دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

مجموعه های بسته ضربی از خودتوان ها در یک حلقه متناهی

نگارش
مریم دهقان

استاد راهنما
دکتر ابراهیم هاشمی

مهر ۹۰

صفحهٔ تصویب نامه توسط هیأت داوران (فرم پیوست ۳ یا ۴ با امضای اصل هیأت داوران مورد قبول است)

قدردانی

در اینجا می‌خواهم از همه تشکر کنم.

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه یکدار متناهی و T مجموعه تمام خودتوان های R باشد. در این پایان نامه زیر مجموعه های بسته ضربی از T که می توانند در تجزیه R به ما کمک کنند را بررسی می کنیم. همچنین ویژگی های یکه هایی که توسط خودتوان ها حفظ می شوند را بررسی می کنیم. فرض کنیم M مجموعه خودتوان های مینیمال R، اجتماع با صفر باشد. حال با استفاده از یکه هایی که توسط خودتوان ها حفظ می شوند نشان می دهیم M تحت ضرب بسته است اگر و تنها اگر R مجموع مستقیم حلقه های موضعی باشد.

مطالب ارائه شده در این پایان نامه برگرفته از مقالات [۲] و [۸] می باشد.

واژه‌های کلیدی: حلقه متناهی، خودتوان، حلقه موضعی.

پیشگفتار

فهرست مطالب

۱ پیش نیازها و مفاهیم مقدماتی **۱**
۱.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی ۱

۲ حلقه های متناهی یکدار **۱۴**
۱.۲ خودتوان ها ۱۴

۳ تجزیه یکه ها **۲۹**
۱.۳ وارونپذیری عناصر حلقه و تجزیه پذیری گروه یکه ها ۲۹

۴ مجموعه های بسته ضربی از خودتوان ها در یک حلقه متناهی **۴۴**
۱.۴ رابطه هم ارزی روی T ۴۴
۲.۴ مزدوج های یک خودتوان ۴۷
۳.۴ زیر گروهی از گروه های حفظ شده ۵۱
۴.۴ تجزیه حلقه R ۶۰

مراجع **۶۴**

فهرست الفبایی **۶۵**

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی **۶۶**

واژه نامه انگلیسی به فارسی **۶۷**

فصل ۱

پیش نیازها و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این پایان نامه از نمادهای زیر استفاده می کنیم:

$End_R(R)$	حلقه درونریختی های حلقه R
$Hom_R(M,N)$	مجموعه تمام همریختی ها از M به N
$H \ltimes K$	حاصلضرب نیم مستقیم H و K
$\oplus_{i=1}^{n} M_i$	مجموع مستقیم مدولهای M_1، ... و M_n
$Rad(R)$	رادیکال جیکبسون حلقه R

در تمام این پایان نامه R نمایانگر یک حلقه متناهی و یکدار است مگر اینکه خلاف آن ذکر شود.

خودتوان های e و f متعامدند هرگاه $ef = fe = 0$.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم R حلقه ای یکدار باشد. گروه یکه های حلقه R را با R^* نمایش می دهیم.

متمم خودتوان $e \in R$ را که با علامت $\overline{e}$ نشان می دهیم به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\overline{e} := 1 - e.$$

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم A و B زیرمجموعه هایی از R باشند و $r \in R$. قرار می دهیم:

$$A+B := \{a+b \;:\; a\in A \;,\; b\in B\} \quad , \quad A.B := \{ab \;:\; a\in A \;,\; b\in B\}$$

و

$$r+A := \{r+a \;:\; a\in A\} \quad , \quad r.A := \{ra \;:\; a\in A\}$$

تعریف ۳.۱.۱. زیرگروه G از R^* را تجزیه پذیر می نامیم هرگاه زیر گروه های A و B از G وجود داشته باشند به طوری که $G = A.B$ و $A\cap B=\{e\}$.

اشتراک تمام ایده آلهای چپ (راست) ماکسیمال حلقه R را رادیکال جیکبسون حلقه R نامیده و با $Rad(R)$ نمایش می دهیم. R-مدول N را یک جمعوند مستقیم M می نامیم هرگاه R-مدول K وجود داشته باشد به طوری که $M\cong N\oplus K$.

تعریف ۴.۱.۱. الف) R-مدول ناصفر M را ساده می نامیم هرگاه $\{۰\}$ و M تنها زیر مدول های آن باشند.

ب) R-مدول M نیم ساده نامیده می شود هرگاه هر زیر مدول M یک جمعوند مستقیم آن باشد.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت:

الف) R را موضعی می نامیم هرگاه $R/Rad(R)$ یک حلقه تقسیم باشد.

ب) R را نیم موضعی می نامیم هرگاه $R/Rad(R)$ یک حلقه نیم ساده باشد.

تعریف ۶.۱.۱. عنصر $e^۲ = e \in R$ خودتوان موضعی نامیده می شود هرگاه eRe یک حلقه موضعی باشد.

قضیه ۷.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

الف) R تنها یک ایده آل چپ ماکسیمال دارد؛

ب) R تنها یک ایده آل راست ماکسیمال دارد؛

ج) R یک حلقه موضعی است؛

د) غیر یکه های R تشکیل یک ایده آل می دهند؛

ه) غیر یکه های R تشکیل یک گروه آبلی جمعی می دهند؛

و) اگر $a_1 + ... + a_n \in R^*$، آنگاه برخی از a_i ها در R^* قرار دارند؛

ز) اگر $a + b \in R^*$، آنگاه $a \in R^*$ یا $b \in R^*$.

اثبات . (ج) ← (الف): فرض کنیم $\underline{m}$ یک ایده آل چپ ماکسیمال حلقه R باشد. هر ایده آل چپ ماکسیمال R، شامل $Rad(R)$ است. حال اگر R یک حلقه موضعی باشد، یعنی؛ $R/Rad(R)$ حلقه تقسیم باشد، آنگاه $\underline{m}/Rad(R) = ۰$ یا $\underline{m}/Rad(R) = R/Rad(R)$. چون $\underline{m}$ ماکسیمال است حالت دوم رخ نخواهد داد لذا $\underline{m} = Rad(R)$. پس R تنها یک ایده آل چپ ماکسیمال دارد.

(الف) ← (ج): فرض کنیم R تنها یک ایده آل چپ ماکسیمال مانند $\underline{m}$ دارد. لذا $Rad(R) = \underline{m}$ تنها ایده آل چپ ماکسیمال حلقه R است. از اینرو تنها ایده آلهای چپ $R/Rad(R)$، صفر و خودش می باشند. بنابراین $R/Rad(R)$ یک حلقه تقسیم است. لذا R، موضعی می باشد. (ب) ⇔ (ج)، متناظرا ثابت می شود.

(ج) ← (د): فرض کنیم $R/Rad(R)$ حلقه تقسیم باشد و $a \notin Rad(R)$. لذا a در R وارون پذیر است. بنابراین $R - R^* = Rad(R)$ یک ایده آل R می باشد.

(د) ← (ه) ← (و) ← (ز)، بوضوح برقرار است. (ز) ← (ج): فرض کنیم $a \notin Rad(R)$. در این صورت یک ایده آل چپ ماکسیمال مانند $\underline{m}$ وجود دارد به طوری که $a \notin \underline{m}$. پس $\underline{m} + Ra = R$. عناصر $m \in \underline{m}$ و $b \in R$ وجود دارند که $m + ba = ۱$. از طرفی $m \notin R^*$، لذا با توجه به (ز)، $ba \in R^*$. پس $\overline{a}$ در $\overline{R} = R/Rad(R)$ وارون پذیر از چپ است. بنابراین $\overline{R} - \{۰\}$ با عمل ضرب یک گروه می باشد. لذا $\overline{R}$ حلقه تقسیم است. ■

مدول M را تجزیه ناپذیر می نامیم هرگاه $M \neq 0$ و نتوان M را به صورت مجموع مستقیم هیچ دو زیر مدول ناصفرش نوشت.

قضیه ۸.۱.۱. (کرول-اشمیت) [1] فرض کنیم M یک R-مدول متناهیا تولید شده باشد. فرض کنیم

$$M = M_1 \oplus ... \oplus M_m = N_1 \oplus ... \oplus N_n$$

دو تجزیه از M به زیر مدول های ناصفر و تجزیه ناپذیرش باشد. در این صورت $m = n$ و جایگشت σ از $\{1, ..., m\}$ وجود دارد به طوری که برای هر $1 \leqslant i \leqslant m$، $M_i \simeq N_{\sigma(i)}$.

اثبات. به مرجع [۵] قضیه ۶.۳ رجوع شود. ■

لم ۹.۱.۱. (لم شور) [2] فرض کنیم R یک حلقه و $_RV$ یک R-مدول چپ ساده باشد. در این صورت $End(_RV)$ یک حلقه تقسیم است.

اثبات. به مرجع [۴] لم ۶.۳ رجوع شود. ■

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم L یک ایده آل چپ (راست) از حلقه R باشد. گوییم خودتوان ها قابل انتقال به پیمانه L هستند هرگاه برای هر $x \in R$، اگر $x - x^2 \in L$، آنگاه خودتوان $e \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $e - x \in L$.

تعریف ۱۱.۱.۱. R را یک حلقه تمیز می نامیم هرگاه هر عنصر R با مجموع یک عنصر یکه و یک خودتوان برابر باشد.

گزاره ۱۲.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $x \in R$. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

الف) عنصر $e^2 = e \in R$ وجود دارد به طوری که $e - x \in R(x - x^2)$؛

[1] Krull-Schmidt
[2] Schur

ب) $e^{۲}=e\in R$ و $c\in R$ وجود دارند به طوری که $(۱-e)-c(۱-x)\in Rad(R)$؛

ج) $e^{۲}=e\in Rx$ وجود دارد به طوری که $R=Re+R(۱-x)$؛

د) $e^{۲}=e\in Rx$ وجود دارد به طوری که $۱-e\in R(۱-x)$.

اثبات. (الف) $\leftarrow$ (ب): چون $e-x\in R(x-x^{۲})$، پس $r\in R$ وجود دارد که $e-x=r(x-x^{۲})$. در نتیجه $۱-e=(۱-rx)(۱-x)$.

(ب) $\leftarrow$ (ج): فرض کنیم $(۱-e)-c(۱-x)\in Rad(R)$. در نتیجه

$$۱-[(۱-e)-c(۱-x)]=e+c(۱-x)$$

یکه است.

(ج) $\leftarrow$ (د): چون $R=Re+R(۱-x)$ پس عناصر $t,s\in R$ وجود دارند که $۱=te+s(۱-x)$.

قرار می دهیم

$f:=e+(۱-e)te$. در نتیجه

$$f^{۲}=(e+(۱-e)te)(e+(۱-e)te)$$

$$=e+e(۱-e)te+(۱-e)te+(۱-e)te(۱-e)te$$

$$=e+(۱-e)te=f\in R(x)$$

و

$$۱-f=۱-e-(۱-e)te=۱-te-e(۱-te)$$

$$=s(۱-x)-es(۱-x)=(۱-e)s(۱-x).$$

(د) ← (الف): فرض کنیم $1 - e \in R(1 - x)$. در نتیجه $e - x = e(1 - x) - (1 - e)x$، که $e(1 - x) \in Rx(1 - x)$ و $(1 - e)x \in R(1 - x)x$. بنابراین $e - x \in R(x - x^2)$. ■

تعریف ۱۳.۱.۱. حلقه R را مناسب می نامیم هرگاه هر عنصر از R در یکی از شرایط گزاره ۱۲.۱.۱ صدق کند.

قضیه ۱۴.۱.۱. هر حلقه تمیز، مناسب است.

اثبات. فرض کنیم R یک حلقه تمیز باشد. در این صورت برای هر $x \in R$، $x = e + u$ که $e^2 = e$ و u یک عنصر یکه است. پس

$$u[x - u^{-1}(1 - e)u] = ue + u^2 - u + eu = x^2 - x.$$

که با توجه به گزاره ۱۲.۱.۱، $e - x \in R(x - x^2)$. بنابراین R یک حلقه مناسب می باشد. ■

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و خودتوان ها قابل انتقال به پیمانه $Rad(R)$ باشند و هر ایده آل چپ (راست) از حلقه R که مشمول در $Rad(R)$ نباشد، شامل یک خودتوان غیر صفر باشد. در این صورت R را یک حلقه قوی می نامیم.

گزاره ۱۶.۱.۱. هر حلقه مناسب، قوی است.

اثبات. با توجه به گزاره ۱۲.۱.۱ کافیست نشان دهیم برای هر $x \in R$ که $x \notin Rad(R)$، Rx شامل یک خودتوان ناصفر است. عنصر $x \in R$ را طوری در نظر می گیریم که $e^2 = e \in Rx$ نتیجه دهد $e = 0$. فرض کنیم $a \in R$. چون R مناسب است پس عنصر $e^2 = e \in Rax$ را در نظر می گیریم به طوری که $1 - e \in R(1 - ax)$. از طرفی $e = 0$ پس $1 \in R(1 - ax)$. یعنی؛ $x \in Rad(R)$ که یک تناقض است. بنابراین $0 \neq e^2 = e \in Rx$. ■

تعریف ۱.۱.۱۷. حلقه R را نیم ساده آرتینی می نامیم هرگاه R نیم اول و آرتینی چپ باشد.

تعریف ۱.۱.۱۸. حلقه R را نیم کامل می نامیم هرگاه $R/Rad(R)$ نیم ساده آرتینی باشد و خودتوان ها قابل انتقال به پیمانه $Rad(R)$ باشند.

تعریف ۱.۱.۱۹. حلقه R (نه لزوما یکدار)، یک I-حلقه نامیده می شود هرگاه هر ایده آل چپ (راست) که مشمول در رادیکال جیکبسون نباشد، شامل یک خودتوان غیر صفر باشد. به علاوه اگر خودتوان ها قابل انتقال به پیمانه $Rad(R)$ باشند، آنگاه R یک حلقه قوی است که در بعضی مقالات آن را I-حلقه نیز می نامند.

تذکر. هر حلقه نیم کامل یک I-حلقه است.

تعریف ۱.۱.۲۰. فرض کنیم R یک حلقه باشد. رابطه $\leqslant$ را روی مجموعه خودتوان های R چنین تعریف می کنیم:

$$f \in eRe \Longleftrightarrow f \leqslant e$$

می توان نشان داد که رابطه فوق با رابطه زیر معادل است:

$$f \leqslant e \Longleftrightarrow f = fe = ef.$$

فرض کنیم $f \in eRe$. پس $r \in R$ وجود دارد که $f = ere$. اگر طرفین این رابطه را از چپ در e ضرب کنیم داریم:

$$ef = ere = f$$

و به همین ترتیب اگر از راست در e ضرب کنیم داریم:

$$fe = ere = f.$$

حال فرض کنیم $f = fe = ef$. اگر طرفین این تساوی را در e ضرب کنیم داریم:

$$efe = ef = f.$$

به سادگی می توان نشان داد $\leqslant$ یک رابطه ترتیبی جزیی است و به آن رابطه ترتیبی جزیی طبیعی گوییم.

گوییم حلقه R در شرط ماکسیمم روی خودتوان ها صدق می کند هرگاه هر زنجیر افزایشی از خودتوان های R، ایستا باشد.

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. خودتوان $e \in R$ را اولیه می نامیم هرگاه نتوان e را به صورت مجموع هیچ دو خودتوان متعامد بدیهی از R نوشت.

تذکر. خودتوان e اولیه است اگر و تنها اگر $0 \neq f^2 = f \in Re$، نتیجه دهد $Rf = Re$.

لم ۲۲.۱.۱. فرض کنیم R یک I_0-حلقه باشد و $x \in R$ به طوری که $x + Rad(R)$ در $R/Rad(R)$ خودتوان اولیه باشد. در این صورت خودتوان $e \in R$ وجود دارد به طوری که $e - x \in Rad(R)$.

اثبات. عنصر $0 \neq f^2 = f \in Rx$ را در نظر می گیریم. پس در $\overline{R} = R/Rad(R)$، $\overline{f} \in \overline{R}\overline{x}$ و لذا با توجه به تذکر قبل، $\overline{Rf} = \overline{R}\overline{x}$. اگر قرار دهیم $e = f + xf - fxf$، آنگاه $e^2 = e \neq 0$ و $\overline{e} = \overline{x}$. ■

قضیه ۲۳.۱.۱. گزاره های زیر برای هر حلقه R معادلند:

الف) R نیم کامل است؛

ب) R، I_0-حلقه است و در شرط ماکسیمم روی خودتوان ها صدق می کند؛

ج) اگر $L \subseteq R$ یک ایده آل چپ (راست) باشد، آنگاه خودتوان $e \in L$ و ایده آل چپ (راست) $M \subseteq Rad(R)$ وجود دارند به طوری که $L = Re + M$.

د) R یک I_0-حلقه و $R/Rad(R)$ نیم ساده آرتینی است.

اثبات. (الف) $\leftarrow$ (ب): اگر حلقه R نیم کامل باشد، آنگاه با توجه به تذکر فوق یک $I_۰$-حلقه است. اگر $e_۱ \leqslant e_۲ \leqslant ...$ یک زنجیر افزایشی از خودتوان های R باشد، آنگاه در حلقه $R/Rad(R)$ زنجیر افزایشی $\overline{e}_۱ \leqslant \overline{e}_۲ \leqslant ...$ از خودتوان ها را خواهیم داشت. در نتیجه برای برخی n، $\overline{e_n} = \overline{e_{n+۱}} = ...$.
از این رو برای هر $k \geqslant n$،

$$(e_{k+۱} - e_k)^۲ = (e_{k+۱} - e_k) \in Rad(R),$$

بنابراین $e_n = e_{n+۱} = ...$.

(ب) $\leftarrow$ (ج): اگر $L \subseteq Rad(R)$، آنگاه $e = ۰$ و $M = L$. در غیر این صورت فرض کنیم $۰ \neq e^۲ = e \in L$ ماکسیمال باشد. پس $L = Re + M$ که $M = \{x \in L \quad : \quad xe = ۰\}$. اگر $M \nsubseteq Rad(R)$، آنگاه عنصر $۰ \neq f^۲ = f \in M$ را در نظر می گیریم. بنابراین $g = e + f - ef$ یک خودتوان در L است و $e \leqslant g$، که با توجه به انتخاب e، $e = g$. پس $f = f^۲ = f(ef) = ۰$ که یک تناقض است. بنابراین $M \subseteq Rad(R)$.

(ج) $\leftarrow$ (د) بدیهی است. (د) $\leftarrow$ (الف): چون R یک $I_۰$-حلقه است پس خودتوان های اولیه در $R/Rad(R)$ با توجه به لم ۲۲.۱.۱ قابل انتقال هستند. اما هر خودتوان در $R/Rad(R)$ مجموع خودتوان های متعامد اولیه است و بنابراین با یک روش استاندارد می توانند انتقال یابند. ■

گزاره ۲۴.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه قوی باشد. در این صورت R یا نیم کامل است یا شامل یک مجموعه نامتناهی از خودتوان های متعامد می باشد.

اثبات . فرض کنیم حلقه R (نه لزوما متناهی) شامل هیچ مجموعه نامتناهی از خودتوان های متعامد نباشد. خودتوان های متعامد اولیه e_i وجود دارند به طوری که

$$۱ = e_۱ + e_۲ + ... + e_n.$$

فرض کنیم $R' = R/Rad(R)$. در نتیجه $1' = e'_1 + e'_2 + ... + e'_n$. از طرفی چون R یک حلقه قوی است، پس $R'e'_i$ شامل هیچ زیر مدول نابدیهی نمی باشد و از اینرو ساده است. بنابراین R' نیم ساده و با توجه به قضیه قبل، R نیم کامل است. ■

قضیه ۲۵.۱.۱. (ودربرن-آرتین) [۳] فرض کنیم R یک حلقه نیم ساده باشد. در این صورت عدد منحصر به فرد r و حلقه های تقسیم $D_r, ..., D_1$ وجود دارند به طوری که

$$R \cong M_{n_1}(D_1) \times ... \times M_{n_r}(D_r).$$

همچنین دقیقا r، مدول ساده چپ وجود دارد که دو بدو یکریخت نیستند.

اثبات. به مرجع [۴] قضیه ۵.۳ رجوع شود. ■

تعریف ۲۶.۱.۱. حلقه R را منظم می نامیم هرگاه برای هر $x \in R$، عنصر $y \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $xyx = x$.

حلقه R را یکه-منظم می نامیم هرگاه برای هر $x \in R$، عنصر یکه $u \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $xux = x$.

گزاره ۲۷.۱.۱. فرض کنیم R (نه لزوما متناهی) یک حلقه باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

الف) R منظم است؛

ب) هر ایده آل راست اصلی، تولید شده توسط یک خودتوان است؛

ج) هر ایده آل راست متناهیا تولید شده R، تولید شده توسط یک خودتوان است؛

د) هر ایده آل راست متناهیا تولید شده، یک جمعوند مستقیم از R است؛

ه) هر R-مدول R، هموار است.

[۳] Wedderburn-Artin