٢٣٠٦٢-٢-١٢٩٢٩

دانشگاه قم

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی

عنوان:

جریان چندکالائی زمانی: الگوریتم‌های کارا و پیچیدگی آنها

استاد راهنما:

دکتر غلامحسن شیردل

استاد مشاور:

دکتر علی اصغر فروغی

نگارنده:

مسعود فلاح

۳۳۸۸/۹/۲

مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران
تهیه مدارک

تابستان ۱۳۸۸

۱۲۵۹۲۹

جمهوری اسلامی ایران
رت علوم، تحقیقات و فنّاوری
دانشگاه قم

تاریخ: .....
شماره: .....
پیوست: .....

بسمه تعالی

« صورت جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد»

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر «عجل الله تعالی فرجه الشریف» جلسه دفاعیه پایان نامه کارشناسی ارشد آقای **مسعود فلاح** رشته : **ریاضی**

تحت عنوان : جریان چندکالایی زمانی : الگوریتم های کارا وپیچیدگی آنها

با حضور هیأت داوران در محل دانشگاه قم در تاریخ ۱۳۸۸/۶/۳۱تشکیل گردید

دراین جلسه، پایان نامه با موفقیت مورد دفاع قرار گرفت و نامبرده با عدد ۱۸/۷۵ با حروف هجده و هفتاد و پنج صدم با درجه : عالی ☒ بسیار خوب ○ خوب ○ قابل قبول ○ دریافت نمود.

نام و نام خانوادگی	سمت	مرتبه علمی	امضاء
غلامحسن شیردل	استاد راهنما	استادیار	
علی اصغرفروغی	استاد مشاور	استادیار	
عزیز ا... معماریانی	استاد ناظر	استاد	
مهدی احمدی نیا	استاد ناظر	استادیار	
احمد فقیهی آفارانی	نماینده کمیته تحصیلات تکمیلی	استادیار	

۱۳۸۸/۹/۲

معاون آموزشی و پژوهشی دانشکده
نام و امضاء:
فقیهی

مدیر امور آموزش و تحصیلات تکمیلی
نام و امضاء:

نشانی:
قم، جاده قدیم اصفهان،
دانشگاه قم
کدپستی: ۳۷۱۶۱۴۶۶۱۱
تلفن: ۲۸۵۳۳۱۱
دورنویس:
رونت آموزشی ۲۸۵۵۶۸۴
رونت اداری ۲۸۵۵۶۸۶
رونت دانشجویی ۲۸۵۵۶۸۸

تقدیم به:

صادق‌ترین آموزگار زند گیم، پدر مهربانم

و

فروزان‌ترین شعله محبت، مادر عزیزم

تشکر و قدردانی:

- با تشکر از استاد گرانقدر *جناب آقای دکتر غلامحسن شیردل* که راهنمایی رساله را به عهده داشتند و بنده را در نگارش این پایان‌نامه یاری فرمودند.
- با تشکر از استاد ارجمند *جناب آقای دکتر علی اصغر فروغی* که مشاوره رساله را بر عهده داشتند.
- با تشکر از *خانواده‌ام* که صادقانه مرا در سخت‌ترین لحظات یاری نمودند.

چکیده

تغییر جریان در زمان ویژگی مهمی است که درکاربردهای زیادی مثل کنترل ترافیک راهها و سیستم های تولید و شبکه های ارتباطی (مانند اینترنت) با آن روبرو می شویم. ویژگی مشترک مسائل شبکه های جریان وزنها و ظرفیتهایی است که برای کمانهای شبکه تعریف شده اند، که مقدارزمان لازم برای عبور جریان از یک کمان را مشخص می کند. علاوه بر این برخلاف مسائل با جریان ثابت، مقادیرجریان روی کمانها ممکن است درطول زمان تغییرکند. درحالیکه مسائل ماکزیمم s-t جریان به طورمؤثر قابل حل است، ولی مسائل جریان با کمترین هزینه زمانی $NP - Hard$ می باشد.

پیچیدگی جریانهای چندکالایی برای سالها یک مساله باز بود، ما ثابت می کنیم این مساله $NP - Hard$ است. برای تعدادی از شبکه های موازی زمانی برحسب توپولوژی که برای آن تعریف می کنیم، الگوریتم موثری ارائه می کنیم. درنتیجه می توانیم ازمنظر پیچیدگی تصویر کاملی برای مسائل جریان متغیر درطول زمان ترسیم کنیم.

کلمات کلیدی: جریان در شبکه، جریان در زمان، مسیریابی، جریان پویا، پیچیدگی، الگوریتم کارا.

فهرست

فصل اول

مقدمه

۱-۱ الگو..... ۷
۱-۲ نتایج بدست آمده از تحقیقات انجام شده..... ۸

فصل دوم

مقدمات و تعریفات

۲-۱ گراف..... ۱۶
- ۲-۱-۱ مولفه های همبند یک گراف..... ۱۷

۲-۲ درخت..... ۱۷
- ۲-۲-۱ درخت دودویی..... ۱۸
- ۲-۲-۲ درخت جستجوی دودویی..... ۱۹

۲-۳ جریانهای چند کالایی..... ۱۹
- ۲-۳-۱ جریان ثابت..... ۲۰
- ۲-۳-۲ جریان در طول زمان..... ۲۱
- ۲-۳-۳ سریعترین جریان..... ۲۳
- ۲-۳-۴ مسائل تک کالایی..... ۲۵
- ۲-۳-۵ مسئله انتقال..... ۲۶
- ۲-۳-۶ بیان مسئله..... ۲۶

۲-۴ گرافهای مبسوط زمانی..... ۲۸

۲-۵ گرافهای سری دو ترمینالی..... ۲۹

۲-۶ جریان مکرر موازی..... ۳۱

فصل سوم

شبکه ها

۳-۱ *شبکه با طول مسیر یکنواخت* ۳۵

○ ۳-۱-۱ کارایی الگوریتم ها ۴۱

۳-۲ *جریان ثابت با طول کرندار* ۴۷

۳-۳ *الگوریتم* $(2+\varepsilon)$ *- تقریبی ساده* ۵۱

۳-۴ *اجتناب از محاسبه جریان با طول کرندار* ۵۴

فصل چهارم

شبکه ها با درجه خروجی بیش از یک

۴-۱ *مقدمه* ۵۹

۴-۲ *محدودیت برای مسائل با درجه خروجی بیش از یک* ۶۰

۴-۳ *جریان ورودی نخستین* ۶۱

۴-۴ *ویژگی حریصانه* ۶۲

○ ۴-۴-۱ مقدماتی درباره الگوریتم حریصانه ۶۲

○ ۴-۴-۲ ویژگی های حریصانه ۶۳

○ ۴-۴-۳ الگوریتم حریصانه ۶۴

۴-۵ *کاربرد الگوریتم حریصانه در پیکر بندی قابل قبولی* ۶۹

فصل پنجم

پیچیدگی جریان چند کالایی

۵-۱ مقدماتی در باره

پیچدگی..... ۷۷

۵-۲ نتایج $NP-Hard$ ضعیف..... ۸۱

- ۵-۲-۱ پیچیدگی مسائل جریان چند کالایی..... ۸۲
- ۲-۲-۲ *np-hard* برای حالت خاص دو کالایی..... ۸۶

۵-۳ نتایج $NP-Hard$ قوی ۹۳

۵-۴ نبود $FPTAS$ برای مسائلی با مسیر جریان ساده و نبود منبع میانی..... ۱۰۱

نتیجه گیری ۱۰۳

ضمیمه ۱۰۴

منابع وماخذ ۱۰۶

فهرست شکل ها

شکل ۲-۱..... ۲۶

شکل ۲-۲..... ۳۱

شکل ۳-۱..... ۳۶

شکل ۳-۲..... ۴۴

شکل ۵-۳..... ۴۶

شکل ۳-۴..... ۵۳

شکل ۳-۵..... ۵۵

شکل ۲-۶..... ۵۸

شکل ۵-۱..... ۸۳

شکل ۵-۲..... ۸۶

شکل ۵-۳..... ۸۷

شکل ۵-۴..... ۹۲

شکل ۵-۵..... ۹۵

شکل ۵-۶..... ۹۸

فصل اول

مقدمه

۱–۱ الگو

۱–۲ نتایج به دست آمده از تحقیقات انجام شده

مشخصه بارز جریان های شبکه در کاربردهای جهان واقعی از تغییرات زمانی نشأت می گیرد. این ویژگی توسط شبکه ایستای کلاسیک نشأت گرفته از مدلهای شناخته شده را شامل نمی شود. علاوه بر موارد ذکر شده، بخش مجزا از مقادیر جریان بروی کمانی که ممکن است سبب تغییرات زمانی شود، تحت تاثیر قرار می گیرد. ابعاد زمانی دیگری در بسیاری از کاربردها وجود دارد، که معمولا جریان ها در مسیر لحظه ای طی یک شبکه وجود نداشته، اما نیازمند مقدار اصلی از زمان برای مسیر کلی در کل هر کمان می باشد. بنابراین نه تنها مقدار جریانها انتقال داده می شود، بلکه همچنین برای ارسال اطلاعات درقوانین اساسی نیازمند زمان می باشد. مثالهای جالب و متنوعی را می توان در مقاله هایی همچون ارسون[۱] [۱] وپاول[۲] وجائلیت[۳] و آدونی[۴] [۱۸] پیدا کرد.

۱-۱ الگو

فورد[۵] و فریکسون[۶] [۹,۸] مفهوم جریان زمانی را (همچنین جریان پویا نامیده می شود) تعریف کرده،که از هر دو ویژگی زمانی که در بخش بالا اشاره شده، تشکیل یافته است. آنها شبکه (منحنی جهت دار) $G = (V, E)$ با ظرفیت U_e و زمان انتقال T_e را بروی کمان e $(e \epsilon E)$

---

[۱] *Aronson*
[۲] *Powell*
[۳] *Jaillet*
[۴] *Odoni*
[۵] *Ford*
[۶] *Fulkerson*

بررسی می کنند. جریان زمانی T_e مشخص کننده مقدار زمانی است که جریان از ابتدا به انتهای کمان می رسد. در مقایسه با نمونه کلاسیک از جریانات ثابت یک جریان زمانی درچنین شبکه ای مشخص کننده میزان جریان ورودی به یک کمان در هر لحظه از زمان می باشد. بر این اساس برای درک شهودی از جریانات زمانی، فرد می تواند کمانهای شبکه را با لوله های خالی در سیستم خط لوله برای حمل و نقل بعضی از انواع شاره ارتباط دهد. طول هر خط لوله مشخص کننده میزان انتقال از کمان متناظر بوده، در حالیکه پهنای آن مشخص کننده ظرفیت آن می باشد. تعریف دقیق جریان زمانی در فصل دوم بیان گردیده است.

۱–۲ نتایج به دست آمده از تحقیقات انجام شده

فورد و فریکسون [۹,۸] مشاهده کردند مساله جریان زمانی در شبکه ارائه شده با زمانهای انتقال بروی کمانها می تواند به یک مساله جریان ثابت در شبکه مبسوط زمانی متناظر تبدیل شود. شبکه مبسوط زمانی شامل یک کپی از مجموعه گره ها از شبکه اصلی برای هر زمان گسسته در مرحله θ می باشد. علاوه بر این برای هر کمان e با زمان انتقال T_e در شبکه ارائه شده، یک کپی مابین هر جفت از لایه های زمانی از فا صله T_e در شبکه مبسوط زمانی وجود دارد. بنابراین یک جریان گسسته زمانی در شبکه ارائه شده، می تواند تفسیری به عنوان جریان ثابت در تطبیق شبکه مبسوط زمانی باشد. زیرا این ارتباط داخلی در هردو مسیر عملکرد داشته، مفهوم شبکه مبسوط زمانی اجازه به حل انواع مسائل شارش در زمان را بوسیله به کارگیری تکنیکهای الگوریتم توسعه یافته برای جریان شبکه ثابت را می دهد. برای مثال [۷] را ببینید.

توجه داشته باشید به هر حال شخص باید در پرداختن به ساده سازی مسائل جریان در نظرگرفته شده، از روش افزایش در مقدار و اندازه شبکه استفاده کند. به خصوص، اندازه شبکه

مبسوط زمانی تنها شبه چند جمله ای در اندازه داده های ورودی بوده و بنابراین به صورت مستقیم منجر به تاثیرات الگوریتم ها برای محاسبه شارش زمانی نمی شود.

فورد و فریکسون الگوریتم موثری برای مساله مربوط به فرستادن ماکزیمم جریان ممکن از طریق منبع s به مقصد t طی خط افق زمانی مفروض T، ارائه کردند. این مسائل می توانند اساسا توسط جریان با کمترین هزینه در محاسبه شبکه ارائه شده حل گردند. فورد و فریکسون نشان دادند جواب بهینه برای مسائل جریان با کمترین هزینه می تواند به ماکزیمم جریان در زمان به وسیله نخستین تجزیه آن درجریانات بر مسیرهای $s - t$ تبدیل شود. جریان آغازی زمانی برای ارسال جریان در هرمسیر در زمان صفر وحفظ ارسال جریان در امتداد هر مسیر بوده ،به شرط آنکه زمان کافی باقی مانده در زمان T برای جریان در امتداد مسیری برای رسیدن به مقصد ومنبع وجود داشته باشد. ویژگی جریان زمانی این ساختار تکرار زمانی نامیده می شود.

این مساله ارتباط نزدیکی با مسئله ای که توسط فورد و فریکسون توصیف شده که مساله سریعترین $s - t$ جریان می باشد، قرار دارد. در اینجا به جای تثبیت خط افق زمانی T وگرفتن جریان در زمان مربوط به مقدار ماکزیمم، مقدار جریان (تقاضا شده) ثابت و T کاهش می یابد. این مساله می تواند در چند جمله ای زمانی با ادغام الگوریتم فورد و فریکسون در شبکه ارتباطی بررسی های دو تایی حل شود. با استفاده از روش مجیدو[۱] در بررسی های پارامتری [۱۷] ، بارکارد[۲] ، دلاسکا [۳] و کلینز[۴] [۱۷]، ارائه کننده الگوریتم سریع بودند، که مساله سریعترین $s - t$ جریان در چند جمله ای زمانی قوی را حل می کند.

---

[۱] *Megiddo*
[۲] *Burcard*
[۳] *Dulska*
[۴] *Klinz*

هوپ[1] و تردوس[2] [۱۳,۱۴] به مطالعه سریعترین جابجائی پرداخته، که به پرسش در مورد جریان زمانی، که درارائه عرضه ها و تقاضاها در گره های از شبکه طی زمان مینیمم صدق می کند، پرداخته اند. به طور شگفت انگیز این مساله سختر از مرحله خاصی با منبع و مخزن منفرد آشکار می گردد. هوپ و تردوس الگوریتم چند جمله ای زمانی را برای این مساله ارائه می کنند. اما این الگوریتم متکی بر کاهش عملکرد توابع زیر پیمانه بوده و بنابراین دارای کمترین تاثیر می باشد. برای مثال الگوریتم فورد و فریکسون برای ماکزیمم $s-t$ جریان در زمان می باشد. با کمال تعجب ،کلینر و وقیفنر [۱۵] ثابت کردند که مسله تخمین هزینه مینیمم $s-t$ جریان در زمان با معیار ارزش تعیین شده و خط افق زمانی $NP-Hard$ می باشد. از طرف دیگر این مساله می تواند در شبه چند جمله ای زمانی توسط محاسبه کاهش هزینه جریان ثابت در شبکه مبسوط زمانی حل شود. کلینر و وقیفنر همچنین خاطر نشان کردند که رده جریان تکرار زمانی در یک حالت کلی شامل کاهش هزینه $s-t$ جریان در زمان نمی باشد. در حقیقت آن برای محاسبه جواب تکرار زمانی با مینیمم هزینه قویا $NP-Hard$ می باشد[۱۵].

فلیچر[3] وسلکاتلا[4] [۴,۵,۶] به معرفی نوع فشرده از شبکه های مبسوط زمانی که بر اساس گسسته سازی تقریبی زمانی بوده می پردازند. بنابراین منجر به شبکه هایی که اندازه چند جمله ای در اندازه داده های ورودی کرندار هستند، می شود. این روش نتیجه می دهد که الگوی چندجمله ای زمانی تقریبی کامل $(FPTAS)$ برای واریانس های مختلف از مسله سریعترین جریان با هزینه، به طور ضعیف $NP-Hard$ می باشد.

---

[1] *Hoppe*
[2] *Tardos*
[3] *Felisher*
[4] *Skutlla*

بهترین نتیجه شناخته شده برای مساله به طور قوی $NP - Hard$ مربوط به محاسبه جریان سریعترین تکرار زمانی، الگوریتم $(\varepsilon + ۲)$- تقریبی با مینیمم هزینه می باشد که بر اساس جریان ثابت با طول کرندار محاسبه می شود.

لوی[۱] و زاکس[۲] [۱۶] به بررسی مسئله ای که در ارتباط نزدیک با مساله جریان زمانی در حوزه بندی پیامهای شبکه های هم زمان می باشد، می پردازند. این نتایج شباهت مشابهی به نتایج ارائه شده در فصل چهارم دارد. جزئیات بیشتر درباره ی این بحث در فصل چهار ارائه می شود.

نتایج [۴,۵,۶] همچنین برای بیشتر مراحل کلی با کالاهای چندگانه برقرار است. مدل جریان چند کالایی سبب انتقال چندین انواع مجزا از جریان طی شبکه منفرد می گردد. نتایج معمولا سختر از معادل تک کالایی منفرد می باشد، برای مثال تنها الگوریتم چندجمله ای زمانی شناخته شده برای چند کالایی ثابت در روند محاسبه نیازمند روشهای کلی برنامه نویسی کلی خطی (روش بیضی گون[۳] یا روش نقطه درونی) می باشد.

---

[۱] *Lui*
[۲] *Zaks*

[۳] **روش بیضی گون**

روش بیضی گون یک الگوریتم عملی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی به دست نمی دهد، بلکه از نظر تئوری نشان می دهد که مساله برنامه ریزی خطی به طور کارا قابل حل است. این نتیجه مهم است ،چون وقتی که حل پذیری کارای یک مساله ثابت شد، آنگاه می توانیم الگوریتم های عملی وخیلی کاراتری تهیه کنیم. در واقع رده جدیدی از الگوریتم ها معروف به روش نقطه درونی وجود دارند که هم عملی هستند و هم کارایی تئوری آنها ثابت شده است. بقیه در صفحه بعد. . .

پیچیدگی مسائل جریان چند کالایی در زمان (بدون هزینه) برای مدتی در حال بحث است (مسئله نشدنی است). هوپ[۱۳] مسئله گسترش الگوریتم چندجمله ای زمانی را برای حل جریان چند کالایی کسری در زمان را مطرح کرد. ما ثابت می کنیم چنین الگوریتمی وجود ندارد، مگر اینکه $P = NP$ باشد. در حقیقت مساله جریان چند کالایی در زمان $NP - Hard$ بوده، تا زمانیکه محدود به شبکه ها در ردیف های موازی یا در مرحله مربوط به تنها دو کالایی باشد.

جریان در زمان مهمترین موضوعی است که از جریان شبکه های استاندارد نشأت گرفته نمی شود. در بیشتر کاربردها (همچون برای مثال مسیر ترافیک، طرح تخلیه، ارتباط از راه دور) ذخایر محدود طراحی نشده یا حتی مانع در گره های میانی می گردد.برای مسائل تک کالایی ذخیره کردن ضروری نبوده، حتی در مسائل $NP - Hard$ با هزینه نیز ضرورتی ندارد. اگرچه برای مساله سریعترین جریان چندکالایی، مثالهایی وجود داشته که در چه مکانی خط افق زمانی جواب بهینه توسط فاکتور $\frac{۴}{۳}$ افزایش یافته، زمانیکه ذخیره جریان در گره های میانی منع گردیده شود.ما اثبات خواهیم کرد که مساله جریان چند کالایی در زمان با ساده ترین مسیر جریان وبدون ذخیره از جریان در گره های میانی قویا $NP - Hard$ می باشد،بدون محدودیت اخیر مسئله می تواند توسط شبه چندجمله ای زمانی همانند مساله جریان چندکالایی ثابت در شبکه مبسوط زمانی حل شود.

روش بیضی گون نشان می دهد که برنامه ریزی خطی را می توان از نظر تئوری به طور کارا حل کرد. در این مفهوم روش بیضی گون را می توان ابزاری برای دسته بندی پیچیدگی مسائل برنامه ریزی خطی درنظر گرفت.

بهترین نتایج شناخته شده برای نوع دیگر $NP-Hard$ قوی با مسیر جریان ساده و نبود ذخایر میانی الگوریتم ۲-تقریبی برای سریعترین جریان چند کالایی می باشد. برای مطالعه پیچیدگی از دیدگاه جریان در زمان جدول ۱را مطالعه کنید. جزئیات تکنیکی از برهانهای $NP-Hard$ درفصل پنجم ارائه شده است.

جدول ۱–۱ دورنمای پیچیدگی مربوط به شارش زمانی در مقایسه با جریان ثابت متناظر. ستون سوم "انتقال" ارجاع می دهد به شارش تک کالایی با چندین گره منبع ومقصد.نتایج $NP-Hard$ که با علامت "*" مشخص شده اند،در فصل چهارم اثبات شده اند.نتایج $NP-Hard$ ضعیف حتی برای شبکه های سری موازی برقرار است.ازطرفی ما ثابت می کنیم این مسائل می توانند به طور موثر در شبکه های درختی و شبکه های دوتایی با طول مسیر یکنواخت حل شوند.نتایج داخل گیومه برای مساله سریعترین جریان متناظر برقرارند.

	s-t-flow	transshipment	min-cost flow	multicommodity flow
(static) flow	poly	poly (≃ s-t-flow)	poly	poly (≃ LP)
flow over time with storage	poly [8] (≃ min-cost flow)	poly [14] (≃ subm. func.)	pseudo-poly NP-hard [15] FPTAS [6,4]	pseudo-poly NP-hard* FPTAS [6,4]
flow over time without storage				strongly NP-hard* 2-approx. [5,4]

برای بررسی نتایج سختی جریان چندکالایی درزمان، به مطالعه شرایط خاصی با زمانهای انتقال روی کمانها و با توپولوژی شبکه تحت اینکه جریان چند کالایی در زمان می توانند در چندجمله ای زمانی محاسبه شود، پرداختیم. درفصل سه به بررسی شبکه اختیاری توپولوژی با زمانهای انتقال بر روی کمانهای که شرایط لازم را دارند، می پردازیم. تمام مسیرها در تطبیق

شبکه های دو جهت دار مابین هر جفت ثابت از گره ها زمان انتقال مشابهی دارند. این شرایط برای مثال واضح است که قانع کننده برای اهمیت آن بوده، اما برای دلایل غیر مهم شبکه های درختی ضرورتی ندارد. نشان خواهیم داد که بسیاری مسائل جریان چندکالایی در زمان می تواند (تحت این فرضیه) به عنوان مساله جریان ثابت در نوع دیگری از اندازه های چند جمله ای درشبکه های مبسوط زمانی با لایه های $O(n)$:$=n$ $|v|$ حل شوند.

اطمینان دارم که نتایج همچنین برای مسائل جریان درزمان جالب بوده، همانند مساله سریعترین انتقال که دارای پیچیدگی چند جمله ای زمانی در زمانهای انتقال دلخواه می باشد. در حالیکه الگوریتم هوپ وتردوس [۱۳,۱۴] متکی بر مدلهای کوچکی از کاهش توابع بوده، می توانیم مراحل خاصی از مسائل به عنوان مسله $s-t$ جریان ثابت در شبکه های با گره های $O(n^{۲})$ وکمانهای $O(nm)$ حل کنیم. فرضیه ارائه شده برای هر دو مجموعه با وجود و بدون ذخیره از جریان در گره های میانی کاربرد دارد.

در فصل چهارم به بررسی شبکه های با زمان انتقال آزاد جائیکه هرگره بیش از یک کمان خروجی داشته باشد، می پردازیم. علی الخصوص یک مسیر منبع- مقصد منحصربه فرد برای هر کالا درچنین شبکه هایی وجود دارد، تحت این فرضیه که ذخایر از جریان در گره های میانی امکان پذیر می باشد. ما الگوریتم حریصانه را برای مساله سریعترین جریان چند کالایی را مطرح خواهیم کرد. از زمانیکه بین چندین کالایی استفاده شده در کمانهای مشابه، برخوردی وجود داشته باشد، الگوریتم تقدم رأس را برای کالائی ارائه می کند که از مقصد دورترین باشد. ما همچنین استراتژی ساده که جواب بهینه در مرتبه چند جمله ای زمانی ارائه می کند را مطرح خواهیم کرد که برهان افکار تعمیم یافته شارش ورودی نخستین را به کار می گیرد.

فصل دوم

مقدمات وتعاریف

۲–۱ گراف

۲–۲ درخت

۲–۳ جریان های چندکالایی

۲–۴ گرافهای مبسوط زمانی

۲–۵ گراف های سری موازی دو ترمینالی

۲–۶ جریان مکرر موازی