دانشگاه پیام نور

پایان نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته آمار

دانشکده علوم

گروه علمی آمار

عنوان پایان نامه:

آزمون بیزی ریشه واحد در مدل‌های واریانس ناهمگن شرطی با استفاده از روش‌های MCMC

توسط:
خدیجه حسین پور

استاد راهنما :
دکتر فضل اله لک

استاد مشاور:
دکتر نرگس عباسی

نگارش:
دی ماه 1388

تقدیم به همسر و دختر عزیزم

قدردانی

در اینجا برخود لازم می‌دانم که از همسر و دختر عزیزم که در طی سال‌های تحصیل با گذشت و فداکاری مرا تشویق کردند، سپاسگذاری کنم. امیدوارم بتوانم گوشه‌ای از زحماتشان را جبران کنم.

از استاد راهنمای ارجمند جناب آقای دکتر فضل‌اله لک و استاد مشاور محترم سرکار خانم دکتر نرگس عباسی که با صبر و حوصله بسیار زیادی مرا در تدوین این پایان‌نامه راهنمایی نمودند تشکر و قدردانی می‌نمایم. همچنین از جناب آقای دکتر علیرضا نعمت اللهی که زحمت داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشتند، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

آزمون بیزی ریشه واحد در مدل‌های واریانس ناهمگن شرطی با استفاده از روش‌های MCMC

چکیده

پدیده خوشه‌بندی واریانس شرطی در بسیاری از سری‌های زمانی مالی مشاهده می‌شود و این پدیده را می‌توان بر اساس مدلبندی واریانس و کوواریانس شرطی متغییر در زمان تحلیل نمود.

یکی از اعضای این کلاس مدل اتورگرسیو واریانس شرطی مشاهده نشده (*UARCH*) است، که به وسیله شفارد (1996) معرفی شد. دراین مدل مؤلفه‌های *ARCH* با خطا مشاهده می‌شوند و یا ممکن است به عنوان یک فرآیند پنهان دیده شوند.

برای برآورد پارامترهای این مدل به روش بیزی با مشکلاتی روبرو هستیم و در حالت پیوسته محاسبه انتگرال‌های چندگانه بسیار مشکل و وقت‌گیر است. برای رهایی از این مشکلات با استفاده از روش‌های مونت کارلو به شبیه‌سازی از این توزیع‌ها می‌پردازیم.

در پایان با استفاده از آزمون ریشه واحد بررسی می‌کنیم آیا این مدل مانا یا نامانا است ؟ این آزمون با استفاده از نسبت پسین انجام می‌شود که از حاصلضرب نسبت پیشین و عامل بیز بدست می‌آید.

وقتی نسبت پیشین برابر با یک باشد عامل بیزی با نسبت پسین برابر است.

واژه‌های کلیدی : مدل *ARCH* مشاهده نشده، مونت کارلو، عامل بیزی، نسبت پسین.

فهرست مندرجات

فهرست اشکال

فهرست جداول

پیش‌گفتار

اخیراً مدل‌هایی با واریانس شرطی متغیر در زمان توجهات زیادی را به سمت خود جلب کرده است. رفتار سری‌های زمانی مالی همچون برگشت سرمایه و نرخ‌های ارز از طریق این مدلها به خوبی تحلیل می‌شوند. این مدلها در توضیح پدیده خوشه‌بندی واریانس شرطی که در بسیاری از داده‌های مالی رویت می‌شوند، توانا هستند. در این پایان‌نامه یکی از مدل‌های بی‌ثباتی واریانس بنام مدل اتورگرسیو واریانس شرطی مشاهده نشده بررسی می‌شود.

این پایان‌نامه شامل چهار فصل می‌باشد. در فصل اول مدل‌های سری زمانی واریانس ناهمگن شرطی را معرفی نموده و برخی از ویژگیهای آن بیان می‌شود. سپس روش‌های بیزی و مونت کارلوی زنجیر مارکوفی به همراه الگوریتم‌هایی جهت سهولت نمونه‌گیری شرح داده می‌شود. در فصل سوم مدل اتورگرسیو واریانس شرطی مشاهده نشده و کاربرد نمونه‌گیری متغیر کمکی در آن مطرح و با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی شده و داده های نرخ سهام روزانه آلمان نسبت به یونان در دوره زمانی 97/5/2-93/12/16 به بررسی مفهوم همگرایی در زنجیرها و برآورد پارامترهای این مدل پرداختیم. در فصل آخر ضمن معرفی آزمون بیزی ریشه‌واحد برای این مدل با استفاده از داده‌های واقعی و شبیه‌سازی شده این آزمون انجام می‌شود.

تاکید بیشتر این پایان‌نامه بر مدل اتورگرسیو واریانس شرطی مشاهده نشده است. از فواید این پایان‌نامه استفاده از داده‌های واقعی و شبیه‌سازی شده در جهت برآورد پارامترهای مدل مذکور و انجام آزمون ریشه‌واحد برای پارامتر b است.

فصل 1

مدلهای سری‌های زمانی واریانس ناهمگن شرطی

1-1 مقدمه:

تا سال 1980، مدل‌بندی سری‌های زمانی مالی بر گشتاور اول شرطی متمرکـز بـود و وابسـتگی‌هـای زمانی گشتاورهای بالاتر در نظر گرفته نمی‌شد. از سال 1980 به بعـد محققـان بـه مدلبنـدی براسـاس کوواریانس و واریانس متغیر در زمان علاقه‌مند شدند که این نتایج نقـش مهمـی را در اقتصـاد مـدرن بازی می‌کند. پدیده‌خوشـه‌بنـدی واریـانس شـرطی در بسـیاری از سـری‌هـای زمـانی مـالی مشـاهده می‌شود، به عنوان مثال برگشت سرمایه و نرخ های ارز بوسیله مدل‌بندی گشتاور دوم شرطی به خوبی تحلیل می‌شوند.

2-1 مدل خودبازگشتی مرتبه یک

فرض می‌کنیم $\{e_t\}$ یک دنباله نوفه سفید[1] با میانگین صفر و واریانس s_e^2 باشد، فرآینـد $\{y_t\}$ را مـدل اتورگرسیو مرتبه‌ی یک گویند هرگاه

$$y_t = m + j\, y_{t-1} + e_t. \qquad (1.\ 1)$$

---

۱ white noise

الگوی بالا در واقع یک الگوی رگرسیون است با این تفاوت که در اینجا y_t روی متغیرهـای مسـتقل رگرسیون نشده بلکه روی مقادیر گذشته‌ی y_t رگرسیون شده است و به این دلیـل اسـت کـه فرآینـد $\{y_t\}$ را اتورگرسـیو یـا خـود بازگشـتی نامیـده‌انـد. مـدل اتورگرسـیو مرتبـه‌ی یـک را بـا نمـاد اختصاری $AR(1)$ نمایش می‌دهند. این مدل همواره وارون‌پذیر است، یعنی همـواره بـدون گذاشـتن شرایطی روی j می‌توان e_t را به صورت یک ترکیـب خطـی مـوزون از مشـاهدات حـال و گذشـته فرآیند نوشت. این مدل را با توجه به عملگر انتقال پسرو B می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(B)y_t = e_t$$
$$f(B) = 1 - jB$$

جهت مانایی مدل باید ریشه‌های $f(B) = 0$ از لحاظ قـدر مطلـق بزرگتـر از واحـد باشـد کـه شـرط $|j| < 1$ را نتیجه می‌دهد. گاهی اوقات مدل $AR(1)$ را فرآیند مارکوف نیز می‌نامند.

اگر از طرفین تساوی (1.1) امید ریاضی بگیریم داریم:

$$E(Y_t) = m + jE(Y_{t-1}) + 0$$

و با فرض مانایی فرآیند، $E(Y_t) = E(Y_{t-1})$ است بنابراین

$$E(Y_t) = m + jE(Y_t) \Rightarrow E(Y_t) = \frac{m}{1-j}$$

میانگین y_t در صورتی که $j \neq 1$ باشد، وجود دارد و $E(Y_t)$ به ثابت m وابسـته اسـت. اگـر $m = 0$ خـــواهیم داشـــت $m_y = EY_t = 0$. بـــرای بـــه دســـت آوردن واریـــانس در عبـــارت $E(Y_tY_{t-k}) = E(jY_{t-1}Y_{t-k})$ مقدار $k = 0$ را قرار داده و با توجه به $E(Y_t^2) = s_y^2$ (چون میانگین

صفر است) و $E(e_tY_t)=s_e^2$ داریم، $s_y^2=jg_1+s_e^2$ از طرفـی بـه ازای $k=1$ عبـارت بـالا نتیجـه می‌دهد $g_1=jg_0=js_y^2$، پس $s_y^2=j(js_y^2)+s_e^2$ و یا

$$s_y^2=g_0=\frac{s_e^2}{1-j^2},\qquad j\neq 0$$

تعریف1 : سری زمانی را مانا می‌گویند هرگـاه تغییـرات منظمـی در میـانگین و واریـانس آن وجـود نداشته و تغییرات دوره‌ای اکید حذف شده باشند.$\{r_t\}$ یک سری زمانی مانای اکید اسـت اگـر توزیـع توأم $(r_{t_1},\mathbf{K},r_{t_k})$ مشابه با توزیع توأم $(r_{t_1+t},\mathbf{K},r_{t_k+t})$ باشد که در آن t دلخواه، k یک عـدد صـحیح مثبت دلخواه و $(t_1,\mathbf{K},t_k)$ یک مجموعه از اعداد صحیح مثبت می‌باشد. و $\{r_t\}$ مانای ضعیف اسـت اگر $E[r_t]=m$ (میانگین ثابت باشد) و $Cov(r_t,r_{t-l})=g_l$ فقط به l بستگی داشته باشـد. در اینجـا منظور از مانا همان مانای ضعیف است.

تعریف 2 : سری زمانی $\{e_t\}$ نوفه سفید نامیـده مـی‌شـود اگـر $\{e_t\}$ دنبالـه‌ای از متغیرهـای تصـادفی مستقل و هم توزیع با میانگین و واریانس متناهی باشد. به ویژه اگر e_t دارای توزیع نرمال با میـانگین صفر و واریانس s^2 باشد نوفه سفید گوسی[2] نامیده می‌شود.

3-1 مدل میانگین متحرک مرتبه یک

اگر سری زمانی $\{Z_t\}$ نوفه سفید با میانگین صفر و واریانس $\{s_z^2\}$ باشد در آن صورت سری $\{X_t\}$ را میانگین متحرک با مرتبه یک ($MA(1)$) می‌نامیم هرگاه داشته باشیم:

$$X_t=Z_t-b_1Z_{t-1}=(1-b_1B)Z_t$$

2 Gaussian white noise

این فرآیند همواره ماناست و برای این که وارون‌پذیر باشد باید $|b_1| < 1$. با توجه به $E(Z_t) = 0$ معلوم می‌شود که میانگین فرآیند صفر خواهد بود و

$$Var(X_t) = s_z^2(1 + b_1^2)$$

4-1 مدل اتورگرسیو میانگین متحرک

هر فرآیند مانا و وارون‌پذیر را می‌توان به صورت میانگین متحرک یا اتورگرسیو نوشت. در هریک از دو صورت، ممکن است پارامترهای زیادی موجود باشد. بطورکلی وجود تعداد زیادی پارامتر در الگو دقت برآورد را کاهش می‌دهد. بنابراین در ساختن یک الگو لازم است جملات اتورگرسیو و میانگین متحرک تواماً منظور شوند. به ترتیب فرآیند و واریانس آن به صورت زیر می‌باشد:

$$X_t = jX_{t-1} + Z_t - b_1 Z_{t-1}$$

$$Var(X_t) = \frac{(1 + b_1^2 - 2j b_1)}{(1 - j^2)} s_z^2 \, .$$

5-1 خوشه‌بندی واریانس شرطی

پدیده خوشه‌بندی واریانس شرطی بدین معنی است که پراکندگی داده‌ها به صورت خوشه‌ای است که به طور وضوح با رسم نمودار سری‌های برگشت سرمایه یا نرخ‌های ارز قابل رویت است. محققان زیادی این رفتار (پدیده) را با استفاده از مدل‌هایی که واریانس‌شان در طول زمان متغیراست بررسی کردند.

6-1 رده‌بندی مدل‌های دارای بی‌ثباتی واریانس[3]

چندین مدل وجود دارد که می‌توانند پدیده خوشه‌بندی واریانس شرطی را بر اساس مدلبندی واریانس و کوواریانس شرطی متغیر در زمان تحلیل کنند. در این زمینه می‌توان به شفارد[4] (1996)، بولرسلف[5]، چو[6] و کرنر[7] (1992)، گوریرو[8] (1997) مراجعه کرد. کاکس[9] (1981) این مدل‌ها را به دو رده‌ی اصلی تقسیم‌بندی کرد که عبارتند از مدل‌های مشاهده محور[10] و پارامتر محور[11]. به منظور بحث در مورد این دو رده فرض می‌کنیم:

$$y_t|y_t \sim N(\mathbf{0}, s_t^2)$$

که y_t مشاهده فرآیند تصادفی در لحظه‌ی t بوده و نماد $N(\cdot,\cdot)$ نشان دهنده توزیع نرمال و y_t شامل اطلاعات گذشته تا زمان t می‌باشد، یعنی $y_t = \{y_t, y_{t-1}, \mathbf{K}\}$. مدل‌های مشاهده محور اجازه می‌دهند که y_t تابعی از مقادیر تاخیردار[12] y_t باشد. مشهورترین این مدل‌ها، مدل اتورگرسیو مشروط به ناهمگنی واریانس[13]، انگل[14] (1982)، و مدل اتورگرسیو مشروط به ناهمگنی واریانس تعمیم‌یافته، بولرسلف (1986)، هستند.

در مدل اتورگرسیو واریانس شرطی $(ARCH)$، واریانس شرطی y_t بعنوان یک تابع خطی از توان دوم مشاهدات گذشته در نظر گرفته می‌شود:

$$s_t^2 = a_\circ + a_1 y_{t-1}^2 + \mathbf{K} + a_p y_{t-p}^2 \cdot$$

به طور مشابه در مدل $(GARCH)$، واریانس شرطی علاوه بر مشاهدات با تأخیر، به واریانس‌های

---

3 Volatility
4 Shephard
5 Bollerslev
6 Chou
7 Kroner
8 Gourieroux
9 Cox
10 Observation- driven
11 Parameter- driven
12 Lagged
13 Autoregressive Conditional Hetroscedasticity
14 Engle

اتورگرسیو شرطی با تأخیر نیز وابسته است:

$$s_t^2 = a_\circ + a_1 y_{t-1}^2 + \mathbf{K} + a_p y_{t-p}^2 + b_1 s_{t-1}^2 + \mathbf{K} + b_q s_{t-q}^2 \cdot$$

از طرف دیگر مدل‌های پارامتر محور (یا مدل‌هـای فضـا وضـعیت) y_t را بـه عنـوان یـک تـابعی از تعدادی مولفه‌های پنهان یا مشاهده‌نشده در نظر می‌گیرند. یک نمونه بارز از این کلاس، مدل بی‌ثبـاتی تصادفی[15]، تیلور[16] (1982)، است. فرم کلی این مدل به صورت

$$y_t \left| h_t \right. \sim N(\mathbf{0}, \exp(h_t))$$

$$h_t \left| a, d, h_{t-1}, s_h^2 \right. \sim N(a + d h_{t-1}, s_h^2)$$

است، که در آن $h_1, \mathbf{K}, h_t$ مشاهده نشده‌اند.

1-6-1 مدل‌های ARCH

ساده‌ترین مدل بی‌ثباتی واریانس برای حالت مشاهده محور، مدل $ARCH$ است کـه بـه‌وسـیله انگـل ارائه شده است. مدل $ARCH$ با مرتبه‌ی p به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y_t \left| \underline{a}, \underline{y}_{t-1} \right. \sim N(\mathbf{0}, s_t^2) \qquad (2.1)$$

$$s_t^2 = a_\circ + \sum_{i=1}^{p} a_i y_{t-i}^2 \qquad (3.1)$$

که y_t مقدار سـری زمـانی در لحظـه‌ی t اسـت، $\underline{a} = (a_\mathbf{0}, \mathbf{K}, a_p)$ و $\underline{y}_{t-1} = \{y_{t-1}, y_{t-2}, \mathbf{K}\}$. بـا توجه به نامنفی بودن s_t^2 بنابراین $a_1, \mathbf{K}, a_p$ باید نامنفی و $a_\mathbf{0} > \mathbf{0}$ باشد.

---

15 Stochastic Volatility

16 Taylor

قضیه 1- انگل (1982): فرآیند $ARCH(p)$ مانای ضعیف است اگر و فقط اگر همه ریشه‌های معادله مشخصه (3. 1) خارج از دایره واحد قرار بگیرند، بنابراین $\sum_{i=1}^{p} a_i < 1$.

اثبات : به مقاله انگل (1982) رجوع شود.

با توجه به این قضیه واریانس غیرشرطی وجود دارد و

$$Var(Y_t) = E(Y_t^2) = \frac{a_0}{1-\sum_{i=1}^{p} a_i}\cdot$$

وضعیت گشتاورهای مدل $ARCH(1)$ بوسیله انگل بررسی شده است. با توجه به نرمال بودن (2. 1) تمام گشتاورهای مراتب فرد صفر هستند.

به عنوان مثال در مدل $ARCH(1)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y_t = s_t e_t\,,\quad s_t^2 = a_0 + a_1 y_{t-1}^2 \qquad a_0 > 0 \quad , \quad a_1 \geq 0\cdot$$

e_t یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم توزیع و مستقل با میانگین صفر و واریانس یک است. معمولاً e_t از توزیع نرمال و یا t استودنت پیروی می‌کند:

$$E(Y_t) = E\left[E\left(Y_t \middle| y_{t-1}\right)\right] = E\left[s_t E(e_t)\right] = 0$$

که y_{t-1} شامل همه توابع خطی برگشتی گذشته است.گشتاور دوم $E(y_t^2)$ در صورتی که $a_1^2 < 1$ وجود دارد و برابر است با:

$$Var(Y_t) = E(Y_t^2) = E\left[E\left[Y_t^2 \middle| y_{t-1}\right]\right] = E\left[a_\circ + a_1 Y_{t-1}^2\right] = a_\circ + a_1 E(Y_{t-1}^2)\cdot$$

با توجه به اینکه سری ماناست بنابراین خواهیم داشت:

$$Var(Y_t) = Var(Y_{t-1}) = E(Y_{t-1}^2)$$

$$\Rightarrow \quad Var(Y_t) = \frac{a_0}{1-a_1}$$

و به همین نحو برای $ARCH(p)$ قابل اثبات است. $E(Y_t^4)$ با توجه به فرمول زیر در صورتی که $3a_1^2 < 1$ وجود دارد:

$$E(Y_t^4) = \frac{3a_\circ^2(1+a_1)}{1-a_1(1-3a_1^2)}.$$

کشیدگی توزیع غیر شرطی y_t برابر است با:

$$k(Y_t) = \frac{E(Y_t^4)}{E(Y_t^2)^2} - 3 = \frac{3(1-a_1^2)}{(1-3a_1^2)} - 3$$

برای $a_1 > 0$، کشیدگی مثبت است و این نشان می‌دهد که دم های توزیع حاشیه‌ای سنگین‌تر از توزیع نرمال است. فرض اولیه را بخاطر می‌آوریم که y_t به طور شرطی نرمال است اما بطور حاشیه‌ای نرمال نیست اگر فرض کنیم که بطور حاشیه‌ای نرمال است واریانس شرطی باید مستقل از مقادیر گذشته باشد.

2-6-1 مدل‌های GARCH

مدل $GARCH$، بولرسلف و تیلور (1986)، تعمیمی از مدل $ARCH$ است و مدل $GARCH(p,q)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y_t \,|\, \underline{a}, \underline{b}, \underline{y}_{t-1} \sim N(0, s_t^2) \qquad (4.1)$$