بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور استان تهران

مرکز تهران شرق

دانشکده علوم پایه و کشاورزی

کارایی سیستم‌های دو مرحله‌ای با داده‌های فازی و رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری

پایان نامه برای دریافت درجه

کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات

نام دانشجو:

مریم جوادی

استاد راهنما:

دکتر صابر ساعتی

استاد مشاور:

دکتر مسعود خلیلی

آذر ۱۳۹۱

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم تحقیقات و فناوری
مرکز تهران شرق

شماره: .....
تاریخ: .....
پیوست: .....

دانشگاه پیام نور
دانشگاه پیام نور استان تهران
اللهم عجل لولیک الفرج والعافیة والنصر

باسمه تعالی

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

با تأیید خداوند متعال، جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد خانم **مریم جوادی**
به شماره دانشجویی: **۸۸۰۰۰۱۵۵۲** در رشته: **ریاضی کاربردی** گرایش: **تحقیق در عملیات**

تحت عنوان:

کارایی سیستم‌های دو مرحله‌ای با داده‌های فازی و رتبه‌بندی واحدهای تصمیم گیری

با حضور داوران در روز **چهارشنبه** مورخ **۱۳۹۱/۱۱/۱۸** ساعت **۱۰ الی ۱۱** در مرکز تهران شرق برگزار شد و نظر هیأت داوران پس از استماع بیانات و نحوه ارائه نامبرده به شرح ذیل می‌باشد:

دفاع از پایان‌نامه	☐ قبول	☐ دفاع مجدد	☐ مردود	
درجه پایان‌نامه	☐ عالی	☑ بسیارخوب	☐ خوب	☐ قابل قبول
	(۲۰-۱۹)	(۱۹/۹۹-۱۸)	(۱۷/۹۹-۱۶)	(۱۵/۹۹-۱۴)

نمره پایان‌نامه به عدد: ۱۸٫ **نمره پایان‌نامه به حروف:** هجده تمام

ردیف	هیات داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه/ موسسه	امضاء
۱	استاد راهنما	صابر ساعتی مهتدی	استادیار	آزاداسلامی	
۲	استاد راهنمای همکار یا استادمشاور۱	---	---	---	
۳	استاد مشاور۲	مسعود خلیلی	استادیار	پیام نور تهران	
۴	استاد داور	غلامحسن شیردل	استادیار	قم	
۵	نماینده علمی گروه/ نماینده تحصیلات تکمیلی	خدیجه احمدی آملی	استادیار	پیام نور	

تأیید مدیرگروه یا مدیر تحصیلات تکمیلی مرکز تهران شرق:
تاریخ: **امضاء**

تهران ، خیابان کریمخان زند ،خیابان استاد نجات الهی ، خیابان شهید فلاح پور ، پلاک ۲۷ مرکز تهران شرق
تلفن : ۸۸۹۱۳۴۷۵
دورنگار: ۸۸۹۴۸۹۸۴
Tshargh.Tpnu.ac.ir
Tshargh@Tpnu.ac.ir

گواهی اصالت، نشر و حقوق مادی و معنوی اثر

اینجانب مریم جوادی دانشجوی ورودی سال ۱۳۸۸ مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات) گواهی می‌نمایم چنانچه در پایان نامه خود از فکر، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته‌ام با نقل قول مستقیم منبع و ماخذ آن را نیز در جای مناسب ذکر کرده‌ام. بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می‌دانم و جواب گوی آن خواهم بود.

دانشجو تایید می‌نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه (رساله) نتیجه تحقیقات خودش می‌باشد ودر صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

مریم جوادی

تاریخ وامضاء

اینجانب مریم جوادی دانشجوی ورودی سال ۱۳۸۸ مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات) گواهی می نمایم چنانچه بر اساس مطالب پایان نامه خود اقدام به انتشار مقاله، کتاب و ... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله، کتاب و .. و به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم.

مریم جوادی

تاریخ وامضاء

کلیه حقوق مادی مترتب ازنتایج مطالعات، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه پیام نور می باشد.

آذر ۱۳۹۱

تقدیر و قدردانی

از استاد محترم و بزرگوار جناب آقای دکتر صابر ساعتی که مرا در تهیه و تنظیم این پژوهش مساعدت و یاری نموده اند، کمال تشکر و قدردانی را می نمایم و همچنین قدردانی و سپاس خود را محضر استاد جناب آقای دکتر خلیلیمشاور تهیه پژوهش مذکور تقدیم می نمایم و نیز کمال تشکر خود را از مدیر گروه محترم ریاضی سرکار خانم دکتر سلطانیان اعلام می دارم.

کارایی سیستم‌های دو مرحله‌ای با داده‌های فازی و رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری

چکیده:

این پژوهش به بررسی کارایی سیستم‌های دو مرحله‌ای که داده‌های آن فازی بوده پرداخته و همچنین واحدهای کارایی که در این سیستم مورد بحث مشخص می‌شود را رتبه‌بندی می‌نماید. با استفاده از روشی که برای حل سیستم، داده‌های فازی را به بازه‌های قطعی تبدیل می‌کند، برنامه غیر خطی بدست می‌آید که خطی کردن آن در اغلب مواردی که غیرخطی بودن قوی باشد، سخت می‌گردد. لذا در این پژوهش روشی ارائه می‌گردد که مشکل غیر خطی بودن آن برطرف شده و سیستم را قابل حل می‌نماید. حال با توجه به آنکه هر سیستمی احتمالا واحدهای کارایی خواهد داشت، لذا روشی پیشنهادی در این پژوهش به رتبه‌بندی کردن این واحدهای کارا کمک می‌نماید.

کلید واژه‌ها:

تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی، سیستم‌های دو مرحله‌ای، دادهٔ فازی، رتبه‌بندی.

فهرست مطالب

فصل اول	مقدمه	۱
۱.۱	آشنایی با تحلیل پوششی داده‌ها	۱
۲.۱	تعریف سیستم‌های دو مرحله‌ای	۲
۳.۱	اهمیت موضوع	۳
٤.۱	مروری بر فصول آینده	٤
فصل دوم	مروری بر تحلیل پوششی داده‌ها و مفاهیم فازی	۵
۱.۲	مقدمه	۵
۲.۲	مفهوم کارایی	٦

۳.۲	تابع تولید	٦
٤.۲	واحد تصمیم‌گیری (DMU)	۸
٥.۲	مجموعه امکان تولید (PPS)	۸
٦.۲	مدل‌های استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها (BCC,CCR)	۱۰
۱.٦.۲	مدل CCR	۱۱
۲.٦.۲	مدل CCR و مساله دوگان	۱۲
۳.٦.۲	مدل BCC	۱۳
٤.٦.۲	مدل BCC و مساله دوگان	۱٥
۷.۲	مدلهای رتبه‌بندی	۱٦
۱.۷.۲	مدل AP	۱۷
۲.۷.۲	مدل MAJ	۱۷
۳.۷.۲	روش ساعتی و همکاران	۱۸
۸.۲	مفاهیم و تعاریف فازی	۱۹
۹.۲	عملگرهای مجموعه‌ای برای مجموعه‌های فازی	۲۰
۱۰.۲	اعمال جبری روی اعداد فازی مثلثی	۲۰
۱۱.۲	مفهوم $\alpha-$ برش	۲۳
۱۲.۲	اعداد فازی LR و اعداد مثلثی (T.F.N)	۲٤

فصل سوم تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای قطعی و فازی ۲٦

۱.۳ مقدمه ۲۶

۲.۳ تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای رابطه‌ای ۲۷

۳.۳ تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای فازی ۳۰

فصل چهارم روش پیشنهادی جهت کارایی سیستم دو مرحله‌ای فازی و رتبه‌بندی واحدهای کارا ٤۰

۱.٤ مقدمه ٤۰

۲.٤ اندازه کارایی فازی ٤۱

۳.٤ تبدیل اعداد فازی به بازه‌های قطعی ٤۲

٤.٤ جانشینی بازه‌ها ٤٤

٥.٤ جانشینی متغیر جهت خطی کردن مساله ٤٥

٦.٤ معرفی دوگان مدل فازی دو مرحله‌ای ٤۷

فصل پنجم بررسی مثال‌های عددی و پیشنهادات برای آتی ٥۰

۱.٥ مقدمه ٥۰

۲.٥ ارزیابی داده‌ها ٥۰

۳.٥ مزیت روش پیشنهادی ٥۱

٤.٥ مقایسه رتبه‌بندی چند شرکت بیمه ٥۲

٥.٥ کارهای آتی ٥۳

مراجع ٥٤

پیوست الف جداول ۵۶

فصل اول

مقدمه

۱.۱ آشنایی با تحلیل پوششی داده‌ها[1]

ارزیابی عملکرد واحدها در یک دوره زمانی مشخص که بستگی به ماهیت، مقیاس، وظایف، ماموریت‌ها و اهداف سازمان دارد، تعیین می‌شود. از آنجایی که یک سازمان متشکل از اجزاء و بخش‌های مختلف می‌باشد، لذا برای اطمینان از میزان موفقیت سازمانی، باید به ارزیابی میزان تناسب، تطابق و کارایی عملکرد این اجزاء بر مبنای شاخص معیار صحیح عملکرد، در جهت اهداف سازمانی اقدام نمود. بر همین اساس برای ارزیابی یک سازمان، استفاده از نتایج ارزیابی کارکنان و بخش‌های مختلف یک سازمان ضروری است. روش ارزیابی بهره‌روی جمعی سازمان با مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها انجام می‌گیرد.

مساله ارزیابی عملکرد واحدها از اواخر جنگ جهانی دوم شروع و گسترش چشمگیری داشته است و روش‌های مختلفی برای اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم‌گیری[2] ارائه شد که

1. Data Envelopment Analysis 2. Decision Making Unit

می‌توان آنها را به دو دسته مهم پارامتری و غیر پارامتری تقسیم کرد.

در سال ۱۹۵۷فارل[1][٦]، برای نخستین بار روش غیر پارامتری را جهت تعیین کارایی ارائه نمود. مقاله فارل اساس کار مقاله‌ی چارنز[2]– کوپر[3] و رودز[4][٤] در سال ۱۹۷۸ شد. البته روش بکار رفته در مقاله چارنز– کوپر و رودز قبل از آن در سال ۱۹۷٦ در رساله دکتری رودز به راهنمایی کوپر تحت عنوان "ارزیابی پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان مدارس ملی آمریکا"مورد استفاده قرار گرفته بود.

۲.۱ تعریف سیستم‌های دو مرحله‌ای

تحلیل پوششی داده‌ها یک روشی برای اندازه‌گیری کارایی[5]واحدهای تصمیم‌گیری است که چندین ورودی و خروجی دارد. در بسیاری از مطالعات تحلیل پوششی داده‌ها، واحدهای تصمیم‌گیری می‌تواند ساختار دو مرحله‌ای داشته باشد که مرحله اول ورودی‌ها را برای تولید خروجی‌هایی که در مرحله دوم به عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شوند استفاده می‌کند. به عبارتی خروجی‌های مرحله اول به عنوان مقادیر میانی در نظر گرفته می‌شوند.

به عنوان مثال در فرایند سرمایه‌گذاری در بانک، اموال در مرحله اول جمع‌آوری شده و در مرحله دوم سرمایه‌گذاری می‌شوند. بنابراین ممکن است جمع‌آوری اموال رضایتبخش بوده در حالیکه هنوز بانک به سودی که منجر به سرمایه‌گذاری درست شود نرسیده باشد. برعکس ممکن است جمع‌آوری اموال هنوز رضایتبخش نبوده در صورتیکه بانک به یک سرمایه‌گذاری مورد قبول که منجر به تولید سود می‌شود رسیده باشد.

در مدل تحلیل پوششی داده‌های یک مرحله‌ای، سیستم مورد ارزیابی را بدون محاسبه فرایندهای آن، به عنوان یک واحد سراسری در نظر گرفته و این نتیجه را می‌دهد که یک سیستم با فرایندهای ناکارا ممکن است کارا باشد[۱۱].

1.Farrell 2. Charnes 3. Cooper 4. Rhodes 5. Efficiency

برای جلوگیری از عملکرد اشتباه فرایندهای ناکارا، به عنوان فرایندهای کارا و برای شناسایی فرایندی که سبب ناکارایی می‌شود، سیفورد[1] و زاهو[2] [۱۷] کارایی‌های دو جزء فرایند را، بوسیله عملکرد هر فرایند به عنوان یک سیستم محاسبه کردند. برای کشف رابطه بین کارایی سیستم و کارایی فرایندها، تلاش‌های بسیاری برای سیستم‌های تولیدی دو مرحله‌ای اختصاص داده شده است که در فصل سوم به طور مفصل شرح داده خواهد شد.

۳.۱ اهمیت موضوع

اولین ویژگی ارزیابی تحلیل پوششی داده‌ها، ارزیابی واقع بینانه آن نسبت به روش‌های دیگر ارزیابی است. تحلیل پوششی داده‌ها از مجموعه واحدهای تصمیم‌گیری، تعدادی را به عنوان واحدهای کارا معرفی می‌کند و به کمک آنها مرز کارایی را تشکیل می‌دهد. آنگاه این مرز را ملاک ارزیابی واحدهای دیگر قرار می‌دهد.

ویژگی مهم دیگر ارزیابی تحلیل پوششی داده‌ها، ارزیابی توام مجموعه‌ای از عوامل است. یکی دیگر از ویژگی‌های اساسی مدل تحلیل پوششی داده‌ها، ویژگی جبرانی بودن آن می‌باشد. با توجه به اینکه سیستم دو مرحله‌ای عملکرد فرآیندها را جداگانه بررسی می‌کند لذا نسبت به روش یک مرحله‌ای بیشتر مورد توجه قرار گرفته شده و کارایی سیستم بدون توجه به عملکرد فرآیندهایش ارزیابی می‌شود و این یعنی یک سیستم ممکن است کارا باشد در حالی که فرآیندهایش ناکارا هستند و بلعکس[۱۱]. همچنین اهمیت سیستم‌های دو مرحله‌ای تا جایی گسترش می‌یابد که اندازه‌گیری دقیق مشاهدات سخت بوده و باید تخمین زده شود که در این موارد از اعداد فازی[3] استفاده می‌شود.

اهمیت این پژوهش در رتبه‌بندی واحدهای کاراست. بدلیل اینکه واحدهای کارا امتیاز

1.Seiford 2.Zhu 3. Fuzzy

کارایی ۱ دارند، لذا تشخیص اینکه در میان این واحدهای کارا کدام واحد امتیاز ارزیابی بیشتری نسبت به بقیه دارد وجود ندارد که روش ارائه شده در این پژوهش واحدهای کارا را رتبه‌بندی می‌نماید.

٤.١ مروری بر فصول آینده

در این فصل مفهوم تحلیل پوششی داده‌ها و تعریف سیستم‌های دو مرحله‌ای و اهمیت موضوع پژوهش، ارائه شده است. فصل دوم شامل تعاریف کارایی، تابع تولید، مجموعه امکان تولید، مدل‌های CCR و BCC، مدل‌های رتبه‌بندی[1]، مفاهیم فازی و معرفی اعداد فازی است. در فصل سوم مدل‌های دو مرحله‌ای ساده و مدل‌های دو مرحله‌ای فازی و مشکلات این مدل‌ها مطرح شده است. فصل چهارم به رفع اشکالات مطرح شده در فصل سوم پرداخته و روش پیشنهادی ارائه می‌گردد. نهایتاً، در فصل پنجم به بررسی مثال عددی با توجه به روش پیشنهادی این پژوهش پرداخته می‌شود.

1.Ranking

فصل دوم

مروری بر تحلیل پوششی داده‌ها و مفاهیم فازی

۱.۲ مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها روشی برای محاسبه کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیری است که با استفاده از برنامه‌ریزی ریاضی انجام می‌گیرد. تحلیل پوششی داده‌ها به دلیل استفاده از برنامه‌ریزی ریاضی توانایی دارد تا تعداد زیادی از متغیرها و روابط را در محاسبه کارایی مورد بررسی قرار دهد و هیچ محدودیتی از جهت تعداد ورودی‌ها و خروجی‌ها ندارد.در این روش، دو مدل اساسی مطرح است که بعنوان مدل‌های استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها شناخته می‌شوند. یکی مدل CCR که در سال ۱۹۷۸ توسط چارنز، کوپر و رودز[٤] ابداع شد و دیگری مدل BCC که توسط بنکر[1]، چارنز و کوپر[۲] در سال ۱۹۸٤ مطرح گردید.

1. Banker

۲.۲ مفهوم کارایی

کارایی یک واحد تصمیم‌گیری، حاصل مقایسه ورودی‌ها و خروجی‌ها می‌باشد. در ساده‌ترین حالت که واحدهای تصمیم‌گیری دارای یک ورودی و یک خروجی هستند، کارایی می‌تواند به صورت خروجی به ورودی بیان شود و در حالتی که چند ورودی و چند خروجی برای هر واحد داشته باشیم، اگر هزینه و قیمت به ترتیب برای ورودی‌ها و خروجی‌ها مشخص باشند، خارج‌قسمت قیمت خروجی‌ها به هزینه ورودی‌ها، کارایی را نتیجه می‌دهد که کارایی اقتصادی نامیده می‌شود [۵]. ولی وقتی قیمت‌ها و هزینه‌ها در دسترس نباشند، تعیین کارایی اغلب مشکل خواهد بود که در این صورت کارایی به روش مغلوب کردن بررسی می‌شود.

۳.۲ تابع تولید

تابع تولید نشان دهنده رابطه موجود بین منابع تولیدی مورد استفاده (ورودی‌ها) و کالا یا خدمات بدست آمده (خروجی‌ها) در یک زمان واحد بدون در نظر گرفتن قیمت‌ها می‌باشد.

تعریف ۲-۱ : رابطه‌ی بین عملکرد یک واحد با عوامل تاثیرگذار بر آن را می‌توان به صورت تابعی که به تابع تولید معروف است و به صورت زیر نشان داده می‌شود، بیان کرد:

$$Y = F(U,V)$$

که در آن Y عملکرد حاصل از انجام عملیات در واحد (خروجی واحد) و دو بردار U و V عوامل اثرگذار در عملکرد واحد می‌باشد که U عوامل شناخته شده و V عوامل ناشناخته را تشکیل می‌دهند. در حالتی که F تابع یک مقداری نباشد، تابع تولید به صورت زیر خواهد بود:

$$(y_1,\dots,y_s) = (f_1(U,V),\dots,f_s(U,V)) = F(U,V)$$

که بردارهای U و V بردار $(y_1,\dots,y_s)$ را تولید می‌نمایند.

تعریف۲-۲ : بردارهای U و V را که افزایششان با حفظ تمام عوامل دیگر باعث کاهش کارایی و با کاهششان به شرط حفظ تمام عوامل دیگر، باعث افزایش کارایی می‌گردند را بردار ورودی می‌نامند.

تعریف ۲-۳ : بردار $(y_1,\ldots,y_s)$ را که افزایش آن به شرط حفظ تمام عوامل دیگر باعث افزایش کارایی و کاهشش به شرط حفظ تمام عوامل دیگر باعث کاهش کارایی می‌گردند را بردار خروجی می‌نامند.

هدف از معرفی و بررسی تابع تولید، مشخص کردن آن به صورتی است که بتوانیم بیشترین خروجی ممکن را از ترکیب حداقل ورودی فراهم نماییم و یا در صورت عدم تحقق چنین هدفی، عوامل عدم تحقق آن را شناخته و برای رفع آن اقدام لازم را معرفی نماییم. به دلیل تاثیر عامل فنی بر تابع تولید که مدام در حال تغییر است و نیز عوامل ناشناخته‌ای که در آن تاثیر دارند، به دست آوردن دقیق رابطه‌ی ریاضی تابع تولید، غیر ممکن است.

تابع تولید تجربی با دو روش تخمین زده می‌شود:

الف) روش پارامتری

همان‌گونه که از نام این روش پیداست، در این روش، ابتدا شکل تابع تولید را به طور مشخصی در نظر می‌گیرند و با استفاده از روش‌های خاص، پارامترهای تابع را معین می‌نمایند.

ب) روش غیر پارامتری

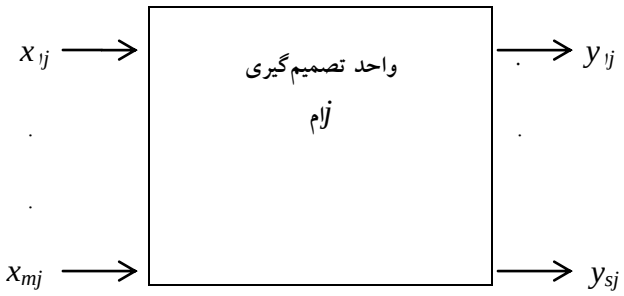
تخمین تابع تولید به روش غیر پارامتری برای اولین بار در سال ۱۹۵۷ توسط فارل [٦] صورت گرفت. فارل با استفاده از مشاهدات و اصول انکارناپذیر حاکم برعلم مورد نظر، مجموعه‌ای به نام مجموعه امکان تولید ساخت و مرز آن را تابع تولید نامید. هر واحد

تصمیم‌گیری (هرشعبه بانک، واحد آموزشی و ...می‌توانند یک واحد تصمیم‌گیری باشند) که روی مرز قرار گیرد، واحد کارا و در غیر اینصورت ناکارا تلقی می‌گردد.

٤.٢ واحد تصمیم‌گیری(DMU)

منظور از یک واحد تصمیم‌گیری عبارت از واحدی است که با مصرف بردار ورودی $(X_1,\dots,X_m)$ بردار خروجی $(Y_1,\dots,Y_s)$ را تولید نماید. همواره بردار ورودی و خروجی نامنفی هستند. همانطور که در شکل (۲-۱) نشان داده شده است واحد تصمیم‌گیری j-ام خروجی‌های y_{sj} ،...، y_{1j} را به ازای ورودی‌های x_{mj} ،...، x_{1j} تولید می‌کند.

تعریف ۲-٤ (واحد تصمیم‌گیری متجانس): عبارت از واحدهایی که عمل مشابه دارند و با دریافت ورودی‌های مشابه، خروجی‌های مشابه تولید می‌نمایند.



شکل۲-۱. واحد تصمیم‌گیری

۵.۲ مجموعه امکان تولید[1](PPS)

فرض شود n واحد تصمیم‌گیری در اختیار داریم. بطوریکه هر واحد m ورودی را برای تولید s خروجی مورد استفاده قرار می‌دهد. فرض کنیم $X_j = (x_{1j},\dots,x_{mj})$ بردار ورودی و

1. Production possibility set

$Y_j = \left(y_{1j}, \ldots, y_{sj}\right)$ بردار خروجی واحد متناظر j باشد. مجموعه امکان تولید به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T = \{(X,Y) \mid \text{بردار خروجی نامنفی } Y \text{ می‌تواند از بردار ورودی نامنفی } X \text{ تولید شود}\}$$

با داشتن تابع تولید به راحتی می‌توان کارایی یک واحد تصمیم‌گیری را محاسبه کرد. اما در اغلب موارد تابع تولید در دست نیست. لذا مجموعه‌ای به نام مجموعه امکان تولید می‌سازیم. مرز این مجموعه در حالت یک ورودی یک خروجی خط مستقیمی است که از مبدا می‌گذرد که نشان دهنده وضعیت بازده به مقیاس ثابت است که به آن مجموعه امکان تولید مدل CCR می‌گویند.

از آنجایی که مجموعه امکان تولید T وقتی مشخص می‌شود که تابع تولید شناخته شده باشد، لذا اصول زیر را برای مجموعه امکان تولید تجربی بنا می‌کنیم. مرز این مجموعه امکان تجربی، تخمینی برای تابع تولید است. لذا مجموعه امکان تولید در اصول موضوعه زیر صدق می‌کند:

اصول موضوعه ۱ شمول مشاهدات

تمام مشاهدات متعلق به مجموعه امکان تولید است.

اصول موضوعه ۲ تحدب[1]

اگر $(X_j, Y_j) \in T$ و $\lambda_j \geq 0$ اسکالر باشد بطوریکه $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$، آنگاه $(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j) \in T$.

اصول موضوعه ۳ اصل ناکارایی[2]

الف) اگر $(X, Y) \in T$ و $\bar{X} \geq X$، آنگاه $(\bar{X}, Y) \in T$

ب) اگر $(X, Y) \in T$ و $\bar{Y} \leq Y$ آنگاه $(X, \bar{Y}) \in T$

اصل موضوعه ٤ بی‌کرانی اشعه[3] **(بازده به مقیاس ثابت)**

اگر $(X, Y) \in T$، آنگاه بازاء هر $K > 0$، $(KX, KY) \in T$

1. Convexity 2. Inefficiency Postulate 3. Ray Unboundedness

اصل موضوعهٔ ۵ کمینه برونیابی[1]

T اشتراک تمام $\hat{T}$هایی است که در اصل موضوعه ۳،۲،۱ و ٤ صدق کند.

بنابراین T کوچکترین مجموعه سازگار با داده‌های مشاهده شده اصول موضوعه برای مجموعهٔ امکان تولید است و با توجه به اصول ۲ و ٤، T یک چندوجهی است. حال با توجه به خواص مجموعهٔ T، $(X,Y) \in T$ را مشخص می‌کنیم. اصول ۲ و ٤ ایجاب می‌کنند که هر (X,Y) به فرم $(K\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j, K\sum_{j=1}^{n}\lambda_j Y_j) \in T$ با $K>0$ و $\lambda_j \geq 0$ و $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1$ متعلق به T است. بعلاوه با بکارگیری اصول ۲و٤، می‌توان نتیجه گرفت که :

$(X,Y) \in T$ اگر و فقط اگر بازاء $K>0$ و λ_jهایی که در شرایط $\lambda_j \geq 0$ و $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1$ صدق می‌کنند.

$$X \geq K\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j, Y \leq K\sum_{j=1}^{n}\lambda_j Y_j$$

٦.۲مدل‌های استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها (BCC,CCR)

فرض کنید یک واحد تصمیم‌گیری دارای m ورودی و s خروجی باشد که $X_j = \left(x_{1j},\ldots,x_{mj}\right)$ و $Y_j = (y_{1j},\ldots,y_{sj})$ به ترتیب بردارهای ورودی و خروجی واحد تصمیم‌گیری j–ام باشند که به صورت شهودی در شکل (۲–۱) نشان داده شده است:

به هریک از ورودی‌ها و خروجی‌ها وزنی را نسبت داده و خارج قسمت مجموع وزن‌دارشده خروجی‌ها به مجموع وزن‌دار شده ورودی‌ها به صورت :

$$\frac{u_1 y_{1j} + u_2 y_{2j} + \ldots + u_s y_{sj}}{v_1 x_{1j} + v_2 x_{2j} + \ldots + v_m x_{mj}}$$

را کارایی مطلق واحد تصمیم‌گیری j–ام درنظر بگیرید که در آن u_r وزن خروجی rام و v_i

1. Minimum Extrapolation