‌گیریم. وجود و چندگانگی جواب‌های مثبت را مورد بحث قرار می‌دهیم. تابع گرین مسئله‌ی مقدار مرزی ساخته می‌شود و با استفاده از آن، مسئله به یک معادله‌ی انتگرال فردهلم نوع دوم تبدیل شده و از قضایای نقطه-ثابت جهت بررسی وجود جواب استفاده شود.

---

[۱] E.Hernandez

[۲] D.Oregan

[۳] K.Balachandran

[۴] Leray-Shauder

حقیقت این است که در پشت پرده‌ی یک مسئله‌ی حل نشده‌ی ریاضی، اغلب عدم ساماندهی نظام‌مند قضایای عمومی است.

هیلبرت (۱۹۴۳-۱۸۶۲)

فصل ۱

محاسبات کسری

۱.۱ تاریخچه

نماد $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ را لایبنیتز[۱] اختراع کرد که مشتق مرتبه‌ی nام را بیان می‌کند و در آن n عدد صحیح است. شاید یک بازی ساده با نمادها در سال ۱۶۹۵ موجب شد هوپیتال[۲] از لایبنیتز[۳] بپرسد: "اگر $n = \dfrac{1}{2}$ باشد نتیجه چه خواهد بود؟" لایبیتز در پاسخ نوشت: "اگرچه سری‌های نامتناهی و هندسه رابطه دوری با هم دارند ولی در سری‌های نامتناهی فقط مجاز به استفاده از توان‌های صحیح مثبت و منفی هستیم و تا به حال استفاده از توان‌های کسری را نداشتیم." و ادامه می‌دهد: "$d^{\frac{1}{2}}x$ برابر است با $x.\sqrt{\dfrac{dx}{x}}$ این یک پارادوکس آشکار از چیزی است که یک روز نتایج مفیدی خواهد داد."

در سال‌های بعد پیشرفت‌های کوچکی در توسعه محاسبات کسری ایجاد شد، اولین اشاره از مشتق از مرتبه دلخواه در سال ۱۸۱۹ از لاکرویکس[۴] ارئه شد او با $y = x^m$ که m یک عدد صحیح مثبت است شروع کرد و به راحتی مشتق nام آن را توسعه داد:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}, \qquad m \geq n.$$

[۱]Leibniz
[۲]Hopital
[۳]Leibniz
[۴]Lacroix

و با استفاده از نماد لژاندر برای تعمیم فاکتوریل (تابع گاما) به دست آورد:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}.$$

سپس مثال $y = x$ و $n = \frac{1}{2}$ را ارئه داد:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{4x}{\pi}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

روش لاکرویکس نمی‌توانست برای توابع زیادی کاربرد داشته باشد.

برای مشتق از مرتبه دلخواه قدم بعدی توسط فوریه[۵] برداشته شد. او ابتدا تابع $f(x)$ را به این صورت معرفی کرد:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \cos p(x-\alpha) dp.$$

از طرفی برای n صحیح داریم:

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos p(x-\alpha) = p^n \cos[p(x-\alpha) + \frac{1}{2} n\pi].$$

فوریه با جایگذاری n با u تعمیم زیر را به دست آورد:

$$\frac{d^u}{dx^u} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} p^u \cos[p(x-\alpha) + \frac{1}{2} u\pi] dp.$$

که این رابطه تعریفی از مشتق مرتبه uام را برای هر مقدار دلخواه u فراهم می‌کرد.

در سال ۱۸۳۲ لیوویل[۶] مطالعه‌ی اصلی خود را در محاسبات کسری شروع کرد، نقطه شروع توسعه نظریه‌اش نتیجه مشهور مشتقات از مرتبه صحیح بود:

$$D^m e^{ax} = a^m e^{ax},$$

که او مشتقات از مرتبه دلخواه را بسط داد:

$$D^\nu e^{ax} = a^\nu e^{ax}.$$

---

[۵] Fourier

[۶] Liouville

لیوویل فرض کرد که اگر $f(x)$ به صورت یک سری بسط داده شود:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}, \qquad Re\ a_n > 0. \tag{۱.۱}$$

پس مشتق دلخوا از $f(x)$ چنین است:

$$D^v f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^v e^{a_n x}.$$

فرمول فوق به اولین فرمول لیوویل معروف است. اگر چه این فرمول یک مشتق از مرتبه دلخواه را نماش می‌دهد، اما فقط برای توابعی به فرم (۱.۱) مفید است.

شاید لیوویل از این محدودیت آگاه بود و فرمول بندی تعریف دومی را آغاز کرد. او با یک انتگرال معین وابسته به تابع گاما شروع کرد:

$$I = \int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-xu} du, \qquad a > 0, \quad x > 0.$$

با تغییر متغیر $xu = t$ به دست آورد:

$$I = x^{-a} \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt = x^{-a} \Gamma(a)$$

یا

$$x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} I.$$

سپس عملگر D^ν را روی هر دو طرف معادله بالا اعمال کرد تا رابطه زیر را به دست آورد:

$$D^\nu x^{-a} = \frac{(-1)^\nu}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} u^{a+\nu-1} e^{-xu} du.$$

بنابراین لیوویل به دومین تعریف خود از مشتق کسری رسید:

$$D^\nu x^{-a} = \frac{(-1)^\nu \Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)} x^{-a-\nu}, \qquad a > 0.$$

این تعریف نیز محدود به توابع به فرم $f(x) = x^{-a}$ با $a > 0$ بود.

احتمالا بیشترین پیشرفت مفید در توسعه‌ی حساب کسری از یک مقاله‌ای از ریمان[۷] بود که در

[۷] Riemann

دوران دانشجویی نوشته بود اما پس از مرگش، در سال ۱۸۹۲ منتشر شد. ریمان از تعمیم سری تیلور برای به دست آوردن انتگرال مرتبه کسری استفاده کرد و تعریف کرد:

$$D^{-\nu}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_c^x (x-t)^{\nu-1}f(t)dt+\psi(x).$$

بخاطر ابهام در حد پایین انتگرال گیری، ریمان مناسب دید به تعریف خود تابع متمم $\psi(x)$ را اضافه کند.

نخستین کاری که سرانجام به آنچه که ما آن را تعریف ریمان-لیوویل[۸] می‌شناسیم، منتهی شد در مقاله‌ای توسط سونین[۹] در سال ۱۸۶۹ با عنوان "مشتق با شاخص دلخواه" ظاهر شد، که با فرمول انتگرال کوشی شروع کرده بود. در موضوع محاسبات کسری از سال ۱۸۶۸ تا ۱۸۷۲ لتنیکوف[۱۰] چهار مقاله نوشت. مقاله او با عنوان "شرحی بر مفاهیم اصلی نظریه مشتق با نمای دلخواه " تعمیمی از مقاله سونین بود. کار آن دو منتهی به این شد که انتگرال از مرتبه دلخواه ν به این صورت تعریف شود:

$$ {}_cD_x^{-\nu}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_c^x (x-t)^{\nu-1}f(t)dt,\qquad Re(\nu)>0 \tag{۲.۱}$$

برای $x>c$ رابطه (۲.۱) همان تعریف ریمان بدون تابع متمم است. بیشترین تعریف کاربردی زمانی است که $c=0$ باشد:

$$ {}_0D_x^{-\nu}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x (x-t)^{\nu-1}f(t)dt,\qquad Re(\nu)>0 \tag{۳.۱}$$

که این فرمول از انتگرال کسری را انتگرال ریمان-لیوویل می‌نامند.

وقتی c منفی بی‌نهایت باشد (۲.۱) به این صورت می‌شود:

$$ {}_{-\infty}D_x^{-\nu}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_{-\infty}^x (x-t)^{\nu-1}f(t)dt,\qquad Re(\nu)>0 \tag{۴.۱}$$

---

[۸] Riemann-Liouville

[۹] Sonin

[۱۰] Letnikov

۲.۱ انتگرال کسری ریمان-لیوویل

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید $Re\ \nu > 0$ و تابع f روی $J' = (0, \infty)$ پیوسته تکه‌ای بوده و روی هر زیر بازه‌ی متناهی از $J = [0, \infty)$ انتگرال پذیر باشد، آنگاه برای هر $t > 0$

$$ {}_0D_t^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\xi)^{\nu-1} f(\xi) d\xi \qquad (۵.۱)$$

را انتگرال کسری ریمان-لیوویل تابع f از مرتبه‌ی ν می‌نامیم.

بحث در مورد تعریف فوق

اگر $0 < Re\ \nu < 1$ آنگاه انتگرال کسری (۵.۱) انتگرال ناسره خواهد بود. همچنین نیازمندیم تابع f در $J' = (0, \infty)$ پیوسته‌ی تکه‌ای باشد تا با توابعی مانند $\ln t$ و t^μ با $-1 < \mu < 0$ که در همسایگی نقطه‌ی صفر رفتار می‌کند مطابقت داشته باشد.

توضیح: در این نوشته $\nu > 0$ فرض خواهیم کرد.

تعریف ۲.۲.۱. دسته توابعی که دارای شرایط تعریف (۱.۲.۱) هستند را کلاس $\boldsymbol{C}$ می‌نامیم.

۱.۲.۱ چند مثال از انتگرال کسری

◄ مثال: فرض کنید $f(t) = t^\mu$ که $\mu > -1$ بنابر تعریف انتگرال کسری داریم:

$$ {}_0D_t^{-\nu} t^\mu = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\xi)^{\nu-1} \xi^\mu d\xi. $$

با تغییر متغیر $\xi = tu$ خواهیم داشت

$$ \begin{aligned} {}_0D_t^{-\nu} t^\mu &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} t^{\mu+\nu} \int_0^1 (1-u)^{\nu-1} u^\mu du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \boldsymbol{B}(\mu+1, \nu) t^{\mu+\nu} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1) t^{\mu+\nu}}{\Gamma(\mu+1+\nu)}. \end{aligned} $$

پس

$$ {}_0D_t^{-\nu} t^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1) t^{\mu+\nu}}{\Gamma(\mu+1+\nu)}, \qquad \nu > 0, \quad \mu > -1, \quad t > 0. \qquad (۶.۱)$$

بویژه اگر در مثال فوق $\mu = 0$ باشد، آنگاه انتگرال کسری ثابت K چنین است:

$$ {}_0D_t^{-\nu} K = \frac{K}{\Gamma(\nu+1)} t^{\nu}, \qquad \nu > 0. \tag{۷.۱} $$

◄ مثال: اگر $f(t) = e^{at}$ باشد که a یک ثابت می‌باشد

واضح است که e^{at} از کلاس $\boldsymbol{C}$ هست و با استفاده از تعریف

$$ {}_0D_t^{-\nu} e^{at} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\xi)^{\nu-1} e^{a\xi} d\xi, \qquad \nu > 0. \tag{۸.۱} $$

با تغییر متغییر $x = t - \xi$ خواهیم داشت

$$ {}_0D_t^{-\nu} e^{at} = \frac{e^{at}}{\Gamma(\nu)} \int_0^t x^{\nu-1} e^{-ax} dx, \qquad \nu > 0. \tag{۹.۱} $$

اگر در (۹.۱) تغییر متغیر $ax = \xi$ را اعمال کنیم خواهیم داشت

$$ {}_0D_t^{-\nu} e^{at} = \frac{e^{at}}{\Gamma(\nu) a^{\nu}} \int_0^{at} \xi^{\nu-1} e^{-\xi} d\xi. \tag{۱۰.۱} $$

واضح است که انتگرال (۱۰.۱) یک تابع مقدماتی نیست اما به تابع مقدماتی معروفی به نام تابع گامای ناقص وابسته می‌باشد که این تابع به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱. تابع گامای ناقص: برای $Re\ \ \nu > 0$ داریم

$$ \gamma^*(\nu, t) = \frac{1}{\Gamma(\nu) t^{\nu}} \int_0^t \xi^{\nu-1} e^{-\xi} d\xi. $$

با استفاده از تعریف فوق داریم

$$ \gamma^*(\nu, at) = \frac{1}{\Gamma(\nu)(at)^{\nu}} \int_0^{at} \xi^{\nu-1} e^{-\xi} d\xi. $$

درنتیجه (۱۰.۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$ {}_0D_t^{-\nu} e^{at} = t^{\nu} e^{at} \gamma^*(\nu, at). \tag{۱۱.۱} $$

چون سمت راست (۱۱.۱) بارها در محاسبات کسری دیده خواهد شد، آن‌را با نماد $E_t(\nu, a)$ نشان خواهیم داد:

$$E_t(\nu, a) = t^{\nu} e^{at} \gamma^*(\nu, at). \tag{۱۲.۱}$$

◄ مثال: فرض کنید $f(t) = \cos(at)$ با استفاده از تعریف انتگرال کسری داریم:

$${}_0D_t^{-\nu} \cos(at) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t \xi^{\nu-1} \cos a(t-\xi) d\xi, \qquad \nu > 0. \tag{۱۳.۱}$$

که برای راحتی به این صورت می‌نویسیم:

$${}_0D_t^{-\nu} \cos(at) = C_t(\nu, a). \tag{۱۴.۱}$$

◄ فرض کنید $f(t) = \sin(at)$ مجددا با استفاده از تعریف انتگرال کسری خواهیم داشت:

$${}_0D_t^{-\nu} \sin(at) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t \xi^{\nu-1} \sin a(t-\xi) d\xi, \qquad \nu > 0. \tag{۱۵.۱}$$

که این را نیز به این صورت بیان می‌کنیم:

$${}_0D_t^{-\nu} \sin(at) = S_t(\nu, a). \tag{۱۶.۱}$$

توضیح: در دو مثال اخیر از تغییر متغیر $t - \xi = x$ استفاده کرده‌ایم.

درنتیجه برای $\nu > 0$ فرمول‌های فشرده‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{-\nu} e^{at} &= E_t(\nu, a), \\ {}_0D_t^{-\nu} \cos(at) &= C_t(\nu, a), \\ {}_0D_t^{-\nu} \sin(at) &= S_t(\nu, a). \end{aligned} \tag{۱۷.۱}$$

بویژه اگر $\nu = \frac{1}{2}$ باشد:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{-\frac{1}{2}} e^{at} &= E_t(\frac{1}{2}, a) \\ &= \frac{e^{at} a^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{at} \xi^{-\frac{1}{2}} e^{-\xi} d\xi. \end{aligned}$$

اگر در رابطه‌ی فوق تغییر متغیر $t = \xi^{\frac{1}{2}}$ را اعمال کنیم خواهیم داشت

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{-\frac{1}{2}} e^{ta} &= \frac{2e^{at}a^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(at)^{\frac{1}{2}}} e^{-t^2} dt \\ &= e^{at} a^{-\frac{1}{2}} Erf(at)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{۱۸.۱}$$

که در (۱۸.۱)، Erf **تابع خطا** می‌باشد و به این صورت تعریف می‌شود:

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi.$$

همچنین

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{-\frac{1}{2}} \cos(at) &= C_t(\frac{1}{2}, a) \\ &= \sqrt{\frac{2}{a}} \left[\cos(at)C(x) + \sin(at)S(x)\right]. \end{aligned} \tag{۱۹.۱}$$

و

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{-\frac{1}{2}} \sin(at) &= S_t(\frac{1}{2}, a) \\ &= \sqrt{\frac{2}{a}} \left[\sin(at)C(x) - \cos(at)S(x)\right]. \end{aligned} \tag{۲۰.۱}$$

که

$$x = \sqrt{\frac{2at}{\pi}}$$

و $C(x)$ و $S(x)$ انتگرال‌های فرنل هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int_0^x \cos\frac{1}{2}\pi t^2 dt, \\ S(x) &= \int_0^x \sin\frac{1}{2}\pi t^2 dt. \end{aligned}$$

توضیح: برای سادگی اندیس‌های 0 و t را از نماد ${}_0D_t^{-\nu}$ حذف می‌کنیم، اگر احتمال ابهام وجود داشته باشد یا حد پایین انتگرال غیر صفر باشد از نماد اصلی استفاده خواهیم کرد.

حال می‌خواهیم ببینیم آیا می‌توان انتگرال کسری توان صحیح t در تابع f را به فرم جملاتی از انتگرال‌های کسری تابع f بیان کرد؟

اگر $f \in \boldsymbol{C}$ از تعریف (۱.۲.۱) داریم:

$$D^{-\nu}[tf(t)] = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\xi)^{\nu-1}[\xi f(\xi)]d\xi, \qquad \nu > 0.$$

اگر به جای عبارت داخل براکت در انتگرال فوق، اتحاد زیر را بنویسیم:

$$[t-(t-\xi)]f(\xi)$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} D^{-\nu}[tf(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \left(\int_0^t (t-\xi)^{\nu-1}[t-(t-\xi)]f(\xi)d\xi \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \left(t\int_0^t (t-\xi)^{\nu-1}f(\xi)d\xi - \int_0^t (t-\xi)^{\nu}f(\xi)d\xi \right) \\ &= t[D^{-\nu}f(t)] - \nu[D^{-\nu-1}f(t)]. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$D^{-\nu}[tf(t)] = t[D^{-\nu}f(t)] - \nu[D^{-\nu-1}f(t)]. \tag{۲۱.۱}$$

به‌عنوان مثال

$$D^{-\nu}[te^{at}] = tE_t(\nu,a) - \nu E_t(\nu+1,a). \tag{۲۲.۱}$$

$$D^{-\nu}[t\cos(at)] = tC_t(\nu,a) - \nu C_t(\nu+1,a), \qquad \nu > 0. \tag{۲۳.۱}$$

$$D^{-\nu}[t\sin(at)] = tS_t(\nu,a) - \nu S_t(\nu+1,a), \qquad \nu > 0. \tag{۲۴.۱}$$

معادله‌ی (۲۱.۱) را به راحتی می‌توان تعمیم داد. اگر p عدد صحیح نامنفی باشد آنگاه

$$D^{-\nu}[t^p f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\xi)^{\nu-1}[\xi^p f(\xi)]d\xi, \qquad \nu > 0 \tag{۲۵.۱}$$

و

$$\xi^p = [t-(t-\xi)]^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} t^{p-k}(t-\xi)^k.$$

با جانشین کردن این عبارت در (۲۵.۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} D^{-\nu}[t^p f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} t^{p-k} \int_0^t (t-\xi)^{\nu+k-1} f(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} \Gamma(\nu+k) t^{p-k} [D^{-(\nu+k)} f(t)]. \end{aligned} \tag{۲۶.۱}$$

از طرفی می‌دانیم که مشتق kام t^p به این صورت است

$$D^k t^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-k+1)} t^{p-k} = \frac{p!}{(p-k)!} t^{p-k}.$$

و نیز می‌دانیم

$$\binom{-m}{n} = (-1)^n \frac{\Gamma(m+n)}{n!\Gamma(m)}.$$

بنابراین (۲۶.۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$D^{-\nu}[t^p f(t)] = \sum_{k=0}^{p} \binom{-\nu}{k} [D^k t^p][D^{-\nu-k} f(t)]. \tag{۲۷.۱}$$

به‌عنوان مثال

$$D^{-\nu}[t^p e^{at}] = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} \Gamma(\nu+k) t^{p-k} E_t(\nu+k, a). \tag{۲۸.۱}$$

مثال‌های را که تا الان بررسی کرده‌ایم در همه آنها حد پایین انتگرال‌گیری صفر بود. حال اگر حد پایین انتگرال‌گیری صفر نباشد چه می‌توان کرد؟
فرمول زیر را در نظر بگیرید

$$ {}_cD_t^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^t (t-\xi)^{\nu-1} f(\xi) d\xi, \qquad \nu > 0, \ \ 0 \leqslant c < t. \qquad (۲۹.۱) $$

که در آن f از کلاس $\boldsymbol{C}$ روی $[c,\infty)$ است.
با تغییر متغیر $\xi = t(1-x)$ در (۲۹.۱) خواهیم داشت:

$$ {}_cD_t^{-\nu} f(t) = \frac{t^{\nu}}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\tau} x^{\nu-1} f(t-tx) dx, \qquad (۳۰.۱) $$

که در آن

$$ \tau = \frac{t-c}{t} $$

◄ مثال: فرض کنید $f(t) = t^{\mu}$. اگر $c = 0$، $\mu > -1$ است و اگر $c > 0$ ، μ دلخواه است. با جایگذاری در (۳۰.۱) خواهیم داشت:

$$ \begin{aligned} {}_cD_t^{-\nu} t^{\mu} &= \frac{t^{\mu+\nu}}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\tau} x^{\nu-1}(1-x)^{\mu} dx \\ &= \frac{t^{\mu+\nu}}{\Gamma(\nu)} \boldsymbol{B}_{\tau}(\nu, \mu+1), \end{aligned} \qquad (۳۱.۱) $$

که اگر $c = 0$ باشد، (۳۱.۱) تبدیل به رابطه‌ی (۶.۱) می‌شود.
از این گذشته اگر $f(t)$، e^{at} یا $\cos(at)$ یا $\sin(at)$ باشد، از (۳۰.۱) خواهیم داشت:

$$ \begin{aligned} {}_cD_t^{-\nu} e^{at} &= e^{ac} E_{t-c}(\nu, a), \\ {}_cD_t^{-\nu} \cos(at) &= (\cos ac) C_{t-c}(\nu, a) - (\sin ac) S_{t-c}(\nu, a), \\ {}_cD_t^{-\nu} \sin(at) &= (\sin ac) C_{t-c}(\nu, a) + (\cos ac) S_{t-c}(\nu, a). \end{aligned} \qquad (۳۲.۱) $$

قضیه ۴.۲.۱. فرض کنید f روی $J = [0, \infty)$ پیوسته بوده و $\mu, \nu > 0$ باشد آنگاه به ازای هر t از این بازه خواهیم داشت:

$$D^{-\nu}[D^{-\mu}f(t)] = D^{-(\mu+\nu)}f(t) = D^{-\mu}[D^{-\nu}f(t)]. \tag{۳۳.۱}$$

اثبات. مرجع [۱] فصل ۳ بخش ۴ را ببینید. ∎

بحث در مورد قضیه‌ی ۴.۲.۱

برای اینکه قضیه فوق زمانی که $\mu = 0$ یا $\nu = 0$ است برقرار باشد، باید D^0 عملگر همانی I تعریف شود، پس قرارداد می‌کنیم که D^0 عملگر همانی باشد.

برای هر عدد صحیح و مثبت p و تابع پیوسته f دیدیم که

$$D^{-p}f(t) = \frac{1}{(p-1)!}\int_0^t (t-x)^{p-1}f(x)dx \tag{۳۴.۱}$$

رابطه‌ی (۳۴.۱) حاصل p بار انتگرال از تابع $f(t)$ است،که اگر در (۳۳.۱) فرض کنیم $\mu = p$ خواهیم داشت:

$$D^{-p}[D^{-\nu}f(t)] = D^{-(p+\nu)}f(t) = D^{-\nu}[D^{-p}f(t)]. \tag{۳۵.۱}$$

بنابراین می‌بینیم که حاصل p بار انتگرال از انتگرال کسری مرتبه‌ی ν تابع f برابر با انتگرال کسری f از مرتبه‌ی $p+\nu$ است و هر دوی آنها برابر با انتگرال کسری مرتبه‌ی ν، p بار انتگرال از f هستند. همچنین این قضیه نشان می‌دهد که قانون ترکیب برای انتگرال‌های کسری برقرار است که بعضی اوقات آن را قانون نماها برای انتگرال کسری نیز می‌نامیم.

◄ مثال: اگر $f(t) = e^{at}$ باشد، چون e^{at} پیوسته است ،پس می‌توان از قضیه‌ی (۴.۲.۱) استفاده کرد

$$D^{-\nu}[D^{-\mu}e^{at}] = D^{-(\mu+\nu)}e^{at}, \qquad \forall\nu > 0, \quad \mu > 0.$$

اما از (۱۷.۱) داریم $D^{-\mu}e^{at} = E_t(\mu, a)$ پس:

$$D^{-(\mu+\nu)}e^{at} = E_t(\mu+\nu, a).$$

بنابراین

$$D^{-\nu}E_t(\mu,a)=E_t(\mu+\nu,a),\qquad \mu>-1,\quad \nu>0. \tag{۳۶.۱}$$

و به همین صورت خواهیم داشت

$$D^{-\nu}C_t(\mu,a)=C_t(\mu+\nu,a),\qquad \mu>-1,\quad \nu>0, \tag{۳۷.۱}$$

$$D^{-\nu}S_t(\mu,a)=S_t(\mu+\nu,a),\qquad \mu>-2,\quad \nu>0. \tag{۳۸.۱}$$

۲.۲.۱ مشتق از انتگرال کسری و انتگرال کسری از مشتق

قضیه ۵.۲.۱. فرض کنید f روی $J=[0,\infty)$ پیوسته بوده و $\nu>0$ باشد آنگاه:

الف- اگر Df از کلاس $\boldsymbol{C}$ باشد آنگاه:

$$D^{-\nu-1}[Df(t)]=D^{-\nu}f(t)-\frac{f(0)}{\Gamma(\nu+1)}t^{\nu},$$

ب- اگر Df در بازه‌ی J پیوسته باشد آنگاه برای $t>0$

$$D[D^{-\nu}f(t)]=D^{-\nu}[Df(t)]+\frac{f(0)}{\Gamma(\nu)}t^{\nu-1}.$$

اثبات. مرجع [۱] فصل ۳ بخش ۵ را ببینید. ∎

◄ مثال: اگر $f(t)=e^{at}$ با استفاده از قسمت **(الف)** قضیه (۵.۲.۱) خواهیم داشت:

$$D^{-\nu-1}[ae^{at}]=D^{-\nu}[e^{at}]-\frac{t^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}$$

و با استفاده از (۱۷.۱) داریم:

$$aE_t(\nu+1,a)=E_t(\nu,a)-\frac{t^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} \tag{۳۹.۱}$$

با استفاده از قسمت **(ب)** قضیه (۵.۲.۱) خواهیم داشت:

$$DE_t(\nu,a)=aE_t(\nu,a)+\frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}$$