دانشگاه تبریز
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

قضایای همگرایی برای نقاط ثابت توابع غیر انبساطی

استاد راهنما

دکتر حمید واعظی

استاد مشاور

دکتر شهرام سعیدی

پژوهشگر

حسین پیری

۱۳۸۹

به پاس قدردانی از عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان

این مجموعه را به پدر، مادر، برادر و خواهرانم تقدیم می کنم

بسم الله الرّحمن الرّحیم

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند، شمارگران شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حقّ او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشه تیزگام در راه شناسایی او لنگ است و سر فکرت ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفت‌های او تعریف ناشدنی است و به وصف در نیامدنی، در وقت ناگنجیدنی و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، به رحمتش بادها را بپراکنید و با خرسنگ‌ها لرزه زمین را در مهار کشید.

گواهی می‌دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی‌همتاست. گواهی از روی اعتقاد و ایمان، بی آمیغ برآمده از امتحان و گواهی می‌دهم که محمّد (ص) بنده او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، با نشانه‌هایی پدیدار و قرآنی نبشته در علم پروردگار که نوری است درخشان، چراغی است فروزان و دستورهایش روشن و عیان. تا گرد دودلی از دلها بزداید و با حجّت و دلیل ملزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می‌بینم از خلقت تو و چه خرد است بزرگی آن در کنار قدرت تو و چه با عظمت است آنچه می‌بینم از ملکوت تو و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان و چه اندک است در کنار نعمت‌های آن جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنمایی‌های تو ناشناخته نیست و از کفایت‌های تو نه.

از فرمایشات حضرت علی (ع)

سپاس گزاری...

سپاس خداوند حکیم را که با لطاف بی کران خود، آدمی را با زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می دانم از زحمات تمامی اساتید دانشکدهٔ علوم ریاضی مخصوصاً استاد راهنمای مقطع کارشناسی ارشد، جناب آقای دکتر محمد حسن فاروقی، استاد راهنمای مقطع دکتری، جناب آقای دکتر حمید واعظی و استاد بسیار ارجمند، جناب آقای دکتر اصغر رنجبری صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون همکاری های ارزنده عزیزان این مجموعه به انجام نمی رسید.

از جناب آقای دکتر سید منصور واعظ پور و جناب آقای دکتر شهرام رضاپور که زحمت داوری این پایان نامه را تقبل نمودند تشکر می نمایم.

همچنین لازم می دانم که از تمامی دوستان دوران تحصیلات دانشگاه مخصوصا آقایان، دکتر جعفر اعظمی، دکتر علی حاجی بدلی، دکتر رمضان ضرغامی و دکتر مرتضی فغفوری که در طی این سالها همراه من بودند و با محبت های فراوان شان سال های زیبا را برای من ساختند، کمال قدردانی را داشته باشم.

در پایان، بوسه می زنم بر دستان خداوند مهر و مهربانی، مادر عزیزم و تشکر می کنم از خانواده محترم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

حسین پیری
اسفند ۱۳۸۹

نام خانوادگی:پیری نام: حسین

قضایای همگرایی برای نقاط ثابت توابع غیر انبساطی

استاد راهنما: دکتر حمید واعظی استاد مشاور: دکتر شهرام سعیدی

مقطع تحصیلی: دکتری رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: تبریز دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: زمستان ۱۳۸۹ تعداد صفحه: ۹۹

کلیدواژه‌ها: میانگین، نیم گروه‌های میانگین پذیر، نقاط ثابت و فرآیندهای تکراری.

چکیده
در این رساله قضیهٔ ثابت شده توسط مارینو و زو برای تابع غیر انبساطی را با یک فرض کمتر و با جایگذاری عملگر غیر خطی، غیر کراندار، $\delta-$ اکیداً افزاینده و λ اکیداً انقباض نمای F با شرط ۱ $> \delta+\lambda$ به جای عملگر خطی، کراندار و قویاً مثبت A با ثابت $\overline{\gamma}$، برای نیم گروه میانگین پذیر از توابع غیر انبساطی بیان و ثابت می‌کنیم. به علاوه قضیهٔ بیان شده توسط کین و همکارانش برای خانوادهٔ شمارش پذیر نامتناهی از توابع غیر انبساطی را به نیم‌گروه میانگین پذیر از توابع غیر انبساطی و خانوادهٔ شمارش پذیر نامتناهی از توابع غیر انبساطی توسیع می‌دهیم. نشان می‌دهیم که قضیه کین و همکارانش براحتی از این قضیه (توسیع داده شده) نتیجه می‌شود.

فهرست مطالب

مقدمه

مبحث فرآیندهای تکراری برای نقاط ثابت توابع غیر انبساطی یکی از مباحث مهم و جالب آنالیز تابعی غیرخطی است. نویسندگان متعددی در این زمینه بحث کرده و نتایج مهم و جالبی را بدست آورده‌اند. یافتن یك نقطه در اشترك اعضای یك خانواده از مجموعه‌های حاوی نقاط ثابت توابع غیر انبساطی مسئله‌ای است که اغلب در زمینه‌هاي مختلف از علوم ریاضی و مهندسی با آن مواجه می‌شویم. یافتن یك جواب برای مسئله می‌نیمم سازی یك تابع درجه دوم روی نقاط ثابت نگاشت‌های غیرانبساطی در عمل دارای اهمیت زیادی از جمله در تقریب سیگنال‌ها است. از سوی دیگر مسائل بسیاری در علوم کاربردی مانند حل نامساوی‌های تغییراتی را می‌توان به یافتن یك نقطهٔ ثابت در اشتراک نقاط ثابت خانواده‌ای از توابع غیر انبساطی کاهش داد.

این رساله مشتمل بر سه فصل می‌باشد. در بخش نخست فصل اول مختصری از تاریخچهٔ فرآیندهای تکراری را بیان می‌کنیم. بخش دوم فصل اول مروری است بر تعاریف، لم‌ها و قضایای بیان شده در منابع مختلف و همچنین در این بخش لم مربوط به نگاشت $\delta-$ قویاً افزاینده و $\lambda-$ اکیداً انقباض نما، که در اثبات قضیهٔ ۲.۱.۳ به طور مکرر از آن استفاده شده است، را بیان و ثابت می‌کنیم. در بخش سوم این فصل، تعاریف و لم‌ها و قضایای مربوط به توابع غیر انبساطی و ازجمله نتایج مشهور براک [۱] و تاکاهاشی و شیوجی [۲] در مورد توابع غیر انبساطی را بیان می‌کنیم. در بخش چهارم این فصل، تعاریف و لم‌ها و قضایای مربوط به نیم گروه‌های میانگین پذیر را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در بخش اول فصل دوم، برخی از فرآیندهای

---
[۱] Bruck
[۲] Shioji

تکراری که برای تقریب نقاط ثابت توابع غیر انبساطی بکار رفته‌اند و کاربردهایی در نامساویهای وردشی و شرط بهینه برای مینیمم سازی یک تابع درجهٔ دوم روی نقاط ثابت نگاشت‌های غیر انبساطی دارند، را بیان می‌کنیم. در بخش دوم این فصل، فرآیندهایی که برای تقریب نقاط ثابت نیم گروه‌های میانگین پذیر از توابع غیر انبساطی بکار رفته‌اند را بیان می‌کنیم. در بخش اول فصل سوم با ایده گرفتن از قضیه‌های ۱.۱.۲، ۲.۱.۲، ۴.۱.۲، ۶.۱.۲، ۴.۲.۲، ۶.۲.۲ و ۷.۲.۲ قضیهٔ ۲.۱.۳ را را برای نیم گروه میانگین پذیر از توابع غیر انبساطی ثابت کرده‌ایم که در این قضیه بجای عملگر خطی، کراندار و قویاً مثبت A با ثابت $\overline{\gamma}$ که در قضیه‌های ۴.۱.۲، ۶.۱.۲، ۴.۲.۲، ۶.۲.۲ و ۷.۲.۲ به کار رفته از عملگر غیر خطی و غیر کراندار $\delta-$ اکیداً افزاینده و λ اکیداً انقباض نمای F با شرط $\delta + \lambda > 1$ را بکار برده‌ایم و ثابت کرده‌ایم که در حالتی که $\frac{1}{2} > \overline{\gamma}$ نگاشت A، $\overline{\gamma}-$ قویاً افزاینده و $\frac{1}{2}-$ اکیداً انقباض‌نما است و همچنین با ایده گرفتن از قضیه‌های ۷.۱.۲، ۸.۱.۲، ۴.۲.۲، ۶.۲.۲ و ۸.۲.۲ قضیه ۵.۱.۳ را برای نیم گروه میانگین پذیر از توابع غیر انبساطی ثابت کرده‌ایم که قضیهٔ ۷.۱.۲ از مرجع [۹] و قضیهٔ ۸.۱.۲ از مرجع [۲۰] براحتی از قضیهٔ ۵.۱.۳ نتیجه می‌شوند. در بخش دوم این فصل کاربردهایی از میانگین‌ها را مورد بررسی قرار داده‌ایم. از این رساله دو مقالهٔ زیر استخراج شده است.

1. H. Piri and H. Vaezi, Strong convergence of a generalized iterative method for semigroup of nonexpansive mappings in Hilbert spaces, Fixed Point Theory and Applications (2010), Art. ID 907275, 1-16.

2. H. Piri and H. Vaezi, An iterative method for amenable semigroup and infinite family of non expansive mappings, To appear in Bulletin of the Iranian Mathematical Society.

فصل ۱
مفاهیم مقدماتی

۱.۱ تاریخچه و پیشینهٔ پژوهش

فرض کنید C زیر مجموعهٔ غیر خالی، بسته و محدب از فضای هیلبرت حقیقی H بوده و $T: C \to C$ نگاشت غیر انبساطی باشد به عبارت دیگر

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|, \qquad \forall x, y \in C.$$

قرار می‌دهیم $Fix(T) = \{x \in C : Tx = x\}$. فرآیندهای تکراری معمولاً برای تقریب نقاط ثابت توابع غیر انبساطی بکار می‌روند. بعضی از این فرآیندها برای تقریب نقاط ثابت خانواده‌ای از توابع غیر انبساطی به کار می‌روند که این نقاط ثابت همزمان جواب چند نامساوی وردشی [۱] و چند مسئلهٔ موازنه‌ای [۲] است . نخستین فرآیند

[۱] Variational inequality
[۲] equilibrium problem

تکراری در سال ۱۹۶۷ توسط هالپرن [3] به صورت

$$x_{n+1} = \alpha_n x_0 + (1 - \alpha_n) T x_n, \qquad n \geq 0. \qquad (1.1)$$

تعریف شد که در آن $x_0 \in C$ و دنبالهٔ $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ عضو $[0, 1]$ است. هالپرن [۶] ثابت کرد که اگر دنبالهٔ $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ در شرایط

$(C_1$ $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ و

$(C_2$ $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$

صدق کند، آنگاه دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ که توسط (۱.۱) تولید شده است در فضای هیلبرت حقیقی همگرای قوی به $x^* \in Fix(T)$ است. در سال ۱۹۷۷ لیونز [4] [۱۰] نشان داد که اگر دنبالهٔ $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ در شرایط (C_1)، (C_2) و شرط

$(C_3$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_n^2} = 0$

صدق کند، آنگاه دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ که توسط (۱.۱) تولید شده است در فضای باناخ حقیقی همگرای قوی به $x^* \in Fix(T)$ است. به وضوح دنبالهٔ $\{\frac{1}{n+1}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ در شرایطی که هالپرن و لیونز فرض کردند صدق می‌کند. در سال ۱۹۹۲ ویتمن [5] [۳۳] ثابت کرد اگر دنبالهٔ $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ در شرایط (C_1)، (C_2) و شرط

[3] Halpern
[4] Lions
[5] Wittmann

$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ $(C_4$

صدق کند، آنگاه دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ که توسط (۱.۱) تولید شده است در فضای باناخ حقیقی همگرای قوی به $x^* \in Fix(T)$ است. بالاخره در سال ۲۰۰۲ زو [۶] [۳۶] بجای شرط (C_3) ویا شرط (C_4)، شرط

$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = 1$ $(C_5$

را پیشنهاد داد و ثابت کرد اگر دنبالهٔ $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ در شرایط (C_1)، (C_2) و شرط (C_5) صدق کند، آنگاه دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ که توسط (۱.۱) تولید شده است در فضای باناخ حقیقی یکنواخت هموار همگرای قوی به $x^* \in Fix(T)$. است همچنین زو ثابت کرد که شرایط (C_1) و (C_2) که هالپرن فرض کرده بود برای همگرایی دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در فضای باناخ حقیقی لازم است ولی معلوم نیست این شرایط برای همگرایی دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در این فضا کافی هستند یا نه. برای بررسی این موضوع دنباله‌های مختلفی تعریف شده‌اند (به عنوان مثال مراجع [۴، ۹، ۱۴، ۱۵، ۲۸، ۲۹، ۳۵، ۳۸، ۳۹] را ببینید.) هرچند این مسئله که آیا شرایط (C_1) و (C_2) برای همگرایی دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در فضای بانخ حقیقی کافی است یا نه، هنوز به عنوان مسئلهٔ باز مطرح است. در سال۲۰۰۳ زو [۳۴] کار ویتمن را به صورت زیر در فضای هیلبرت تعمیم داد.

[۶] Xu

فرض کنید $\{T_۱, T_۲, \cdots, T_n\}$ خانواده‌ای از نگاشتهای غیر انبساطی از C به توی C باشند، A نگاشت خطی، کراندار و قویاً مثبت با ثابت $\overline{\gamma}$ باشد و دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ توسط $x_{n+۱} = \alpha_{n+۱}u + (I - \alpha_{n+۱}A)T_{n+۱}x_n$ تولید شود که در آن $T_n = T_{n \, mod \, N}$.
اگر دنبالهٔ $\{\alpha_n\}_{n=۱}^{\infty} \subset [۰, ۱]$ در شرایط $(C_۱)$، $(C_۲)$ و $(C_۴)$ یا

$(C_۶$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+N}} = ۱$،

صدق کند، به علاوه

$$\bigcap_{i=۱}^{N} Fix(T_i) = Fix(T_۱T_۲\cdots T_N) = Fix(T_NT_۱...T_{N-۱})$$
$$= \cdots = Fix(T_۲T_۳\cdots T_NT_۱),$$

آنگاه $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ همگرای قوی به $x^* \in Fix(T)$ است.

در سال ۲۰۰۰ مودافی [۷] [۱۴] روش تقریب زیر، که به روش تقریب چسبانی [۸] مرسوم است را برای تقریب نقاط ثابت تابع غیر انبساطی معرفی کرد.

فرض کنید $f : C \to C$ نگاشت انقباضی با ثابت α باشد و دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ توسط

$$x_{n+۱} = \frac{\alpha_n}{۱+\alpha_n} f(x_n) + (I - \frac{\alpha_n}{۱+\alpha_n})Tx_n \qquad (۲.۱)$$

تعریف شود. مودافی ثابت کرد اگر دنبالهٔ $\{\alpha_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در شرایط $(C_۱)$، $(C_۲)$ و شرط

[۷] Moudafi
[۸] Viscosity Approximation Method

$(C_7$ $\lim_{n\to\infty}|\frac{1}{\alpha_n}-\frac{1}{\alpha_{n+1}}|=0$،

صدق کند، آنگاه دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ که توسط (۲.۱) تولید شده است در فضای هیلبرت حقیقی همگرای قوی به $x^*\in Fix(T)$ است. در سال ۲۰۰۶ مارینو [۹] و زو [۱۳] با استفاده از روش تقریب چسبانی فرآیند تکراری

$$x_{n+1}=\alpha_n\gamma f(x_n)+(I-\alpha_n A)Tx_n$$

را برای تقریب نقاط ثابت توابع غیر انبساطی معرفی کردند و ثابت کردند اگر $\gamma\in(0,\frac{\overline{\gamma}}{\alpha})$ و دنبالهٔ $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ در شرایط (C_1)، (C_2) و (C_4) ویا (C_5) صدق کند، آنگاه دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در فضای هیلبرت حقیقی همگرای قوی به $x^*\in Fix(T)$ است.

در سال ۲۰۰۵ کیم [۱۰] و زو [۹] ثابت کردند اگر دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ توسط

$$\begin{cases} y_n=\beta_n f(z_n)+(1-\beta_n)Tx_n, & \\ x_{n+1}=\alpha_n x_n+(1-\alpha_n)y_n, & n\geq 1, \end{cases}$$

تولید شود و دنبالهٔ $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ در شرط

$(C_8$ $0<\liminf_{n\to\infty}\alpha_n\leq\limsup_{n\to\infty}\alpha_n<1$

و دنبالهٔ $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ در شرایط (C_1) و (C_2) صدق کند ، آنگاه دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در فضای هیلبرت حقیقی همگرای قوی به $x^*\in Fix(T)$ است. با الهام گرفتن از کارهای

[۹] Marino
[۱۰] Kim

هالپرن [۶]، مارینو و زو [۱۳] و مودافی [۱۴]، کین [۱۱] و همکارانش [۲۰] ثابت کردند که اگر $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از نگاشت‌های غیر انبساطی بر H باشد به طوری که $\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{\infty} Fix(T_i) \neq \emptyset$، دنبالهٔ $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ در شرط (C_6)، دنبالهٔ $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ در شرایط (C_1) و (C_2) و دنبالهٔ $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ در شرط

$(C_9$ $\lim_{n\to\infty} |\gamma_{n+1} - \gamma_n| = 0$،

صدق کند و دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ توسط

$$\begin{cases} z_n = \gamma_n x_n + (1-\gamma_n) W_n x_n, \\ y_n = \beta_n \gamma f(z_n) + (I - \beta_n A) z_n, \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) y_n, \qquad n \geq 1, \end{cases}$$

تولید شود که در آن W_n، $W-$ نگاشت تولید شده توسط T_1، T_2، $\cdots$، T_n است، آنگاه دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در فضای هیلبرت حقیقی همگرای قوی به $x^* \in \mathcal{F}$ است. لائو و همکارانش [۱۲] [۱۱] در سال ۲۰۰۸ کارهای هالپرن را به دو صورت زیر برای نیم گروه میانگین پذیر از توابع غیر انبساطی مورد مطالعه قرار دادند.

فرض کنید C زیر مجموعهٔ غیر خالی، فشرده و محدب فضای باناخ اکیداً محدب و هموار E باشد، S نیم گروه برگشت پذیر چپ و $\varphi = \{T_t : t \in S\}$ نیم گروه غیر انبساطی بر C باشد به طوری‌که $Fix(\varphi) = \bigcap_{t\in S} Fix(T) \neq \emptyset$، X زیر فضایی از $B(S)$ که $\varphi-$ پایا است، $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از میانگین‌های قویاً منظم چپ

[۱۱] Qini
[۱۲] Lau

بر X باشد و دنبالهٔ $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ در شرایط (C_1) و (C_2) صدق کند. اگر $x_1 \in C$ و دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ توسط

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)T_{\mu_n}x_n, \qquad n \geq 1,$$

تولید شود، آنگاه $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرای قوی به $x^* \in Fix(\varphi)$ است.

فرض کنید C زیر مجموعهٔ غیر خالی، فشرده و محدب فضای باناخ هموار E باشد، S نیم گروه برگشت پذیر چپ و $\varphi = \{T_t : t \in S\}$ نیم گروه غیر انبساطی بر C باشد به طوری که $Fix(\varphi) = \bigcap_{t\in S} Fix(T) \neq \emptyset$، X زیر فضایی از $B(S)$ که $\varphi-$ پایا است، $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از میانگین‌های مجانباً پایای چپ بر X باشد و $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0,1)$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که در شرط (C_1) صدق کند. اگر $x_1 \in C$ و دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ توسط

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)T_{\mu_n}x_n, \qquad n \geq 1,$$

تعریف شود، آنگاه $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرای قوی به $x^* \in Fix(\varphi)$ است.

۲.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

قضیه ۱.۲.۱. *فرض کنید $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ دنباله‌هایی از اعداد حقیقی باشند که در شرایط*

۱) $\{b_n\} \subset [۰, ۱]$ ، $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n = \infty$ و

۲) $\limsup_{n\to\infty} c_n \leq ۰$ و یا $\sum_{n=۰}^{\infty} |b_n c_n| < \infty$ ،

صدق می‌کنند. اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد به طوری‌که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ،

$$a_{n+۱} \leq (۱ - b_n)a_n + b_n c_n,$$

آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} a_n = ۰.$$

برهان. رجوع کنید به مرجع [۳۴]. □

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید X و Y فضاهای متری با مترهای d_X و d_Y باشند. نگاشت f از X به توی Y را نگاشت انقباضی نامند هرگاه عدد حقیقی ومثبت $r < ۱$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x, y \in X$ ،

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq r d_X(x, y).$$

قضیه ۳.۲.۱. *(اصل انقباض باناخ) اگر X فضای متری کامل و f نگاشت انقباضی از X به توی X باشد، آنگاه f دارای نقطهٔ ثابت منحصر به فرد است. یعنی عضو*

منحصر به فرد $x_0 \in X$ وجود دارد به طوری که

$$f(x_0) = x_0.$$

برهان. رجوع کنید به مرجع [۳۲]. □

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید C زیر مجموعهٔ غیر خالی از فضای متریک X باشد. برای نگاشت $f: C \to X$، $Fix(f)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Fix(f) = \{x \in C : f(x) = x\}.$$

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. ماتریس $Q = \{q_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}_+}$ را قویاً منظم گویند هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

a) $\sup_{n\geq 0} \sum_{m=0}^{\infty} | q_{n,m} | < \infty$،

b) به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\sum_{m=0}^{\infty} q_{n,m} = 1$ و

c) $\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} | q_{n,m+1} - q_{n,m} | = 0$.

لم ۶.۲.۱. *اگر $Q = \{q_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}_+}$ ماتریس قویاً منظم باشد، آنگاه به ازای هر $m \in \mathbb{N}$،*

$$\lim_{n\to\infty} |q_{n,m}| = 0.$$

برهان. رجوع کنید به مرجع [۷] . □

تعریف ۱.۲.۷. ماتریس قویاً منظم $Q=\{q_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}_+}$ را ماتریس میانگین وزن دار گویند هرگاه

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\mid q_{n+1,m}-q_{n,m}\mid=0.$$

لم ۱.۲.۸. *فرض کنید $(E,\langle.,.\rangle)$ فضای ضرب داخلی باشد. دراین صورت به ازای هر $x,y,z\in E$ و $\alpha,\beta,\gamma\in[0,1]$ که $\alpha+\beta+\gamma=1$، داریم*

$$\begin{aligned}&\parallel\alpha x+\beta y+\gamma z\parallel^2\\&=\alpha\parallel x\parallel^2+\beta\parallel y\parallel^2+\gamma\parallel z\parallel^2\\&-\alpha\beta\parallel x-y\parallel^2-\alpha\gamma\parallel x-z\parallel^2-\beta\gamma\parallel y-z\parallel^2.\end{aligned}$$

برهان. رجوع کنید به مرجع [۱۷]. □

تعریف ۱.۲.۹. فضای نرمدار X در شرط اُپیال صدق می‌کند هرگاه برای هر دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعضای X که همگرای ضعیف به x است، شرایط زیر برقرار باشند:

a) به ازای هر $y\in X$ که $y\neq x$،

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n-x\|<\limsup_{n\to\infty}\|x_n-y\|.$$

b) به ازای هر $y \in X$ که $y \neq x$،

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|.$$

لم ۱.۲.۱۰. *هر فضای هیلبرت در شرط اُپیال صدق می‌کند.*

برهان. رجوع کنید به مرجع [۱۶]. □

لم ۱.۲.۱۱. *اگر H فضای هیلبرت حقیقی باشد، آنگاه به ازای هر $x, y \in H$،*

$$\|x+y\|^{۲} \leq \|x\|^{۲} + ۲\langle y, x+y\rangle.$$

برهان. رجوع کنید به مرجع [۳۵]. □

تعریف ۱.۲.۱۲. فرض کنید C زیر مجموعهٔ غیر خالی از فضای هیلبرت H بوده و $B\colon C \to H$ نگاشت غیر خطی باشد. نامساوی وردشی کلاسیک عبارت است از پیدا کردن $x \in C$ به طوری که به ازای هر $y \in C$،

$$\langle Bx, y-x\rangle \geq ۰.$$

قضیه ۱.۲.۱۳. *اگر C زیر مجموعهٔ غیر خالی، بسته و محدب از فضای هیلبرت H باشد و $x \in H$، آنگاه عضو منحصر به فرد $y_۰ \in C$ وجود دارد به طوری که*

$$\|x - y_۰\| = d(x, C) = \inf_{y\in C} \|x-y\|.$$

برهان. رجوع کنید به مرجع [۱]. □

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنید C زیر مجموعهٔ غیر خالی، بسته و محدب از فضای هیلبرت H باشد. بنابه قضیهٔ ۱۳.۲.۱ به ازای هر $x \in H$، عضو منحصر به فرد $P_C x \in C$ وجود دارد به طوری که

$$\|x - P_C x\| = d(x, C).$$

بنابراین P_C نگاشتی از H به توی C است که آنرا تصویر متری به روی C می‌نامند.

قضیه ۱۵.۲.۱. *اگر C زیر مجموعهٔ غیر خالی، بسته و محدب از فضای هیلبرت H بوده و P_C تصویر متری از H به روی C باشد، گزاره‌های زیر معادل هستند.*

(۱) $y = P_C x$،

(۲) y *جواب نامساوی وردشی زیر است:*

$$\langle x - y, y - z \rangle \geq 0, \qquad \forall z \in C.$$

برهان. رجوع کنید به مرجع [۱]. □

نتیجه ۱۶.۲.۱. *اگر C زیر مجموعهٔ غیر خالی، بسته و محدب از فضای هیلبرت H بوده و P_C تصویر متریک از H به روی C باشد، آنگاه به ازای هر $x, y \in H$،*

$$\|P_C x - P_C y\| \leq \|x - y\|.$$