دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

بررسی انشعاب سیکل‌های حدی از یک حلقه‌ی هموکلینیک گوشه‌دار

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

منصوره اله‌یاری

استاد راهنما
دکتر رسول عاشقی

دی ۱۳۹۱

تقدیم به همسر صبور و پدر و مادر مهربانم

سپاس و ستایش خداوند متعال را که توفیق علم آموزی را به من ارزانی فرمود و مرا در این راه همیشه همراه بود. اکنون که به یاری و عنایت پروردگار، پایان نامه ی خود را به پایان رسانده ام، تشکر و قدردانی از عزیزانی که همواره همراهم بودند و مرا یاری نمودند را بر خود لازم می دانم.

از همسر عزیزم که وجودش همیشه مایه آرامش و دلگرمی زندگیم بوده است و همچنین از پدر و مادر مهربانم به پاس محبت های بی دریغشان و اینکه همیشه مشوق و پشتیبانم بوده اند از صمیم قلب سپاسگزارم.

از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر رسول عاشقی برای تمام راهنمایی ها، زحمات، پیگیری ها و راهنمایی های بسیار ارزنده و بی دریغشان در تمامی مراحل تحقیق و نگارش این پایان نامه بسیار سپاسگزارم. از جناب آقای دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه بخاطر اینکه مرا در این پایان نامه همراهی و راهنمایی کردند متشکرم.

از جناب آقای دکتر محمدرضا رئوفی و دکتر رضا مزروعی سبدانی که زحمت بازخوانی و داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند متشکرم.

همچنین در پایان تشکر خود را از دوستان خوبم به پاس همیاری های صمیمانه در طی این دو سال ابراز می دارم.

دی ۱۳۹۱

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی خانم منصوره اله‌یاری
تحت عنوان

بررسی انشعاب سیکل‌های حدی از یک حلقه‌ی هموکلینیک گوشه‌دار

در تاریخ ۱۷/ ۱۰/ ۹۱ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱– استاد راهنما　　دکتر رسول عاشقی

۲– استاد مشاور　　دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

۳– استاد داور۱　　دکتر محمدرضا رئوفی

۴– استاد داور۲　　دکتر رضا مزروعی سبدانی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده　　دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

بسمه تعالی

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

بررسی انشعاب سیکل‌های حدی از یک حلقه‌ی هموکلینیک گوشه‌دار

سخنران: منصوره اله‌یاری

زمان: ۹۱/ ۱۰/۱۷ ساعت ۱۳:۳۰
مکان: سالن خوارزمی دانشکده علوم ریاضی

هیئت داوران

۱– دکتر رسول عاشقی

۲– دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

۳– دکتر محمدرضا رئوفی

۴– دکتر رضا مزروعی سبدانی

چکیده
در این پایان نامه به مطالعه‌ی ویژگی تابع ملنیکف مرتبه اول در دستگاه‌های نزدیک به همیلتونی می‌پردازیم که دستگاه همیلتونی مربوطه دارای یک حلقه هتروکلینیک گوشه‌دار شامل دو مدار هتروکلینیک متصل به دو گوشه و یا متصل به یک گوشه و یک زین هذلولوی است. برای این منظور بسط مجانبی تابع ملنیکف را در نزدیکی این نوع حلقه‌های هتروکلینیک به دست می‌آوریم و فرمول‌هایی برای چند ضریب اول این بسط ارائه می‌دهیم. سپس با استفاده از نتایج به دست آمده، به مطالعه‌ی انشعابات سیکل‌های حدی در نزدیکی این حلقه‌ها در دستگاه‌های چندجمله‌ای Z_q–هم‌پایا از درجه‌ی ۵ به ازای $q = ۲, ۳$ می‌پردازیم.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

چکیده

در این پایان نامه به مطالعه‌ی ویژگی تابع ملنیکف مرتبه اول در دستگاه‌های نزدیک به همیلتونی می‌پردازیم که دستگاه همیلتونی مربوطه دارای یک حلقه هتروکلینیک گوشه‌دار شامل دو مدار هتروکلینیک متصل به دو گوشه و یا متصل به یک گوشه و یک زین هذلولوی است. برای این منظور بسط مجانبی تابع ملنیکف را در نزدیکی این نوع حلقه‌های هتروکلینیک به دست می‌آوریم و فرمول‌هایی برای چند ضریب اول این بسط ارائه می‌دهیم. سپس با استفاده از نتایج به دست آمده، به مطالعه‌ی انشعابات سیکل‌های حدی در نزدیکی این حلقه‌ها در دستگاه‌های چندجمله‌ای Z_q-هم‌پایا از درجه‌ی ۵ به ازای $q = ۲, ۳$ می‌پردازیم.

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ تاریخچه

یکی از مهم‌ترین مسائل باز در نظریه معادلات دیفرانسیل در صفحه، تعیین ماکزیمم تعداد سیکل‌های حدی یک دستگاه چندجمله‌ای مرتبه n در صفحه است که اولین بار توسط هیلبرت در ابتدای قرن گذشته در دومین کنگره بین المللی ریاضی‌دانان در پاریس مطرح شد. این مسئله با گذشت بیش از یک قرن، علیرغم تحقیقات جدی و چاپ صدها مقاله پیرامون آن، هنوز برای $n = 2$ باز است. برخی از مهم‌ترین نتایج به دست آمده در زمینه مسئله شانزدهم هیلبرت به شرح زیر است:

- در سال ۱۹۲۳ میلادی دولاک برای میدان‌های برداری به طور فردی متناهی بودن تعداد سیکل‌های حدی را ادعا کرد. به بیان دیگرادعا کرد که هر میدان برداری چندجمله‌ای در صفحه تعداد متناهی سیکل حدی دارد.
- در سال ۱۹۷۷ میلادی آرنولد یک شکل ضعیف شده از مسئله شانزدهم هیلبرت ارائه داد که در آن به جای تعیین تعداد سیکل‌های حدی، تعداد صفرهای ایزوله انتگرال آبلی را به دست می‌آورد.
- در آغاز سال ۱۹۸۱ میلادی ایلیاشنکو یک شکاف بزرگ در اثبات دولاک یافت.
- در سال ۱۹۸۵ میلادی بمن ویژگی به طور فردی متناهی بودن را برای $n = 2$ ثابت کرد.
- در سال ۱۹۹۱ میلادی ایلیاشنکو و اکال هرکدام به طور مستقل در دو مقاله طولانی اثبات جدیدی از قضیه به طور فردی متناهی بودن را ارائه دادند و شکاف بزرگ در اثبات دولاک را پر کردند. در واقع، این نتیجه یکی از مهمترین نتایج به دست آمده در ارتباط با حل مسئله شانزدهم هیلبرت است. یعنی بعد از ۹۱ سال، متناهی بودن انفرادی تعداد سیکل‌های حدی برای میدان‌های برداری چندجمله‌ای در صفحه اثبات شد، ولی هنوز تعداد

این سیکل‌های حدی برای میدان‌های برداری چندجمله‌ای از درجه دو به عنوان مسئله‌ای حل نشده باقی مانده است.

- در سال ۲۰۰۴ میلادی لالیبره و رودریگز یک نتیجه کلی در مورد موقعیت مکانی و نحوه توزیع یا چیدمان سیکل‌های حدی به دست آوردند.
- گام بعدی در این راستا اثبات به طور یکنواخت متناهی بودن تعداد سیکل‌های حدی بود که روساری در سال ۱۹۸۸ میلادی برنامه‌ای برای اثبات این موضوع با کاهش مسئله شانزدهم هیلبرت ارائه داد. این برنامه ۱۲۱ گرافیک را برای سیستم‌های چندجمله‌ای از درجه دو کراندار به عنوان مجموعه‌های حدی تناوبی لیست کرد که تا کنون بیش از ۸۵ مورد از این گرافیک‌ها مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

تجزیه و تحلیل مسئله‌ی تعیین تعداد و موقعیت مکانی خانواده‌های موضعی و پیوسته از سیکل‌های حدی که بر اثر اختلال از مدارهای تناوبی یک دستگاه دینامیکی منشعب می‌شوند، بر اساس ایده زیر استوار است:
جایگزینی مسئله یافتن سیکل‌های حدی دستگاه مختل شده با مسئله یافتن صفرهای یک تابع مناسب.
برای به دست آوردن تابع مناسب، ابتدا برش پوانکاره Σ_0 را در نظر می‌گیریم که در حقیقت یک پاره خط یا کمانی است که خانواده‌ی مدارهای تناوبی دستگاه مختل نشده را به طور مورب قطع می‌کند. سپس به کمک نگاشت بازگشتی پوانکاره $(\xi,\varepsilon) \longmapsto \mathcal{P}(\xi,\varepsilon)$، که در آن ξ یک مختصه روی Σ_0 است و ε پارامتر اختلال است، تابع فاصله (تغییر مکان) به صورت زیر تعریف می‌شود

$$d(\xi,\varepsilon) \equiv \mathcal{P}(\xi,\varepsilon) - \xi.$$

بر اساس این تعریف، صفرهای تابع فاصله متناظر با مدارهای تناوبی دستگاه مختل شده هستند که Σ_0 را قطع می‌کنند. چون $d(\xi,0) \equiv 0$ ، تعیین مکان و مرتبه تکرار صفرهای d نیاز به دانستن مشتقات جزیی آن دارد. برای مثال اگر $d_\varepsilon(\xi_0,0) = 0$ و $\partial_\xi d_\varepsilon(\xi_0,0) \neq 0$ ، یعنی ξ_0 ریشه ساده است، آنگاه از قضیه تابع ضمنی وجود یک تابع هموار $\xi = \xi^*(\varepsilon)$ نتیجه می‌شود به طوری که $d(\xi^*(\varepsilon),\varepsilon) \equiv 0$ و منحنی $\xi = \xi^*(\varepsilon)$ متناظر با یک خانواده موضعی و پیوسته از سیکل‌های حدی است که از مدار تناوبی دستگاه مختل نشده که Σ_0 را در نقطه ξ_0 قطع می‌کند، منشعب می‌شود. حال اگر $d_E(h,\varepsilon) = H(\mathcal{P}(\xi,\varepsilon)) - H(\xi), \xi \in \Sigma_0$ و $h = H(\xi)$، برابر با افزایش انرژی در طول یک برش پوانکاره Σ_0 با مختص ξ از یک جریان همیلتونی با تابع همیلتونی H باشد، آنگاه تابع ملنیکف مرتبه k ام، $M_k(h)$ ، به صورت ضرایب در سری توانی تابع $d_E(h,\varepsilon)$ بر حسب توان‌های ε تعریف می‌شوند. به عبارت دیگر

$$d_E(h,\varepsilon) = M_1(h)\,\varepsilon + M_2(h)\,\varepsilon^2 + M_3(h)\,\varepsilon^3 + \dots.$$

بنابراین، سیکل‌های حدی متناظر با صفرهای ایزوله از اولین تابع ملنیکف غیر صفر هستند و کران بالای دقیق این صفرها، ماکزیمم تعداد سیکل‌های حدی که از طوق تناوبی دستگاه مختل نشده ایجاد می‌شوند را تعیین می‌کند.

۲.۱ اهداف موضوع

دستگاه نزدیک به همیلتونی

$$\dot{x} = H_y + \varepsilon\, p(x, y, \delta),\ \dot{y} = -H_x + \varepsilon\, q(x, y, \delta) \tag{۱.۱}$$

را در نظر بگیرید که در آن $H(x, y)$، $p(x, y, \delta)$ و $q(x, y, \delta)$ نسبت به (x, y, δ) توابع C^∞ بوده، $0 < \varepsilon \ll 1$ و δ یک پارامتر برداری در زیرمجموعه‌ی فشرده $D \subset \mathbb{R}^n$ است. سیستم (۱.۱) به ازای $\varepsilon = 0$ یک دستگاه همیلتونی با تابع همیلتونی $H(x, y)$ است، یعنی

$$\dot{x} = H_y,\ \dot{y} = -H_x. \tag{۲.۱}$$

فرض کنیم (۲.۱) دارای یک خانواده از مدارهای تناوبی L_h است که با معادله‌ی $H(x, y) = h$ تعریف شده است. همچنین فرض کنیم مرز این خانواده یک نقطه تعادل از نوع مرکز، یک حلقه هموکلینیک و یا یک حلقه هتروکلینیک است. در این صورت یک موضوع مهم در نظریه کیفی معادلات دیفرانسیل که بیشتر مورد توجه بوده و توسط بسیاری از محققان مورد بررسی قرار گرفته، تعداد سیکل‌های حدی در سیستم (۱.۱) است که از مدارهای تناوبی سیستم (۲.۱) به وجود می‌آیند. این سیکل‌های حدی توسط صفرهای ایزوله انتگرال آبلی

$$M(h, \delta) = \oint_{L_h} q\, dx - p\, dy \tag{۳.۱}$$

کنترل می‌شوند (توضیحات بیشتر در [۷]، [۹] و [۱۵] آمده است). تابع تعریف شده در (۳.۱)، تابع ملنیکف مرتبه‌ی اول سیستم (۱.۱) نامیده می‌شود. موضوع اصلی این پایان نامه، مطالعه‌ی ویژگی تابع ملنیکف مرتبه‌ی اول دستگاه (۱.۱) است. برای حالتی که دستگاه (۲.۱) دارای یک حلقه هتروکلینیک است که این حلقه دو مدار هتروکلینیک دارد که به دو زین هذلولوی متصلند و یا به دو گوشه متصلند، با یافتن بسط مجانبی $M(h, \delta)$ نزدیک این حلقه‌ی هتروکلینیک، فرمول‌هایی برای محاسبه‌ی چند ضریب اول این بسط ارائه می‌دهیم. سپس از این نتایج برای مطالعه‌ی انشعابات سیکل‌های حدی در دو نمونه از سیستم‌های چندجمله‌ای استفاده می‌کنیم.

فرض کنیم مرز خارجی خانواده‌ی مدارهای تناوبی $L_h : H(x, y) = h$ در (۲.۱) یک منحنی بسته شامل حداکثر دو نقطه تعادل و مرز داخلی آن نیز یک نقطه تعادل از نوع مرکز است. در این‌صورت پنج حالت ممکن زیر را داریم:

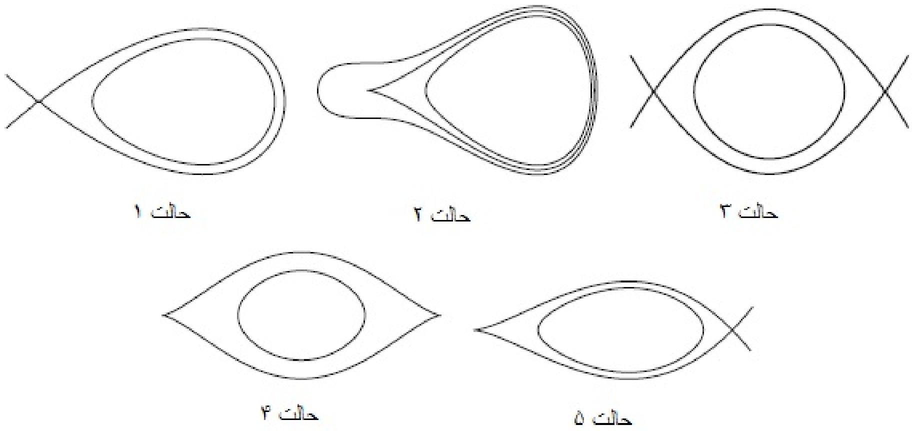
۱. یک حلقه‌ی هموکلینیک با یک زین هذلولوی.

۲. یک حلقه‌ی هموکلینیک با یک گوشه .

۳. یک حلقه‌ی هتروکلینیک شامل دو مدار هتروکلینیک که به دو زین هذلولوی متصلند.

۴. یک حلقه‌ی هتروکلینیک شامل دو مدار هتروکلینیک که به دو گوشه متصلند.

۵. یک حلقه‌ی هتروکلینیک شامل دو مدار هتروکلینیک که به یک گوشه و یک زین هذلولوی متصلند.
شکل ۱.۱ را ببینید.



شکل ۱.۱: نمای فاز پنج حالت ممکن.

بسط تابع $M(h,\delta)$ برای موارد ۱–۳ به دست آمده است که در ادامه به آن‌ها اشاره خواهد شد.
هدف اصلی در این پایان نامه به دست آوردن بسط مجانبی تابع ملنیکف برای دو حالت آخر است. قبل از بیان نتایج اصلی، ابتدا فهرستی از نتایج مربوط به سه حالت اول را ارائه می‌دهیم.
برای حالت اول، فرض کنیم حلقه‌ی هموکلینیک $L_\circ$ با معادله‌ی $H(x,y)=\circ$ مشخص شود و زین هذلولوی نیز در مبدأ قرار دارد. بر اساس این فرض، برای (x,y) در نزدیکی مبدأ می‌توان نوشت

$$H(x,y)=\frac{\lambda}{۲}(y^۲-x^۲)+\sum_{i+j\geq ۳} h_{ij}\,x^iy^j,\ \ \lambda\neq\circ. \tag{۴.۱}$$

همچنین برای اطمینان فرض کنیم مدارهای تناوبی L_h برای $h>\circ$ موجود باشند. با این مفروضات، قضیه زیر را داریم.

قضیه ۱.۲.۱

[۱۳] فرض کنیم برای (x,y) نزدیک به مبدأ

$$p(x,y,\delta)=\sum_{i+j\geq\circ} a_{ij}\,x^i\,y^j,\ \ q(x,y,\delta)=\sum_{i+j\geq\circ} b_{ij}\,x^i\,y^j,\ \ \delta=(a_{ij},b_{ij})$$

باشد. در این‌صورت برای $\circ<h\ll ۱$ بسط مجانبی زیر را داریم

$$M(h,\delta)=\sum_{j\geq\circ}(c_{۲j}+c_{۲j+۱}\,h\,\ln|h|)h^j,$$

که در آن

$$
\begin{aligned}
c_0(\delta) &= M(0,\delta) = \oint_{L_0} (q\,dx - p\,dy),\\
c_1(\delta) &= -\frac{a_{10}+b_{01}}{|\lambda|},\\
c_2(\delta) &= \oint_{L_0} (p_x + q_y - a_{10} - b_{01})\,dt + b\,c_1(\delta),\\
c_3(\delta) &= \frac{-1}{\lambda\,|\lambda|}(a_{21}+b_{12}) - \frac{1}{\lambda}\Big(h_{12}(2a_{20}+b_{11}) + h_{12}(a_{11}+2b_{02})\Big) + \bar{b}\,c_1(\delta).
\end{aligned}
$$

در اینجا b و $\bar{b}$ اعداد ثابتی هستند.

برهان. برای اثبات به [۱۳] رجوع کنید. ■

برای حالت دوم، فرض کنیم حلقه‌ی هموکلینیک با معادله‌ی $H(x,y)=0$ مشخص می‌شود و به یک گوشه در مبدأ متصل است. در ساده‌ترین حالت، برای این گوشه، فرض کنیم

$$H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \sum_{i+j\geq 3} h_{ij}\,x^i y^j, \qquad h_{30}\neq 0. \tag{5.1}$$

در این حالت دو خانواده از مدارهای تناوبی نزدیک حلقه‌ی هموکلینیک $L_0 : H(x,y)=0$ وجود دارند که با معادلات

$$L_h^{\pm} : H(x,y) = h, \qquad 0 < \pm h \ll 1$$

داده می‌شوند. بنابراین، در این حالت دو تابع ملنیکف زیر را داریم

$$M_{\pm}(h,\delta) = \oint_{L_h^{\pm}} q\,dx - p\,dy.$$

هان و همکارانش در [۱۱] بسط مجانبی دو تابع ملنیکف بالا را در نزدیکی L_0 برای یک سیستم همیلتونی کلی در حالت $h_{30}<0$ به دست آوردند و فرمول‌هایی برای محاسبه‌ی چهار ضریب اول این بسط ارائه دادند. اگر $h_{30}>0$، با دوران میدان برداری به $h_{30}<0$ تبدیل می‌شود. آن‌ها همچنین یک شرط کافی برای وجود ۶ سیکل حدی در نزدیکی L_0 به دست آوردند. این نتایج در قضیه زیر خلاصه می‌شوند.

قضیه ۲.۲.۱

[۱۱] فرض کنید (۵.۱) با شرط $h_{30}<0$ برقرار است و قرار دهید

$$p(x,y,\delta) = \sum_{i+j\geq 0} a_{ij}\,x^i\,y^j,\ \ q(x,y,\delta) = \sum_{i+j\geq 0} b_{ij}\,x^i\,y^j;\ \ \delta = (a_{ij}, b_{ij}).$$

در این‌صورت بسط‌های مجانبی زیر برقرارند:

$$M_-(h,\delta) = c_0(\delta) + B_{00}\, c_1(\delta)\, |h|^{\frac{5}{6}} + \Big(c_2(\delta) + b\, c_1(\delta)\Big)\, h + B_{10}\, c_3(\delta)\, |h|^{\frac{7}{6}}$$
$$- \frac{1}{11} B_{00}\, c_4(\delta)\, |h|^{\frac{11}{6}} + O(h^2);\ 0 \le -h \ll 1,$$
$$M_+(h,\delta) = c_0(\delta) + B^*_{00}\, c_1(\delta)\, h^{\frac{5}{6}} + \Big(c_2(\delta) + b^*\, c_1(\delta)\Big)\, h + B^*_{10}\, c_3(\delta)\, h^{\frac{7}{6}}$$
$$+ \frac{1}{11} B_{00}\, c_4(\delta)\, h^{\frac{11}{6}} + O(h^2);\ 0 \le h \ll 1,$$

که در آن $b, b^* \in \mathbb{R}$ و ثابت‌های $B_{00} > 0$، $B^*_{00} < 0$، $B_{10} > 0$ و $B^*_{10} < 0$ مستقل از δ هستند.

برای حالت سوم، بسط مجانبی تابع $M(h,\delta)$ دقیقا مشابه حالت اول است و فرمول‌هایی برای محاسبه‌ی ضرایب $c_0(\delta)$ ، $c_1(\delta)$ ، $c_2(\delta)$ و $c_3(\delta)$ در [۱۰] ذکر شده‌اند.

حالت چهارم را در نظر بگیرید. فرض کنید (۲.۱) دارای یک حلقه‌ی هتروکلینیک شامل دو نقطه تعادل S_1 و S_2 از نوع گوشه است. در این‌صورت دو تبدیل به شکل

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_i \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + S_i, \quad i = 1, 2,$$

وجود دارند که در آن T_i یک ماتریس 2×2 با شرط $det\, T_i = 1$ است به طوری که تحت این دو تبدیل، دستگاه (۱.۱) در مختصات جدید به دستگاه زیر تبدیل می‌شود:

$$\dot{u} = \frac{\partial H_i}{\partial v} + \varepsilon\, p_i(u,v,\delta),$$
$$\dot{v} = -\frac{\partial H_i}{\partial u} + \varepsilon\, q_i(u,v,\delta), i = 1, 2, \tag{۶.۱}$$

که در آن

$$H_1(u,v) = \frac{v^2}{2} + \sum_{k+j \ge 3} \tilde{h}_{kj}\, u^k v^j,\ \tilde{h}_{30} < 0, \tag{۷.۱}$$

$$H_2(u,v) = \frac{v^2}{2} + \sum_{k+j \ge 3} \bar{h}_{kj}\, u^k v^j,\ \bar{h}_{30} < 0, \tag{۸.۱}$$

$$p_1(u,v,\delta) = \sum_{i+j \ge 0} \tilde{a}_{ij}\, u^i v^j,\ q_1(u,v,\delta) = \sum_{i+j \ge 0} \tilde{b}_{ij}\, u^i v^j,$$
$$p_2(u,v,\delta) = \sum_{i+j \ge 0} \bar{a}_{ij}\, u^i v^j,\ q_2(u,v,\delta) = \sum_{i+j \ge 0} \bar{b}_{ij}\, u^i v^j.$$

بر اساس سیستم جدید (۶.۱) و فرمول‌های داده شده در قضیه ۲.۲.۱، که در فصل نتایج مقدماتی و اصلی و در بخش نتایج مقدماتی بیان شده است می‌توان ضرایب موضعی (ضرایبی در بسط که مقادیر آن‌ها فقط به نقاط تعادل بستگی دارد.) جدید $c_1(\delta)$ ، $c_3(\delta)$ و $c_4(\delta)$ را به صورت زیر معرفی نمود:

$$
\begin{aligned}
c_1(\delta) &= c_1(S_1,\delta) + c_1(S_2,\delta),\\
c_1(S_1,\delta) &= 2\sqrt{2}\tilde{h}_{30}^{-\frac{1}{3}}(\tilde{a}_{10}+\tilde{b}_{01}),\\
c_1(S_2,\delta) &= 2\sqrt{2}\bar{h}_{30}^{-\frac{1}{3}}(\bar{a}_{10}+\bar{b}_{01}).\\
c_3(\delta) &= c_3(S_1,\delta) + c_3(S_2,\delta),\\
c_3(S_1,\delta) &= 2\sqrt{2}\tilde{h}_{30}^{-\frac{5}{3}}\Big(\tilde{h}_{30}\left(2\tilde{a}_{20}+\tilde{b}_{11}-\tilde{h}_{12}(\tilde{a}_{10}+\tilde{b}_{01})\right)+\frac{1}{3}(h_{21}^{2}-2\tilde{h}_{40})\left(\tilde{a}_{10}+\tilde{b}_{01}\right)\Big),\\
c_3(S_2,\delta) &= 2\sqrt{2}\bar{h}_{30}^{-\frac{5}{3}}\Big(h_{30}\left(2\bar{a}_{20}+\bar{b}_{11}-h_{12}(\bar{a}_{10}+\bar{b}_{01})\right)+\frac{1}{3}(h_{21}^{2}-2h_{40})\left(\bar{a}_{10}+\bar{b}_{01}\right)\Big),\\
c_4(\delta) &= c_4(S_1,\delta) + c_4(S_2,\delta).
\end{aligned}
$$

به علاوه، ضرایب سراسری (ضرایبی هستند که مقدار آن‌ها مستقل از نقاط تعادل است و فقط به ماهیت حلقه هموکلینیک بستگی دارد.) جدید $c_0(\delta)$ و $c_2(\delta)$ همانند قبل تعریف می‌شوند، یعنی

$$
\begin{aligned}
c_0(\delta) &= \oint_{L_0} q\,dx - p\,dy = \oint_{T_i(L_0)\equiv\tilde{L}_0} q_i\,du - p_i\,dv,\\
c_2(\delta) &= \oint_{L_0} (p_x+q_y-a_{10}-b_{01})\,dt + b\,c_1(\delta),\\
c_2(S_1,\delta) &= \oint_{\tilde{L}_0} (p_{1u}+q_{1v}-\tilde{a}_{10}-\tilde{b}_{01})\,dt + b_1\,c_1(S_1,\delta),\\
c_2(S_2,\delta) &= \oint_{\bar{L}_0} (p_{2u}+q_{2v}-\bar{a}_{10}-\bar{b}_{01})\,dt + b_2\,c_1(S_2,\delta).
\end{aligned}
$$

اکنون در مرحله‌ای قرار گرفته‌ایم که می‌توانیم نتایج اصلی این پایان نامه را در قالب چند قضیه بیان کنیم.

قضیه ۳.۲.۱

فرض کنید (۲.۱) دارای یک حلقه‌ی هتروکلینیک گوشه‌دار است که با $L_0 = L_1 \cup L_2 \cup \{S_1, S_2\}$ مشخص می‌شود با این خاصیت که

$$
\alpha(L_1) = \omega(L_2) = S_1,\ \omega(L_1) = \alpha(L_2) = S_2,
$$

که در آن S_1 و S_2 نقاط تعادل از نوع گوشه و L_1 و L_2 مدارهای هتروکلینیک هستند که با معادله‌ی $H(x,y)=0$

داده می‌شوند. همچنین فرض کنید در همسایگی $L_\circ$ دو خانواده از مدارهای تناوبی وجود دارند که با معادلات

$$L_h^{\pm} : H(x,y) = h,\ \circ < \pm h \ll ۱$$

داده می‌شوند. قرار دهید

$$M_{\pm}(h,\delta) = \oint_{L_h^{\pm}} (q\,dx - p\,dy).$$

در این صورت بسط‌های مجانبی زیر را داریم

$$\begin{aligned} M_-(h,\delta) &= c_\circ(\delta) + B_{\circ\circ}\, c_۱(\delta)\, |h|^{\frac{۵}{۶}} + \big(c_۲(\delta) + b_۱\, c_۱(S_۱,\delta) + b_۲\, c_۱(S_۲,\delta)\big)h + B_{۱\circ}\, c_۳(\delta)\, |h|^{\frac{۷}{۶}} \\ &\quad - \frac{۱}{۱۱} B_{\circ\circ}\, c_۴(\delta)\, |h|^{\frac{۱۱}{۶}} + O(h^۲);\ \circ < -h \ll ۱, \\ M_+(h,\delta) &= c_\circ(\delta) + B^*_{\circ\circ}\, c_۱(\delta)\, |h|^{\frac{۵}{۶}} + \big(c_۲(\delta) + b^*_۱\, c_۱(S_۱,\delta) + b^*_۲\, c_۱(S_۲,\delta))h + B^*_{۱\circ}\, c_۳(\delta)\, |h|^{\frac{۷}{۶}} \\ &\quad + \frac{۱}{۱۱} B^*_{\circ\circ}\, c_۴(\delta)\, |h|^{\frac{۱۱}{۶}} + O(h^۲);\ \circ < h \ll ۱, \end{aligned} \tag{۹.۱}$$

که در آن $b_۱, b_۲, b^*_۱, b^*_۲ \in \mathbb{R}$ و ثابت‌های $B_{\circ\circ} > \circ, B^*_{\circ\circ} < \circ, B_{۱\circ} > \circ, B^*_{۱\circ} < \circ$ دقیقا همان اعدادی هستند که در قضیه ۲.۲.۱ در فصل نتایج مقدماتی و اصلی و در بخش نتایج مقدماتی داده می‌شوند. ضرایب سراسری $c_\circ(\delta)$ و $c_۲(\delta)$ از فرمول‌های زیر به دست می‌آیند

$$c_\circ(\delta) = \oint_{L_\circ} q\,dx - p\,dy, \tag{۱۰.۱}$$

$$\begin{aligned} c_۲(\delta) &= \oint_{L_{\circ۱} = L_\circ \cap U_۱} (p_x + q_y - \sigma_۱)\,dt + \oint_{L_{\circ۲} = L_\circ \cap U_۲} (p_x + q_y - \sigma_۲)\,dt \\ &\quad + \int_{L_{\circ۳} = L_\circ - (L_{\circ۱} + L_{\circ۲})} (p_x + q_y)\,dt, \end{aligned} \tag{۱۱.۱}$$

که در آن $\sigma_۱ = (p_x + q_y)|_{S_۱}$، $\sigma_۲ = (p_x + q_y)|_{S_۲}$ و U_i، $i = ۱, ۲$ دیسکی به مرکز S_i و قطر $\varepsilon_\circ > \circ$ است و

$$L_{\circ۳} = L_\circ - (L_{\circ۱} + L_{\circ۲}),\ L_{\circ i} = L_\circ \cap U_i,\ i = ۱, ۲.$$

ضرایب موضعی $c_۱(\delta)$ ، $c_۳(\delta)$ و $c_۴(\delta)$ نیز همانند قبل تعریف می‌شوند.

در حالت خاص اگر $c_۱(S_۱,\delta) = c_۱(S_۲,\delta) = \circ$، آن‌گاه $\sigma_۱ = \sigma_۲ = \circ$ و داریم

$$c_۲(\delta) = \oint_{L_\circ} (p_x + q_y)dt = \sum_{i=۱}^{۲} \int_{L_i} (p_x + q_y)dt \triangleq \sum_{i=۱}^{۲} c_۲(L_i, \delta). \tag{۱۲.۱}$$

قضیه ۴.۲.۱

فرض کنید شرایط بیان شده در قضیه ۳.۲.۱ برقرار باشند و علاوه بر این، $\delta_0 \in \mathbb{R}^m$ و $2 \leq l \leq 4$ موجود باشند به طوری که

$$c_j(\delta_0) = 0,\ j = 0, 1, ..., l-1,\ c_l(\delta_0) \neq 0,$$
$$rank\, \frac{\partial(c_0, c_1, ..., c_{l-1})}{\partial(\delta_1, ..., \delta_m)}\Big|_{\delta=\delta_0} = l.$$

در این صورت مقادیری از پارامتر (ε, δ) در نزدیکی $(0, \delta_0)$ وجود دارند که به ازای آن‌ها سیستم (۱.۱) دارای $[\frac{3l+1}{2}]$ سیکل حدی در نزدیکی L_0 است.

حالت پنجم را در نظر بگیرید. فرض کنید سیستم (۱.۲) یک حلقه‌ی هتروکلینیک دارد که توسط معادله‌ی $H(x, y) = 0$ داده می‌شود و با $L_0 = L_1 \cup L_2 \cup \{S_1, S_2\}$ مشخص می‌شود، در اینجا S_1, S_2 به ترتیب گوشه و زین هذلولوی را نمایش می‌دهند و L_1 و L_2 نیز مدارهای هتروکلینیک هستند که به گوشه S_1 و زین هذلولوی S_2 متصلند با این خاصیت که

$$\omega(L_1) = \alpha(L_2) = S_2,\ \omega(L_2) = \alpha(L_1) = S_1.$$

در این‌صورت دو تبدیل

$$T_i : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_i \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix};\ i = 1, 2$$

وجود دارند، که در آن T_i یک ماتریس 2×2 با شرط $det\, T_i = 1$ است، به طوری که دستگاه (۱.۱) تحت آن‌ها در مختصات جدید به شکل زیر در می‌آید

$$\dot{u} = \frac{\partial H_i}{\partial v} + \varepsilon\, p_i(u, v, \delta), \qquad \dot{v} = -\frac{\partial H_i}{\partial u} + \varepsilon\, q_i(u, v, \delta), \tag{۱۳.۱}$$

که در آن

$$H_1(u, v) = \frac{v^2}{2} + \sum_{k+j\geq 3} \tilde{h}_{kj}\, u^k v^j;\ \tilde{h}_{30} < 0,$$
$$H_2(u, v) = \frac{\lambda}{2}(v^2 - u^2) + \sum_{k+j\geq 3} \bar{h}_{kj}\, u^k v^j,\ \lambda \neq 0,\ \bar{h}_{30} < 0,$$
$$p_1(u, v, \delta) = \sum_{i+j\geq 0}^{n} \tilde{a}_{ij}\, u^i v^j,\ q_1(u, v, \delta) = \sum_{i+j\geq 0}^{n} \tilde{b}_{ij}\, u^i v^j,$$

$$p_2(u,v,\delta)=\sum_{i+j=0}^{n}\bar{a}_{ij}\,u^iv^j,\ q_2(u,v,\delta)=\sum_{i+j=0}^{n}\bar{b}_{ij}\,u^iv^j.$$

بر اساس سیستم جدید (۱۳.۱) و فرمول‌های داده شده در قضیه ۱.۲.۱ می‌توان ضرایب موضعی $c_1(\delta)$، $c_3(\delta)$ و $c_4(\delta)$ را معرفی نمود. به عنوان مثال برای معرفی $c_1(\delta)$ تعریف می‌کنیم

$$c_1(S_1,\delta)=2\sqrt{2}\tilde{h}_{30}^{-\frac{1}{3}}(\tilde{a}_{10}+\tilde{b}_{01}),\ c_1(S_2,\delta)=-\frac{\bar{a}_{10}+\bar{b}_{01}}{|\lambda|}.$$

بنابراین، $c_1(\delta)=c_1(S_1,\delta)+c_1(S_2,\delta)$.
ضریب موضعی $c_3(\delta)$ نیز به صورت $c_3(S_1,\delta)+c_3(S_2,\delta)$ تعریف می‌شود که در آن

$$\begin{aligned}c_3(S_1,\delta)&=2\sqrt{2}\tilde{h}_{30}^{-\frac{5}{3}}\Big(\tilde{h}_{30}\,(2\tilde{a}_{20}+\tilde{b}_{11}-\tilde{h}_{12}(\tilde{a}_{10}+\tilde{b}_{01}))+\frac{1}{3}(h_{21}^2-2\tilde{h}_{40})\,(\tilde{a}_{10}+\tilde{b}_{01})\Big),\\ c_3(S_2,\delta)&=\frac{-1}{\lambda|\lambda|}(\bar{a}_{21}+\bar{b}_{12})-\frac{1}{\lambda}\Big(\bar{h}_{12}(2\bar{a}_{20}+\bar{b}_{11})+\bar{h}_{21}(\bar{a}_{11}+2\bar{b}_{02})\Big)+\bar{b}\,c_1(S_2,\delta).\end{aligned}$$

ضریب موضعی $c_4(\delta)$ نیز به نحو مشابه تعریف می‌شود.
فرض کنید

$$\begin{aligned}\tilde{c}_0(\delta)&=c_0(\delta),\\ \tilde{c}_1(\delta)&=c_1(S_1,\delta),\\ \tilde{c}_2(\delta)&=c_1(S_2,\delta),\\ \tilde{c}_3(\delta)&=c_2(\delta),\\ \tilde{c}_4(\delta)&=c_3(S_1,\delta),\\ \tilde{c}_5(\delta)&=c_3(S_2,\delta),\\ \tilde{c}_6(\delta)&=c_4(S_1,\delta).\end{aligned}$$

در این‌صورت با فرض برقراری شرایط بالا، دو قضیه زیر را داریم.

قضیه ۵.۲.۱

فرض کنید در همسایگی L_0 یک خانواده از مدارهای تناوبی وجود دارد که با $L_h: H(x,y)=h$، $0\leq -h\ll 1$، داده می‌شود. تعریف کنید $M(h,\delta)=\oint_{L_h}q\,dx-p\,dy$. در این‌صورت بسط مجانبی زیر را برای $0\leq -h\ll 1$ داریم

$$M(h,\delta)=\tilde{c}_0(\delta)+B_{00}\,c_1(S_1,\delta)\,|h|^{\frac{5}{6}}+c_1(S_2,\delta)\,h\,\ln|h|+\Big(\tilde{c}_3(\delta)+b_1\,\tilde{c}_1(\delta)+b_2\,\tilde{c}_2(\delta)\Big)h$$

$$+B_{10}\, c_3(S_1,\delta)\, |h|^{\frac{7}{6}} + c_3(S_2,\delta)\, h^2 \ln|h| - \frac{1}{11} B_{00}\, c_4(S_1,\delta)\, |h|^{\frac{11}{6}} + O(h^2), \qquad (14.1)$$

که در آن b_1 و b_2 اعداد ثابتی هستند و ثابت‌های B_{00} و B_{10} در قضیه ۳.۲.۱ داده شده‌اند. ضرایب سراسری $c_0(\delta)$ و $c_2(\delta)$ نیز از فرمول‌های زیر به دست می‌آیند

$$c_0(\delta) = M(0,\delta) = \oint_{L_0} (q\,dx - p\,dy) = \sum_{i=1}^{2} \int_{L_i} (q\,dx - p\,dy) \triangleq \sum_{i=1}^{2} c_0(L_i,\delta),$$
$$c_2(\delta) = \sum_{i=1}^{2} \int_{L_{0i}} (p_x + q_y - \sigma_i)dt + \int_{L_{03}} (p_x + q_y)dt,$$

که در آن $\sigma_i = (p_x + q_y)|_{S_i}$، $L_{0i} = L_0 \cap U_i$ $i = 1, 2$ ، $L_{03} = L_0 - (L_{01} + L_{02})$ که U_i دیسکی به مرکز S_i و قطر ثابت $1 \gg \varepsilon_0 > 0$ است.

به علاوه، اگر $c_1(S_1,\delta) = c_1(S_2,\delta) = 0$، آن‌گاه $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ و در نتیجه

$$c_2(\delta) = \oint_{L_0} (p_x + q_y)dt = \sum_{i=1}^{2} \int_{L_i} (p_x + q_y)dt.$$

قضیه ۶.۲.۱

فرض کنید $\delta_0 \in \mathbb{R}^m$ و $2 \leq l \leq 6$ موجود باشند به طوری که

$$\tilde{c}_j(\delta_0) = 0,\ \ j = 0, 1, ..., l-1,\ \ \tilde{c}_l(\delta_0) \neq 0,$$

$$rank\, \frac{\partial(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, ..., \tilde{c}_{l-1})}{\partial(\delta_1, ..., \delta_m)}\Big|_{\delta=\delta_0} = l.$$

در این صورت مقادیری از پارامتر (ε, δ) در نزدیکی $(0, \delta_0)$ وجود دارند که به ازای آنها سیستم (۱.۱) دارای l سیکل حدی در نزدیکی L_0 است.

این پایان نامه در ۴ فصل ارائه شده است. همانطور که ملاحظه شد فصل اول به بیان تاریخچه و اهداف این پایان نامه اختصاص داشت. در ادامه و در فصل دوم به بیان مفاهیم،تعاریف و قضایای پایه خواهیم پرداخت. در فصل سوم ابتدا به بیان برخی نتایج مقدماتی مورد نیاز خواهیم پرداخت. این نتایج نقش اساسی در فهم و اثبات قضایای اصلی این پایان نامه دارند، سپس به بیان اثبات قضایای اصلی این پایان نامه می‌پردازیم. در نهایت فصل چهارم در مورد سیکل‌های حدی از یک دستگاه همیلتونی Z_3-هم‌پایا است که به عنوان کاربردی از مطالب بیان شده در بخش دوم از فصل سوم ارائه می‌گردد.

در ضمن در این پایان نامه برای انجام برخی محاسبات از نرم‌افزار $Mathematica$ استفاده شده است که این برنامه‌ها