بسم الله الرحمن الرحيم

جمهوری اسلامی ایران

دانشگاه تهران

دانشکده علوم، گروه ریاضی و علوم کامپیوتر

عنوان

پایه‌های متعامد فضاهای تانسوری متقارن شده

نگارش

نصرت‌الله شجره‌پورصلواتی

استاد راهنما

8936

دکتر محمّدرضا درفشه

پایان‌نامه دکتری تخصصی در رشتهٔ ریاضیات محض

گرایش نظریهٔ گروه‌های متناهی

دیماه ۱۳۷۹

جمهوری اسلامی ایران

دانشگاه تهران

دانشکده علوم

بسمه تعالی

اداره کل تحصیلات تکمیلی دانشگاه

احتراماً به اطلاع میرساند که جلسه دفاع از پایان نامه دوره **دکتری ریاضی محض در گرایش نظریه گروههای متناهی، آقای نصرت ا... شجره پور صلواتی** تحت عنوان:

پایه های متعامد فضاهای تانسوری متقارن شده

در تاریخ **۷۹/۱۰/۱۲** در **دانشکده علوم دانشگاه تهران** برگزار گردید.

هیأت داوران بر اساس کیفیت پایان نامه، مقالات انتشار یافته، استماع دفاعیه و نحوه پاسخ به سؤالات، **پایاننامه** ایشان را برای دریافت **درجه دکتری(Ph.D.)** در رشته ریاضی محض معادل با ۲٤ واحد با درجه عالی مورد ارزشیابی قرار داد.

هیأت داوران

سمت	نام و نام خانوادگی	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱. استاد راهنما	دکتر محمدرضا درفشه	استاد	تهران	
۲. استاد داور	دکتر محمدعلی شهابی	استاد	تبریز	
۳. استاد داور	دکتر محمد گودرزی	دانشیار	تهران	
٤. استاد داور ونماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر رحیم زارع نهندی	استاد	تهران	
۵. استاد داور	دکتر علیرضا ذکایی	استادیار	خواجه نصیر	علیرضا ذکایی

معاون گروه در امور تحصیلات تکمیلی	مدیر گروه	سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده
رحیم زارع نهندی	عمید رسولیان	رسول اخروی

ای مولای من، یا علی

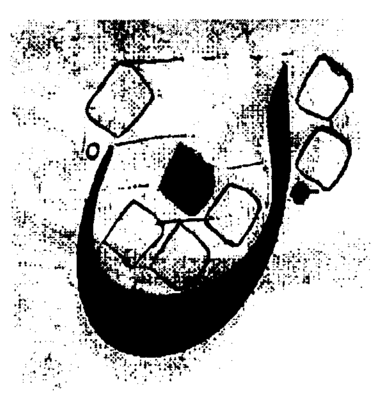
تقدیم به:

بزرگواران،

عزیزان،

مهربانان،

و دوستان مخلص و بامعرفت.



سپاسگزاری و قدر دانی

ابتدا در نهایت فروتنی از استادان فرزانه ای که سالها افتخارشاگردی ایشان را داشته ام قدردانی می نمایم و امیدوارم که سپاس فراوان و بی شائبه اینجانب را بپذیرند.

استاد ارجمند جناب آقای دکتر محمدرضا درفشه که با نهایت صبر و درایت راهنمایی های لازم را در انجام این پژوهش نموده اند و فروتنی و صبوری در عرصه دانش را به اینجانب آموختند.

استادان ارجمند آقایان، دکتر محمدعلی شهابی شجاعی، دکتر علیرضا ذکائی، دکتر رحیم زارع نهندی و دکتر محمد گودرزی که داوری این رساله را پذیرفتند و در کمیتهٔ دفاع از این رساله شرکت داشتند.

از کلیه دوستان و سروران عزیزم که به نحوی در مدت تحصیل و امر نگارش این رساله همفکری داشته ام مخصوصا" آقایان دکتر محمدرضا پورنکی و دکتر حسین حاجی ابوالحسن قدردانی می کنم.

از سرکارخانم عزت شجره پورصلواتی و سرکارخانم فاطمه سلطان تقی زاده که در امر تایپ این رساله و فراهم نمودن محیطی مناسب، مساعدتهایی داشتند، نهایت تشکر و قدردانی را دارم .

نصرت ا... شجره پورصلواتی

۱۲ دیماه ۱۳۷۹

معرفی

نگارنده متولد فروردین ماه سال ۱۳۵۰ در دارالامان کرمان می باشد. تحصیلات دانشگاهی را از دانشگاه شهید باهنر کرمان (مهندس افضلی پور*) آغاز نموده است و در سال ۱۳۷۴ موفق به اخذ درجهٔ لیسانس در رشتهٔ ریاضیات محض گردیده و در همان سال تحصیلات تکمیلی را در آن دانشگاه آغاز نموده است. یکسال بعد وی برای ادامهٔ تحصیلات تکمیلی، مورد پذیرش دورهٔ دکترای ریاضی دانشگاه تهران واقع گردیده و تحقیقات خود را در گرایش نظریهٔ گروههای متناهی، تحت راهنمائی آقای دکتر محمّدرضا درفشه شروع نموده است. وی بعد از گذراندن دروس مختلف در این دوره، علاقمند به تحقیق روی کلاس تقارن تانسورها شده است.در سال تحصیلی *1999-2000* نگارنده با استفاده از بورس اعطائی دولت فرانسه در دانشگاه پاریس ***VII*** در اکیپ نظریهٔ گروهها تحت سرپرستی ***M.Broue*** به تحقیق و آموزش مشغول بوده است.

---

*مرحوم فقیه مهندس علیرضا افضلی پور از مبتکران طراز اوّل و بنیانگذار طرح ایجاد دانشگاه در شهر کرمان می باشد. وی بعد از جستجوهای زیاد سرانجام تصمیم گرفت که دانشگاهی در شهر کرمان بر پا نماید. وی با همتی استوار و اخلاصی کامل تمام دارایی های خویش را صرف ساختن این امر مقدس نمود. در این راه شخصا" روی طرح، نقشه، معماری و مصالح نظارت کامل داشت و سعی می نمود که بهترین ها را انجام دهد. تمام کرمانی ها و مخصوصا" دانشجوبانی که در این مکان مقدس تحصیل می کنند مدیون زحمات بی شائبهٔ این مرد بزرگ هستند، روحش شاد.

پایه‌های متعامد فضاهای تانسوری متقارن شده

چکیده

علاقمندی به مطالعهٔ فضاهای تانسوری متقارن شده، به ساختارهای فضاهای گراسمان برمی‌گردد. توسیع نظریهٔ گراسمان به فرمهای دیفرانسیل خارجی که توسط کاردان انجام شد و کاربردهای وسیع این فرمها در همه جای هندسهٔ دیفرانسیل، نظریه‌های فیزیکی و معادلات دیفرانسیل تصادفی، انگیزهٔ بیشتری برای مطالعهٔ آنها برانگیخت.

کارهای کلاسیکِ دیگرِ کلاس تقارن تانسورها در زیرفضاهای همگنِ حلقه‌هایِ چندجمله‌ای ظاهر شده است. در واقع فضاهای گراسمان و زیرفضاهای همگنِ حلقه‌هایِ چندجمله‌ای، حالاتِ خاصی از کلاس تقارن تانسورها هستند که در اواخر قرن نوزدهم شناخته شده‌اند و لذا مطالعهٔ روی این کلاس‌ها قدمتی حدود یک قرن دارد.

در سالهای اخیر مطالعه روی این کلاس‌ها یکی از پرجاذبه‌ترین موضوع‌های جبرچندخطی بوده‌است و ریاضیدانان زیادی روی ردهٔ وسیعی از مسائلی که با این کلاس‌ها ارتباط دارند، کارکرده‌اند. در سی سالِ اخیر، مطالعهٔ این کلاس‌ها روی زوج (G,χ) که در آن G یک گروه جایگشتی روی n حرف وχ یک سرشت تحویل‌ناپذیر آن می‌باشد، متمرکز بوده است. با داشتن فضای برداری V، کلاس تقارن تانسوری وابسته به گروه جایگشتی G و سرشت تحویل‌ناپذیر χ را با نمادِ $V_\chi^n(G)$ نسبت داده‌اند وبا این کلاس‌ها تجزیه‌ای برای حاصلضرب تانسوری توان nام، V یعنی $\otimes^n V$ بدست آورده‌اند. (این کار توسط پیرس [Pi] و فریز [F] بطور مستقل دراوایل دههٔ ۷۰ میلادی انجام شده است.

مسائل عمده و اساسی که موردِ بحث بوده و هستند، یافتنِ فرمول صریح بُعدِ کلاس تقارن تانسوری $V_\chi^n(G)$ برای گروه‌های جایگشتی دلخواه G روی n حرف به همراه سرشتهای تحویل‌ناپذیر آن می‌باشد. اولاً برای کدام Gها و کدام χها، $V_\chi^n(G)$ نابدیهی است و ثانیاً در صورت نابدیهی بودن

این فضاها بحث وجود یا عدم‌وجود O−پایه، برای این فضاهای خاص مطرح است. مسائل تحقیقاتی حل نشده‌ای هستند که عمری حدود چهل سال دارند. کارهای بسیار قوی روی دو جنبهٔ مسئله از دهه ۷۰ میلادی شروع شده است. بعنوان مثال، مریس [M3,4,5,6]، اُلویرا و سیلوا [OD1,2]، مارکوس و شولت [MC1,2,3,4]، هُولمز و تَم [H,HT]، شهابی و شهریاری [SS]، درفشه و پورنکی [DP1,2,3,4] روی این مسائل کار کرده‌اند.

ما در این رساله علاوه بر اینکه مسائل را بصورتِ مجرّد برای حاصلضرب مستقیم و مرکزی گروههای جایگشتی بررسی می‌کنیم، آنرا بصورت دیگری روی توابع کلاسی تعمیم خواهیم داد و مسائل فوق را نیز برای رده‌ای از گروههای جایگشتی معروف به U_{6n} و V_{8n} بررسی خواهیم نمود. لذا این رساله را در پنج فصل تقسیم کرده‌ایم، در فصل نخست به یادآوری مطالبی سنّتی در مورد گروههای جایگشتی و حاصلضربهای مستقیم و مرکزی گروهها و تکنیکهایی از نظریهٔ سرشت و نمایش گروههای متناهی و مباحثی در جبر چندخطی اشاره کرده‌ایم، که در واقع چارچوب اصلی رساله را تشکیل می‌دهند. در فصل دوّم کلاس تقارن تانسوری را معرفی نموده‌ایم تا بتوانیم کارهای تحقیقاتی را بیان نماییم. در فصل سوّم ابعاد فضاهای تانسوری متقارن محاسبه می‌شوند و در پی آن در فصل چهارم پایه‌های متعامد این فضاها بررسی می‌شود. سرانجام، در فصل پنجم به بررسی پایه‌های متعامد در کلاس تقارن تانسوری وابسته به U_{6n} و V_{8n} پرداخته‌ایم. از این رساله در حال حاضر سه مقاله استخراج شده است که در مجلات بین‌المللی پذیرش چاپ یا تحت بررسی قرار دارند. (نگاه کنید به مراجع [DS1,2,3].

نصرت اللّه شجره‌پورصلواتی

آذرماه ۱۳۷۹

واژه‌های کلیدی: فضاهای تانسوری متقارن شده (کلاس تقارن تانسورها)، فضاهای گراسمان، جبرچندخطی، سرشتهای تحویل‌ناپذیر، گروههای جایگشتی، پایه‌های متعامد.

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش‌نیازها و مبانی

در این فصل، سعی شده است، مفاهیم و مطالبی را که در فصول آتی مورد استفاده قرار گرفته‌اند و نقش ابزارکار را در مطالعهٔ کلاس تقارن تانسورها دارند، بصورت فشرده و متمرکز جمع آوری و ارجاع داده شوند. با توجه به سنّتی بودن مطالب این فصل، از آوردن اثبات قضایا پرهیز کرده‌ایم. در بخشِ نخست با گروههای جایگشتی و جایگزینی جایگشتی گروههای متناهی اشاره کرده‌ایم. در بخشِ دوم تعاریف حاصلضرب مستقیم و مرکزی گروهها را یادآور می‌شویم و در بخشِ سوّم مروری بر نظریهٔ نمایش و سرشت معمولی گروههای متناهی خواهیم داشت، از گروه‌جبر شروع خواهیم کرد، مقدمات را معرفی و تکنیکهایی را برای محاسبهٔ جدولِ سرشنهای تحویل‌ناپذیر یک گروه متناهی را در بخشِ چهارم یادآور خواهیم شد. در بخشِ نهایی مطالب مربوط به جبرِ چندخطی را یادآوری خواهیم کرد. سه بخشِ، نخست، سوّم و پنجم مکمّل هم در بحثِ فضاهای تانسوری متقارن شده، در فصل‌های آتی می‌باشند. همهٔ گروهها متناهی و عنصر همانی گروهها را با نماد ۱ نشان داده‌ایم.

۱.۱ گروههای جایگشتی

نظریهٔ گروههای جایگشتی را می‌توان از نتایج مطالعهٔ گالوا در بررسی حل پذیری معادلاتِ جبری دانست. در اواسط قرن نوزدهم موضوع مطالعهٔ گروههای جایگشتی توسط ژوردان و ماتیو به یک موضوع مستقل تبدیل شد و فربنیوس، برنساید و شور در ضمن بررسی گروههای جایگشتی آن را به نظریهٔ نمایش گروهها و جبرهای ماتریسی پیوند دادند. در این بخش سعی شده است که اساسی‌ترین مفاهیم و قضایا (بدون آوردن برهان) ذکر شوند. مبحثِ حاضر با کمک از کتابهای معروف نظریهٔ گروههای متناهی، نظیر سوزوکی [Su]، رابینسون [Ro]، راتمن [Ra] و خصوصاً کتاب معروف گروههای جایگشتی دیکسون و مورتیمر [DM] تدوین شده است.

مجموعهٔ ناتهی و متناهی Ω را در نظر گیرید. هر تابع یک به یک (پوشا) روی Ω را یک

جایگشت می‌نامیم و مجموعهٔ همهٔ جایگشتهای روی Ω را با نماد S_Ω نشان می‌دهیم. مجموعهٔ S_Ω به همراه عمل ترکیب معمولی توابع به یک گروه تبدیل می‌شود و آن را گروه جایگشتی متقارن روی Ω می‌نامیم. هر زیرگروه از S_Ω را گروه جایگشتی روی Ω و از درجهٔ $|\Omega| := card(\Omega)$ نامیده‌ایم.

تعریف ۱.۱.۱ مجموعهٔ ناتهی Ω و گروه G فرض می‌شوند. نگاشت

$$\begin{array}{rcl} \cdot \ : G \times \Omega & \to & \Omega \\ (x, \omega) & \mapsto & x \cdot \omega \end{array}$$

با خواص زیر

$$\begin{array}{lll} i) & 1 \cdot \omega = \omega, & \forall \omega \in \Omega, \\ ii) & x \cdot (y \cdot \omega) = (xy) \cdot \omega, & \forall x, y \in G,\ \forall \omega \in \Omega. \end{array}$$

را تابع عمل G روی Ω می‌نامیم و می‌گوییم G روی مجموعهٔ Ω عمل می کند.

تبصره ۲.۱.۱ با استفاده از عمل گروه G روی مجموعهٔ ناتهی Ω، می‌توان یک همریختی از گروه G به گروه جایگشتی متقارن S_Ω تعریف نمود، یعنی $(g \mapsto (g : \omega \mapsto g \cdot \omega))$. هستهٔ این همریختی را هستهٔ عملِ G بر Ω نامیده‌اند و آنرا با $\mathrm{Ker}\ G := \{g \in G \ : \ g \cdot \omega = \omega,\ \forall \omega \in \Omega\}$ نمایش داده‌اند. هر گاه هستهٔ عملِ G، بدیهی باشد، عملِ G روی Ω را وفادار نامند و در اینصورت یک تکریختی از گروه G به گروه جایگشتی متقارن S_Ω خواهیم داشت، لذا گروه G با زیر گروهی از گروه جایگشتی متقارن S_Ω یکریخت خواهد شد که بنا به تعریف یک گروه جایگشتی روی Ω خواهد بود.

قضیهٔ معروف کیلی به ما اجازه می‌دهد که برای هر گروه دلخواه G، مجموعهٔ ناتهی Ω را چنان بیابیم که گروه G به یک گروه جایگشتی روی Ω تبدیل شود. امّا مجموعهٔ ناتهی اختیار شده در برهان قضیه کیلی خیلی بزرگ است و گروه متناهی G را درون یک گروه جایگشتی متقارن با مرتبهٔ $|G|!$ قرار می‌دهد. لذا بحث پیدا نمودن مجموعهٔ ناتهی و مناسب Ω و یافتن گروه جایگشتی متقارن برای هر گروه متناهی مطرح است. بعنوان مثال کوچکترین گروه جایگشتی متقارن برای گروه دو دوری T_{4n}، از لحاظ اندازه، گروه جایگشتی متقارن روی $4n$ حرف، یعنی S_{4n} می‌باشد، (نگاه کنید به [DP2]) و برای گروههای دو وجهی D_{2n} و گروههای دوری $\mathbb{Z}_n$ گروه جایگشتی متقارن روی n حرف، یعنی S_n یافت شده‌اند (نگاه کنید به [JL] و [HT]). نمایشهای مولد و روابط بین مولدهای یک گروه کمک فراوانی در حدس زدن و بدست آوردن مجموعهٔ Ω و همچنین استفاده از عمل گروه G روی همرده‌های راست (چپ) زیرگروههای خویش نیز در این راه کمک می‌نماید.

تعریف ۳.۱.۱ گروه جایگشتی G روی مجموعهٔ ناتهی Ω عمل می‌کند. دو عنصر α و β از Ω را G-معادل نامیم هر گاه با جایگشتی مانند σ از گروه G بتوان از α به β دست یافت (α را به β متصل کرد) یعنی $\alpha^\sigma := \sigma \cdot \alpha = \beta$. G-معادل بودن یک رابطهٔ هم‌ارزی روی Ω تعریف می‌کند و کلاسهای هم‌ارزی مدار نامیده شده‌اند. به تعبیر بهتر برای عنصر نوعی α از Ω، مدار وابسته به α،

شامل همهٔ عناصر G-معادل با α می‌باشد و با نماد $O(\alpha) := \{\alpha^\sigma \mid \sigma \in G\}$ نمایش داده می‌شود.

تبصره ۴.۱.۱ مجموعهٔ Ω افرازی از مدارها خواهد بود و $O(\alpha) \subseteq \Omega$ و در حالتی که تساوی برقرار باشد، عمل G روی Ω را انتقالی می‌نامیم. یعنی هر دو عنصر Ω با عضوی از گروه G به یکدیگر متصل می‌شوند.

هر گاه گروه G روی مجموعهٔ ناتهی Ω عمل نماید و k عدد صحیح و مثبت کمتر یا مساوی $|\Omega|$ باشد می‌توان عمل گروه G را روی مجموعه‌های زیر

$$\Omega^{(k)} := \{ (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k) \mid \omega_i \in \Omega, \ \ \omega_i \neq \omega_j \ \forall i \neq j \},$$
$$\Omega^{\{k\}} := \{ A \subseteq \Omega \mid |A| = k \},$$

نیز بصورت طبیعی تعریف نمود یعنی:

$$(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k)^\sigma := (\omega_1^\sigma, \omega_2^\sigma, \ldots, \omega_k^\sigma), \quad \forall (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k) \in \Omega^{(k)},$$
$$A^\sigma := \{ a^\sigma \mid a \in A \}, \qquad \forall \sigma \in G, \ \forall A \in \Omega^{\{k\}}.$$

تعریف ۵.۱.۱ گروه جایگشتی G روی مجموعهٔ ناتهی Ω، k-انتقالی، (k-همگن) نامیده می‌شود، هر گاه گروه G روی مجموعهٔ $\Omega^{(k)}$، ($\Omega^{\{k\}}$) انتقالی عمل کند.

تعریف ۶.۱.۱ برای زیرمجموعهٔ ناتهی Δ از Ω و گروه جایگشتی G روی Ω، دو زیرگروه معروف می‌توان به Δ نسبت داد. نخست زیر گروه ثابت نگهدارندهٔ مجموعه‌ای که با نماد $G_{\{\Delta\}}$ نمایش داده می‌شود و عبارتست از:

$$G_{\{\Delta\}} := \{ \sigma \in G \mid \Delta^\sigma = \Delta \ i.e., \ \delta^\sigma \in \Delta \ \forall \delta \in \Delta \},$$

و دوم زیر گروه ثابت نگهدارندهٔ نقطه‌ای که آنرا با نماد $G_{(\Delta)}$ نمایش داده‌اند و عبارتست از:

$$G_{(\Delta)} := \{ \sigma \in G \mid \delta^\sigma = \delta \ \ \forall \delta \in \Delta \},$$

در حالتی که $\Delta = \{\delta\}$ مجموعهٔ تک عضوی باشد داریم $G_{\{\Delta\}} = G_{(\Delta)}$ و آنرا با نماد G_δ نشان داده‌اند و موسوم به پایدارساز δ در G می‌باشد.

تبصره ۷.۱.۱ زیرگروه پایدارساز نقطه‌ای یک زیرگروه نرمال در زیرگروه پایدارساز مجموعه‌ای است، $G_{(\Delta)} \lhd G_{\{\Delta\}}$. و بنا به قضیهٔ لاگرانژ تعداد عناصر مدار شامل δ با شاخص زیرگروه ثابت نگهدارندهٔ δ، یعنی G_δ، برابر است.

تعریف ۸.۱.۱ Ω مجموعه‌ای ناتهی فرض می‌شود. جایگشت t از S_Ω یک r-دور

نامیده می‌شود، $(r \in N)$، اگر برای r نقطهٔ مجزای $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ داشته باشیم:

$$t(\omega_i) = \omega_{i+1} \; i = 1, 2, \ldots, r-1. \;\&\; t(\omega_r) = \omega_1$$

و بقیهٔ نقاط Ω را ثابت نگهدارد.

تبصره ۹.۱.۱ هر جایگشت را می‌توان به دورهای جدا از هم تجزیه کرد.

از اینکه گروههای جایگشتی متقارن روی دو مجموعه با تعداد عناصر یکسان n یکریخت هستند، برای راحتی می‌توانیم گروه جایگشتی متقارن روی n حرف را گروه جایگشتی متقارن روی مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, n\}$ اختیار نماییم و با S_n نمایش دهیم.

۲.۱ حاصلضرب گروهها

یکی از راههای بدست آوردن گروههای جدید از گروههای شناخته شده، حاصلضربهای مختلف آنها می‌باشند. مشهورترین این حاصلضربها عبارتند از: حاصلضرب مستقیم، حاصلضرب نیم‌مستقیم، حاصلضرب مرکزی و حاصلضرب حلقوی می‌باشند. ما در این زیر بخش ابتدا به حاصلضرب مستقیم و سپس حاصلضرب مرکزی گروهها را که مورد نیاز می‌باشد، یادآوری خواهیم کرد. منابع اصلی این مبحث با توجه به فشرده بودن آن از دو کتاب معروف گرنشتاین [Go] و دارن‌هوف [Do] اقتباس و تدوین شده است.

راحت‌ترین حاصلضرب گروهها، حاصلضرب مستقیم گروهها می‌باشد، در تعریف زیر این ادّعا آشکار می‌شود.

تعریف ۱.۲.۱ عدد طبیعی k و گروههای $G_1, G_2, \ldots, G_k$ داده شده‌اند، روی مجموعهٔ k-تایی‌های مرتب حاصلضرب دکارتی مجموعه‌ای $G_1, G_2, \ldots, G_k$ یعنی:

$$G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k := \{\, (g_1, g_2, \ldots, g_k) \mid g_i \in G_i,\ i = 1, 2, \ldots, k \,\}$$

عمل ضرب مؤلفه‌ای برای عناصر نوعی $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ و $(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ بصورت زیر است:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_k) = (x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_k y_k)$$

از اینکه برای هر اندیس i، x_i و y_i در یک گروه یعنی G_i، قرار دارند عمل $x_i y_i$ با معنی است. با داشتن عمل فوق ما یک گروه جدید بدست می‌آوریم. این گروه جدید به نام حاصلضرب مستقیم (خارجی) گروههای $G_1, G_2, \ldots, G_k$ مشهور است.

تبصره ۲.۲.۱ با استفاده از تابع شمول، گروههای G_i را می‌توان درون گروه

حاصلضرب مستقیم $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k$ نشانند و به راحتی می‌توان دید که G_i ها، زیرگروه G هستند. قضیه معروف زیر شرایط حاصلضرب مستقیم بودن زیرگروههای نرمال یک گروه را فراهم می‌آورد. (چنین حاصلضرب مستقیمی به حاصلضرب مستقیم داخلی مشهور است).

قضیه ۳.۲.۱ هرگاه زیرگروههای نرمال G_i از گروه G، برای اندیس $i = 1, 2, \ldots, k$، در شرایط زیر صدق کنند:

$a)\ G = G_1 G_2 \cdots G_k$

$b)\ G_i \cap G_1 G_2 \cdots G_{i-1} G_{i+1} \cdots G_n = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$

آنگاه هر عنصر g از گروه G بصورت یکتا از حاصلضرب عناصر g_i از زیرگروههای G_i، نوشته می‌شود و گروه با حاصلضرب مستقیم (خارجی) گروههای $G_1, G_2, \ldots, G_k$ یکریخت است.

تبصره ۴.۲.۱ شرط $b)$ در قضیه فوق بطور صریح بیان می‌کنند که در حاصلضرب مستقیم زیرگروههای $G_1, G_2, \ldots, G_k$ هر کدام از آنها (به استثنای عضو همانی) از دیگری جداست. حال اگر $G_1, G_2, \ldots, G_k$ گروههای جایگشتی از مراتب به ترتیب $n_1, n_2, \ldots, n_k$ باشند. حاصلضرب مستقیم آنها نیز یک گروه جایگشتی حداکثر از درجهٔ $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ می‌باشد. لذا در حالت کلی می‌توان آنرا بعنوان زیرگروهی از گروه جایگشتی متقارن S_n در نظر گرفت.

در ادامهٔ این زیربخش به حاصلضرب مرکزی گروهها خواهیم پرداخت. تعاریف هم‌ارز زیادی از حاصلضرب مرکزی گروهها داده شده است که اغلب آنها وابسته به تعاریف اضافی دیگری می‌باشد بعنوان مثال در کتاب سوزوکی [Su]، حاصلضرب مرکزی گروهها را حالت خاصی از حاصلضرب نیم‌مستقیم جزئی تعریف نموده است. ما برای خلاصه‌گویی و پرهیز از تعاریف اضافی دیگر، تعریف زیر را از کتاب دارن‌هوف [Do] انتخاب کرده‌ایم.

تعریف ۵.۲.۱ برای عدد طبیعی k، زیرگروههای $G_1, G_2, \ldots, G_k$ از گروه G را در نظر گیرید. هرگاه گروه G حاصلضربی از زیرگروههای $G_1, G_2, \ldots, G_k$ باشد (یعنی: $G = G_1 G_2 \cdots G_k$) و برای هر اندیس $i \neq j$ و عناصر نوعی $x \in G_i$ و $y \in G_j$ رابطهٔ $xy = yx$ برقرار باشد، آنگاه G را حاصلضرب مرکزی زیرگروههای $G_1, G_2, \ldots, G_k$ می‌نامیم و با نماد $G = G_1 \circ G_2 \circ \cdots \circ G_k$ نمایش می‌دهیم.

تبصره ۶.۲.۱ با توجه به تعریف ارائه شده در ۵.۲.۱ برای اندیسهای $i \neq j$، عناصر $\cap_{i=1}^{k} G_i$ همگی مرکزی هستند و هر کدام از زیرگروههای G_i در گروه G نرمال هستند.

ما می‌توانیم یک همریختی پوشا از حاصلضرب مستقیم $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k$ به روی حاصلضرب مرکزی $G = G_1 \circ G_2 \circ \cdots \circ G_k$ با ضابطهٔ $(g_1, g_2, \ldots, g_k) \mapsto g_1 g_2 \cdots g_k$ تعریف نماییم. بنابراین حاصلضرب مرکزی با گروه خارج قسمتی از حاصلضرب مستقیم گروهها یکریخت