دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد آمار

تعمیم‌های توزیع چوله t—نرمال و کاربرد آنها در مدل‌بندی داده‌های برخی فلزات سنگین وابسته به نفت در خلیج فارس

توسط

آمنه خردمندی

اساتید راهنما

دکتر محسن محمدزاده
دکتر ناهید سنجری فارسی‌پور

بهمن ۱۳۸۸

قدردانی

سپاس و ستایش معبود یگانه را که پرتو الطاف بی‌شمارش بر لحظه لحظهٔ زندگی‌ام ساطع و آشکار است. حمد و ثنا می‌گزارم او را که فکرت و اندیشه را در بستر روحم روان ساخت و بهره‌گیری از خوان گستردهٔ دانش اساتیدم را نصیب و روزی‌ام گردانید.

امتنان و سپاس می‌گزارم تلاشها، زحمات و راهنمایی‌های ظریف، ارزشمند و بی‌شائبهٔ استاد فرزانه و گرانمایه‌ام، جناب دکترمحسن محمدزاده را که با حمیت و جدیت، مرا به دقت، اندیشه، درک و تعمق وامی‌داشتند.

مریم شرفی

شهریور ۱۳۸۵

چکیده

برخی داده‌های نامتقارن را می‌توان با توزیع‌های چوله– متقارن مدل‌بندی نمود. در این میان توزیع چوله نرمال به گونه‌ای است که برخی ویژگی‌های آن مشابه توزیع نرمال است، اما این توزیع دارای محدودیت در ضرایب چولگی و کشیدگی است. برای مدل‌بندی داده‌هایی با دم‌های کلفت‌تر وچولگی زیاد، توزیع چوله t–نرمال می‌تواند جایگزین بهتری نسبت به توزیع چوله–نرمال باشد، زیرا این توزیع دارای بردهای وسیعتر چولگی و کشیدگی نسبت به توزیع چوله–نرمال است. از طرفی برخی از محققان برای انعطاف‌پذیرتر نمودن توزیع چوله–نرمال در مدل‌بندی داده‌های چوله، تعمیم‌هایی برای این توزیع ارائه داده‌اند. در این پایان نامه ضمن مرور خواص توزیع چوله–نرمال، ویژگی‌های توزیع چوله t–نرمال معرفی و با استفاده از ایده‌های محققان در تعمیم توزیع چوله–نرمال، هفت کلاس جدید به عنوان تعمیم‌های توزیع چوله t–نرمال ارائه شده است. آن‌گاه ضمن بررسی ویژگی‌های هر یک از تعمیم‌های ارائه شده نحوه ساخت آن‌ها طی قضایایی جداگانه ارائه گردید و از طریق شبیه‌سازی، درستی فرایند تولید داده‌ها مورد بررسی قرار گرفت. سپس با استفاده از توزیع‌های معرفی شده، داده‌های آلودگی فلزات سنگین نفت خام در تالاب شادگان مدل‌بندی و برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای مدل با روش‌های عددی محاسبه شدند. در انتها بحث و نتیجه‌گیری و پیشنهادات ارائه گردیده است.

واژه‌های کلیدی : پارامتر چولگی، توزیع چوله–نرمال، توزیع چوله t–نرمال، توزیع چوله t–نرمال تعمیم یافته

فهرست مندرجات

فصل ۱

توزیع چوله—نرمال

۱.۱ مقدمه

توزیع نرمال [۱] یکی از مهمترین توزیع‌های پیوسته در آمار است که به دلیل ویژگی های آن کاربردهای فراوانی دارد، اما در بعضی از مسائل کاربردی توزیع داده‌ها عدم تقارنی دارند که توزیع نرمال نمی‌تواند تمام خصوصیت آن‌ها را بیان نماید. برای مدل‌بندی این‌گونه داده‌ها می‌توان از توزیع‌های چوله استفاده نمود. آزالینی(۱۹۸۵) قضیه‌ای رابیان نمود که با استفاده از آن می‌توان توزیع‌های چوله متفاوت را توسط یک تابع چگالی و یک تابع توزیع متقارن حول صفر ساخت. وی با در نظر گرفتن توابع چگالی و توزیع نرمال استاندارد توزیع چوله—نرمال [۲] را تعریف نمود، که دارای پارامتری برای تنظیم چولگی است. توزیع چوله—نرمال که خواصی مشابه توزیع نرمال دارد، دارای محدودیت در ضرایب چولگی [۳]،

[۱] Normal

[۲] Skew-Normal

[۳] Skewness

کشیدگی[۴] و باریکی دم‌هاست. گامز و همکاران(۲۰۰۷) با جایگذاری تابع چگالی t–استیودنت با ν درجه آزادی و تابع توزیع نرمال استاندارد در قضیه آزالینی(۱۹۸۵) توزیع چوله t–نرمال[۵](StN) را معرفی کردند. این توزیع دارای دم‌های کلفت‌تر و بردهای وسیعتر چولگی و کشیدگی نسبت به توزیع چوله–نرمال است.

در فصل اول این پایان نامه روش‌های ساخت خانواده توزیع‌های چوله ارائه می‌گردد، سپس با توزیع چوله–نرمال و نحوه شبیه سازی از این توزیع، تابع توزیع، تابع مولد گشتاور و برخی خواص دیگر آن آشنا شده و برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای خانواده مکانی–مقیاسی توزیع چوله–نرمال ارائه می‌شود. در فصل دوم توزیع چوله t–نرمال تعریف می‌گردد، سپس نحوه شبیه سازی از این توزیع، تابع توزیع، گشتاورها، ماتریس اطلاع فیشر و برخی ویژگی‌های دیگر آن ارائه و مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین با استفاده از روش ماکسیمم درستنمایی به برآورد پارامترهای خانواده مکانی–مقیاسی توزیع چوله t–نرمال می‌پردازیم. در فصل سوم با ایده گرفتن از تعمیم‌های موجود برای توزیع چوله–نرمال، تعمیم‌های مشابه و جدیدی را برای توزیع چوله t–نرمال ارائه و مورد بررسی قرار داده‌ایم و به برآورد پارامترهای هر یک از توزیع‌ها پرداخته‌ایم. در فصل چهارم با استفاده از توزیع چوله t–نرمال و تعمیم‌های ارائه شده برای آن به مدلبندی داده‌های فلزات سنگین نفت شامل نیکل(Ni)، وانادیوم(V) و نسبت آنها ($\frac{Ni}{V}$) در رسوبات و گیاهان تالاب شادگان پرداخته‌ایم. در انتها به بحث و نتیجه‌گیری پرداخته شده است.

---

[۴] Kurtosis

[۵] Skew t-Normal

۲.۱ توزیع‌های چوله

در این بخش شیوه‌های ایجاد خانواده توزیع‌های چوله و برخی از ویژگی‌های آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. لم زیر نحوه ساخت یک توزیع چوله بر اساس توابع توزیع و چگالی متقارن را بیان می‌کند.

لم ۱ (آزالینی، ۲۰۰۵) با فرض اینکه $f_\circ$ یک تابع چگالی متقارن حول صفر، G یک تابع توزیع مطلقاً پیوسته[۶]، با تابع چگالی متقارن حول صفر و W یک تابع فرد باشد، آنگاه

$$f(y) = ۲f_\circ(y)G(W(y)). \qquad (۱.۲.۱)$$

یک تابع چگالی است.

برهان: با توجه به مثبت بودن تابع $f(y)$ کافی است نشان داده شود $\int_{-\infty}^{+\infty} ۲f_\circ(y)G(W(y)) = ۱$. برای این منظور فرض کنید $X \sim f_\circ$ و $Y \sim G'$ متغیرهای تصادفی مستقل‌اند. با توجه به مفروضات، $-Y \overset{\mathrm{d}}{=} Y$ و $-X \overset{\mathrm{d}}{=} X$ می‌باشند. بنابراین داریم:

$$W(X) \overset{d}{=} W(-X) \overset{d}{=} -W(X)$$
$$Y - W(X) \overset{d}{=} -Y - W(-X).$$

همچنین اگر $Z \equiv Y - W(X)$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} F_{-Z}(z) &= P(-Z \le z) \\ &= P(-Y + W(X) \le z) \\ &= P(Y - W(X) \le z) \\ &= F_Z(z) \end{aligned}$$

[۶] Absolutely Continuous

بنابراین متغیر تصادفی $Z \equiv Y - W(X)$ حول صفر متقارن می‌باشد در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= P(Y - W(X) \leq 0) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} P(Y - W(X) \leq 0 | X = x) f_0(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} G(W(x)) f_0(x) dx
\end{aligned}$$

نتایج زیر از لم ؟؟ حاصل می‌شوند.

نتیجه ۱.۲.۱ اگر $X \sim f_0$ و $Y \sim G'$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند، آنگاه متغیرتصادفی $Z \equiv X | Y < W(X)$ دارای تابع چگالی به فرم (؟؟) است.

برهان: با توجه به اینکه $P(Y \leq W(X)) = P(Y - W(X) \leq 0) = \frac{1}{2}$ داریم:

$$\begin{aligned}
P(Z \leq z) &= P(X \leq z | Y < W(X)) \\
&= \frac{P(X \leq z, Y < W(X))}{P(Y < W(X))} \\
&= 2P(X \leq z, Y < W(X)) \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq z, Y < W(X) | X = x) f_0(x) dx \\
&= 2\int_{-\infty}^{z} f_0(x) G(W(x)) dx \qquad (2.2.1)
\end{aligned}$$

بامشتق‌گیری از رابطه (؟؟) نسبت به z حکم اثبات می‌شود.

نتیجه ۲.۲.۱ با فرض آنکه $X \sim f_0$، $Y \sim G'$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند، آنگاه متغیرتصادفی

$$Z = \begin{cases} X & Y \leq W(X) \\ -X & Y > W(X) \end{cases}$$

دارای تابع چگالی به فرم (??) است.

برهان:

$$\begin{aligned}
P(Z \le z) &= P(X \le z, Y \le W(X)) + P(-X \le z, Y > W(X)) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P(X \le z, Y \le W(X)|X = x) f_۰(x) dx \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} P(-X \le z, Y > W(X)|X = x) f_۰(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{z} P(Y \le W(X)|X = x) f_۰(x) dx + \int_{-z}^{+\infty} P(Y > W(X)|X = x) f_۰(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{z} G(W(x)) f_۰(x) dx + \int_{-z}^{+\infty} [۱ - G(W(x))] f_۰(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{z} G(W(x)) f_۰(x) dx + \int_{-\infty}^{z} [۱ - G(W(-x))] f_۰(x) dx
\end{aligned}$$

با مشتق‌گیری از رابطه فوق نسبت به z حکم اثبات می‌شود.

نتیجه ۳.۲.۱ فرض کنید $Z \sim f$، $X \sim f_۰$ و $\tau(.)$ تابع زوج دلخواهی باشد، آنگاه $\tau(Z) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \tau(X)$.

برهان: چون τ تابعی زوج است، $\tau(X) = \tau(|X|)$ می‌باشد. بنابراین کافی است نشان دهیم $|Z| \stackrel{\mathrm{d}}{=} |X|$.

فرض کنید $g_{|X|}(t)$ و $g_{|Z|}(t)$ به ترتیب نشان دهنده تابع چگالی $|X|$ و $|Z|$ باشند، آنگاه

$$\begin{aligned}
g_{|X|}(t) &= f_۰(t) + f_۰(-t) \\
&= ۲ f_۰(t)
\end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned}
g_{|Z|}(t) &= f(t) + f(-t) \\
&= ۲ f_۰(t) G(W(t)) + ۲ f_۰(-t) G(W(-t)) \\
&= ۲ f_۰(t) G(W(t)) + ۲ f_۰(t) G(-W(t))
\end{aligned}$$

$$= \quad 2f_0(t)[G(W(t)) + G(-W(t))]$$

چون $G(x) + G(-x) = 1$، آنگاه

$$\begin{aligned} g_{|Z|}(t) &= 2f_0(t) \\ &= g_{|X|}(t). \end{aligned}$$

توابع متعددی را می‌توان جایگزین تابع $W(\cdot)$ کرد. آزالینی (۱۹۸۵)، تابع چگالی $f(y;\lambda) = 2f(y)G(\lambda y)$ را به ازای مقادیر حقیقی λ معرفی نمود. این خانواده از توزیع‌ها که حالت خاص $W(y) = \lambda y$ می‌باشند به ازای $\lambda = 0$ متقارن و به ازای مقادیر مختلف $\lambda \neq 0$ چوله هستند.
گامز و همکاران (۲۰۰۷) با جایگذاری تابع توزیع نرمال استاندارد و توابع چگالی مختلف در تابع $f(y;\lambda)$ کلاس توزیع‌های چوله—متقارن—نرمال [7] را ارائه کردند. در اینجا سه توزیع از این خانواده را ارائه و نمودار آن‌ها را به ازای مقادیر مختلف λ رسم نموده‌ایم.

تعریف ۱ متغیر تصادفی X دارای توزیع چوله لجستیک—نرمال [8] است، هرگاه تابع چگالی آن به صورت

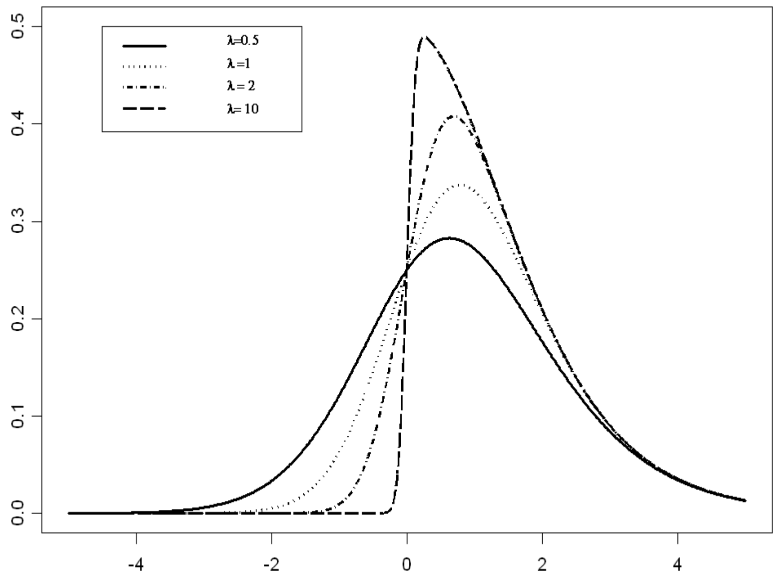
$$f_X(x;\lambda) = \frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\Phi(\lambda x), \qquad -\infty < x < \infty, \lambda \in R \tag{۳.۲.۱}$$

باشد، که در آن λ پارامتر چولگی است.
شکل ؟؟ تابع چگالی چوله لجستیک—نرمال را به ازای مقادیر مختلف λ نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود با افزایش λ از تقارن توزیع کاسته و به کشیدگی آن افزوده می‌شود.

---

[7] Skew-Symmetric-Normal

[8] Skew Logistic-Normal



شکل ۱.۲.۱: تابع چگالی چوله لجستیک–نرمال به ازای مقادیر مختلفλ

تعریف ۲ متغیر تصادفی X دارای توزیع چوله لاپلاس–نرمال[۹] است، هرگاه تابع چگالی آن به صورت

$$f_X(x;\lambda) = \frac{1}{2}e^{\frac{-|x|}{2}}\Phi(\lambda x), \qquad -\infty < x < \infty, \lambda \in R \tag{۴.۲.۱}$$

باشد، که در آن λ پارامتر چولگی است.

شکل ؟؟ تابع چگالی چوله لاپلاس–نرمال را به ازای مقادیر مختلف λ نشان می‌دهد.

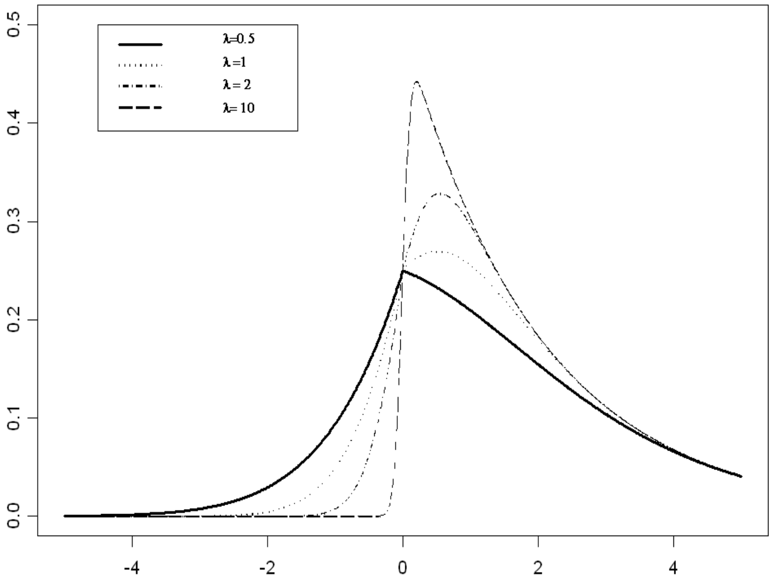
تعریف ۳ متغیر تصادفی X دارای توزیع چوله یکنواخت–نرمال[۱۰] است، هرگاه تابع چگالی آن به صورت

$$f_X(x;\lambda) = \frac{1}{h}\Phi(\lambda x) \qquad -h \leq x \leq h, \lambda \in R \tag{۵.۲.۱}$$

---

[۹] Skew Laplace-Normal

[۱۰] Skew Uniform-Normal



شکل ۱.۲.۲: تابع چگالی چوله لاپلاس—نرمال به ازای مقادیر مختلف λ

باشد، که در آن λ پارامتر چولگی است.

شکل ؟؟ تابع چگالی چوله یکنواخت—نرمال را به ازای مقادیر مختلف λ نشان می‌دهد.

وانگ و همکاران (۲۰۰۴) خانواده توزیع‌های چوله—متقارن[۱۱] ساخته شده توسط یک تابع چگالی متقارن و یک تابع چوله ساز[۱۲] را معرفی کردند. در اینجا پس از تعریف تابع چوله—ساز به معرفی این خانواده از توزیع‌ها می‌پردازیم.

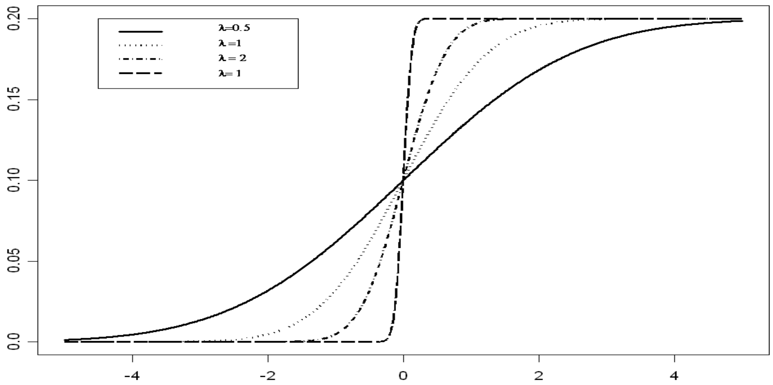
تعریف ۴ (تابع چوله ساز): تابع $\pi : R \to [0, 1]$، تابع چوله‌ساز نامیده می‌شود، هرگاه

$$\pi(x) + \pi(-x) = 1 \qquad , x \in R.$$

توجه شود که تابع $\pi(.)$ الزاماً یک تابع توزیع نمی‌باشد.

[۱۱] Skew-Symmetric distribution

[۱۲] Skewing Function



شکل ۱.۲.۳: تابع چگالی چوله یکنواخت—نرمال به ازای مقادیر مختلفλ

تعریف ۵ (وانگ و همکاران، ۲۰۰۴) فرض کنید f یک تابع چگالی متقارن حول صفر و π یک تابع چوله‌ساز باشند. متغیر تصادفی X را دارای توزیع چوله—متقارن گویند، هرگاه تابع چگالی آن به صورت $2f(x)\pi(x)$ باشد.

توزیع چوله—متقارن به صورت $SS(f,\pi)$ نمایش داده می‌شود. برای اثبات تابع چگالی بودن $2f(x)\pi(x)$، با توجه به مثبت بودن آن کافی است نشان دهیم $\int_{-\infty}^{+\infty} 2f(x)\pi(x) = 1$. برای این منظور داریم:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\pi(x)dx &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\pi(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\pi(x)dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} f(x)(1-\pi(x))dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\pi(x)dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} f(x)dx \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

اگر $\pi(x) = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه تابع چگالی توزیع $SS(f,\pi)$ به f تبدیل شده و متقارن است، اما به ازای هر تابع غیر ثابت π تابع چگالی این توزیع چوله است.

در قضایای زیر دو خاصیت توزیع‌های چوله—متقارن ارائه شده است، که در ادامه مورد استفاده قرار می‌گیرد.

قضیه ۱.۲.۱ (خاصیت ناوردایی توزیع توابع زوج) اگر $Z \sim SS(f, \pi)$ باشد، توزیع هر تابع زوج از Z، مانند $\tau(Z)$، به تابع چوله‌ساز π بستگی ندارد.

وانگ و همکاران (۲۰۰۴)، اثبات قضیه را براساس تابع مشخصه متغیر تصادفی $\tau(Z)$ ارائه کردند. ما در اینجا برهان دیگری برای این قضیه بیان می‌کنیم.

برهان: فرض کنید $g_{|Z|}(t)$ تابع چگالی متغیر تصادفی $|Z|$ باشد. بنابر زوج بودن $\tau(\cdot)$ داریم $\tau(Z) = \tau(|Z|)$. بنابراین کافی است نشان دهیم $g_{|Z|}(t)$ به تابع چوله ساز π بستگی ندارد. برای این منظور داریم:

$$
\begin{aligned}
g_{|Z|}(t) &= 2f(t)\pi(t) + 2f(-t)\pi(-t) \\
&= 2f(t)(\pi(t) + \pi(-t)) \\
&= 2f(t)I_{(t>0)}
\end{aligned}
$$

قضیه ۲.۲.۱ فرض کنید $f_1(x)$ و $f_2(x)$ توابع چگالی متقارن حول صفر و $\pi(x)$ یک تابع چوله ساز باشد، در اینصورت رابطه $\rho(f_1, f_2) = \rho(2\pi f_1, 2\pi f_2)$ برای فواصل زیر برقرار است:

فاصله جفری
$$\rho_1(f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(x) - f_2(x)] \ln(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}) dx;$$

فاصله باتاچاریا
$$\rho_2(f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{f_1(x) f_2(x)} dx;$$

فاصله هارمونیک
$$\rho_3(f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{f_1(x)} + \frac{1}{f_2(x)}} dx;$$

$$\rho_4(f_1,f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\ln(\frac{2f_1(x)}{f_1(x)+f_2(x)})dx;$$ دیورژانس لی و وانگ

$$\rho_5(f_1,f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\ln(\frac{f_1(x)}{f_2(x)})dx;$$ دیورژانس کولبک—لیبلر

برهان: برای اثبات فاصله دیورژانس کولبک—لیبلر به پایان نامه یادگاری (۱۳۸٦) مراجعه شود. برهان به طور مشابه برای بقیه فواصل امکان پذیر است.

وانگ و همکاران (۲۰۰۴) روشی برای ساخت متغیرهای تصادفی از خانواده توزیع‌های چوله—متقارن بیان کردند، که در اینجا اثبات آن در قالب قضیه زیر بیان می‌گردد.

قضیه ۳.۲.۱ فرض کنید متغیرهای تصادفی $Y \sim f(y)$ و $U \sim U(0,1)$ از هم مستقل باشند، آنگاه

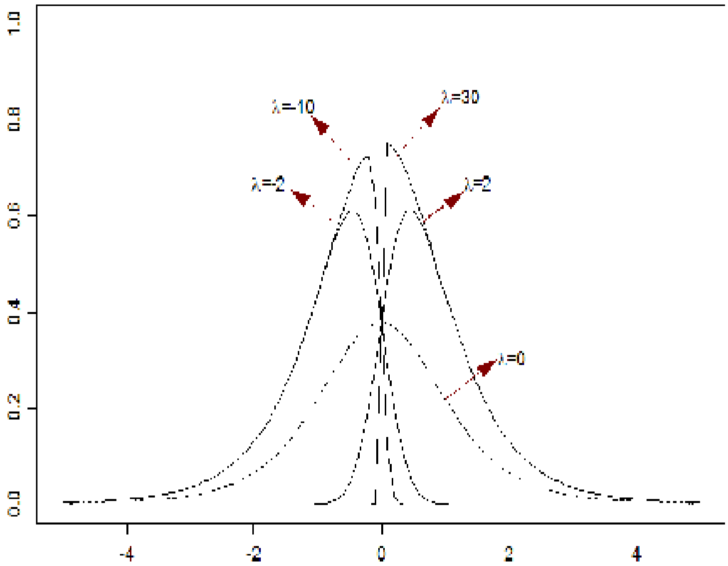
$$X = \begin{cases} Y & U \leq \pi(Y) \\ -Y & U > \pi(Y) \end{cases}$$

دارای توزیع $SS(f,\pi)$ می‌باشد.

برهان:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= P(U \leq \pi(Y)|Y=x)f(x) + P(U > \pi(Y)|-Y=x)f(-x) \\ &= P(U \leq \pi(x))f(x) + P(U > \pi(-x))f(-x) \\ &= \pi(x)f(x) + [1-\pi(-x)]f(x) \qquad ;\pi(x)+\pi(-x)=1 \\ &= 2\pi(x)f(x). \end{aligned}$$

وانگ و همکاران (۲۰۰۴) نشان دادند کلاس توزیع‌های چوله—متقارن مشابه کلاس توزیع‌های چوله تعریف شده توسط آزالینی (۱۹۸۵) است.



شکل ۱.۳.۴: تابع چگالی چوله—نرمال به ازای مقادیر مختلف پارامتر چولگی λ

۱.۳ توزیع چوله—نرمال یک متغیره

توزیع چوله—نرمال که اولین بار توسط آزالینی (۱۹۸۵) تعریف گردید با در نظر گرفتن توابع توزیع و چگالی نرمال استاندارد در لم ؟؟ و $W(X) = \lambda X$ بدست می‌آید.

تعریف ٦ (آزالینی، ۱۹۸۵) متغیر تصادفی Z دارای توزیع چوله نرمال است، هرگاه تابع چگالی آن به صورت

$$f_Z(z;\lambda) = ۲\phi(z)\Phi(\lambda z), \qquad -\infty < z < \infty, \lambda \in R$$

باشد، که در آن ϕ و Φ به ترتیب توابع چگالی و توزیع نرمال استاندارد و λ پارامتر چولگی (شکل) [۱۳] است. این توزیع را به صورت $Z \sim SN(\lambda)$ نمایش می‌دهیم.

[۱۳] Shape parameter

شکل ؟؟ تابع چگالی چوله—نرمال را به ازای مقادیر مختلف λ نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود این توزیع به ازای مقادیر مثبت λ چوله به راست، به ازای مقادیر منفی λ چوله به چپ و به ازای $\lambda = 0$ متقارن است. همچنین با افزایش $|\lambda|$ میزان چولگی افزایش میابد.

۱.۳.۱ ویژگی‌های توزیع چوله—نرمال یک متغیره

توزیع چوله—نرمال و ویژگی‌های آن توسط آزالینی(۱۹۸۶)، آزالینی و دالاواله(۱۹۹۶)، برانکو و دی(۲۰۰۱)، آزالینی و چیوگنا(۲۰۰۴) مورد بررسی قرار گرفته شده است. در این بخش برخی از ویژگی‌های این توزیع مرور می‌شود.

فرض کنید متغیر تصادفی $Z \sim SN(\lambda)$ باشد. در اینصورت:

الف: اگر $\lambda = 0$ آنگاه $Z \sim N(0,1)$.

ب: $-Z \sim SN(-\lambda)$.

ج: اگرمتغیر تصادفی $X \sim N(0,1)$ آنگاه $|Z|$ و $|X|$ هم توزیع با توزیع نیم—نرمال[۱۴] هستند.

د: $Z^2 \sim \chi^2_1$.

ه: $\lim_{\lambda\to+\infty} f_Z(z;\lambda) = 2\phi(z)I_{(x>0)}$

و: $\lim_{\lambda\to-\infty} f_Z(z;\lambda) = 2\phi(z)I_{(x<0)}$

ز: تابع توزیع چوله نرمال به ازای یک λ ثابت قویاً تک مدی[۱۵] است.(آزالینی، ۱۹۸۵)

ح: اگر U و V دو متغیر تصادفی مستقل از توزیع نرمال استاندارد، $X_1 = \min(U,V)$ و $X_2 = \max(U,V)$ باشند، آنگاه $X_1 \sim SN(-1)$، $X_2 \sim SN(1)$ و $|X_2| \overset{d}{=} |X_1|$ می‌باشند.

[۱۴] Half Normal Distribution

[۱۵] Strongly Unimodal

برهان: اثبات بند الف با جایگذاری $\lambda = 0$ بدیهی است. برای اثبات بند ب داریم:

$$\begin{aligned} f_{-Z}(z) &= f_Z(-z) \\ &= 2\phi(-z)\Phi(\lambda(-z)) \\ &= 2\phi(z)\Phi((-\lambda)z). \end{aligned}$$

برای اثبات بند ج، با توجه به قضیه ؟؟ $|X|$ و $|Z|$ هم توزیع می‌باشند. بنابراین کافی است نشان دهیم $Y = |X|$ دارای توزیع نیم—نرمال است.

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(y) + f_X(-y) \\ &= 2\phi(y)I_{(Y \geq 0)}. \end{aligned}$$

اثبات بند د با توجه به نتیجه ؟؟ واضح است. برای اثبات بند ه ، چون Φ تابعی پیوسته از λ است داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \to +\infty} \Phi(\lambda z) &= \Phi(\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda z) \\ &= \begin{cases} 1 & z > 0 \\ \frac{1}{2} & z = 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \to +\infty} f_Z(z;\lambda) &= \lim_{\lambda \to +\infty} 2\phi(z)\Phi(\lambda z) \\ &= 2\phi(z) \lim_{\lambda \to +\infty} \Phi(\lambda z) \\ &= 2\phi(z)I(z > 0) \end{aligned}$$

برای اثبات بند و به طور مشابه داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to-\infty}\Phi(\lambda z) &= \Phi(\lim_{\lambda\to-\infty}\lambda z)\\ &= \begin{cases} ۰ & z>۰\\ \frac{۱}{۲} & z=۰\\ ۱ & z<۰\end{cases}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to-\infty} f_Z(z;\lambda) &= \lim_{\lambda\to-\infty} ۲\phi(z)\Phi(\lambda z)\\ &= \phi(z)\lim_{\lambda\to-\infty}\Phi(\lambda z)\\ &= ۲\phi(z)I(z<۰).\end{aligned}$$

تعریف ۱.۳.۱ تابع توزیع $F(x)$ قویاً تک مدی نامیده می شود هرگاه حاصل پیچش آن با هر تابع توزیع تک مدی دیگر تابعی تک مدی باشد.

کارلین (۱۹٦۸) نشان داد که تابع توزیع ناتباهیده F قویاً تک مدی می‌باشد اگر و تنها اگر لگاریتم تابع چگالی متناظر آن در هر فاصله (a,b)، بطوریکه $\int_a^b f(x)dx = ۱$ ، تابعی مقعر[۱٦] باشد یا به عبارت دیگر مشتق دوم لگاریتم تابع چگالی آن به ازای تمام مقادیر دامنه‌اش منفی باشد.

بنابراین برای اثبات بند ز داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^۲}{\partial z^۲}\ln f_Z(z,\lambda) &= \frac{\partial^۲}{\partial z^۲}\{\ln ۲ + \ln\phi(z) + \ln(\phi(\lambda z))\}\\ &= \frac{\partial^۲}{\partial z^۲}\ln\phi(z) + \frac{\partial^۲}{\partial z^۲}\ln\Phi(\lambda z)\end{aligned}$$

[۱٦] Concave Function

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial z}\{\frac{-z\phi(z)}{\phi(z)}\} + \frac{\partial}{\partial z}\{\frac{\lambda\phi(\lambda z)}{\Phi(\lambda z)}\} \\
&= -1 + \lambda\{\frac{-z\lambda^2\phi(\lambda z)\Phi(\lambda z)}{\Phi^2(\lambda z)} - \frac{\lambda\phi^2(\lambda z)}{\Phi^2(\lambda z)}\} \\
&= -1 + \frac{-\lambda^2\phi(\lambda z)}{\Phi(\lambda z)}\{\frac{\phi(\lambda z)}{\Phi(\lambda z)} + \lambda z\}
\end{aligned}
$$

برای اثبات منفی بودن عبارت فوق کافی است نشان دهیم که عبارت $\{\frac{\phi(\lambda z)}{\Phi(\lambda z)} + \lambda z\}$ مثبت است. چون توابع چگالی و توزیع نرمال استاندارد همواره مثبت‌اند، اگر $\lambda z \geq 0$ باشد آنگاه $\{\frac{\phi(\lambda z)}{\Phi(\lambda z)} + \lambda z\} \geq 0$ است. حال اگر $\lambda z < 0$ باشد، با تغییر متغیر $t = -\lambda z$ داریم:

$$
\begin{aligned}
\phi(\lambda z) &= \phi(-\lambda z) = \phi(t) \\
\Phi(\lambda z) &= 1 - \Phi(-\lambda z) = 1 - \Phi(t) \\
\frac{\phi(\lambda z)}{\Phi(\lambda z)} &+ \lambda z = \frac{\phi(t)}{1 - \Phi(t)} - t > 0
\end{aligned}
$$

زیرا بنابر نامساوی میل[17] (شوراک، ۲۰۰۷) داریم:

$$
\frac{t}{t^2+1}\phi(t) \leq 1 - \Phi(t) \leq \frac{1}{t}\phi(t)
$$

یا به عبارت دیگر

$$
t \leq \frac{\phi(t)}{1 - \Phi(t)}. \qquad (۱.۳.۶)
$$

برای اثبات بند ح فرض کنید f_{X_1} و f_{X_2} به ترتیب نشان‌دهنده تابع چگالی X_1 و X_2 باشند، آنگاه با توجه به توابع چگالی بزرگترین و کوچکترین آماره ترتیبی در یک نمونه تصادفی دو تایی داریم:

$$
f_{X_1}(x_1) = 2\phi(x_1)(1 - \Phi(x_1))
$$

[17] Mill's Inequality