دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی‌ارشد

در رشته ریاضی محض، گرایش ترکیبیات

عنوان:

عدد احاطه‌ای مهارشده در گراف‌ها

استاد راهنما:

دکتر سید محمود شیخ‌الاسلامی

استاد مشاور:

دکتر بهروز خیرفام

پژوهشگر:

محبوبه خسروی

اسفندماه ۱۳۹۲

تبریز-ایران

نام خانوادگی دانشجو: **خسروی** نام: **محبوبه**

عنوان: **عدد احاطه‌ای مهارشده در گراف‌ها**

استاد راهنما: **دکتر سید محمود شیخ‌الاسلامی**
استاد مشاور: **دکتر بهروز خیرفام**

مقطع تحصیلی: **کارشناسی ارشد** رشته: **ریاضی محض** گرایش: **ترکیبیات**

دانشگاه: **دانشگاه شهید مدنی آذربایجان** **دانشکده علوم پایه**
تاریخ تصویب پروپوزال: **۱۳۹۱/۱۱/۸** تاریخ دفاع: **اسفندماه ۱۳۹۲** تعداد صفحات: **۴۱**

چکیده

فرض کنید $G = (V, E)$ گرافی با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E باشد. مجموعه D از رئوس گراف G، یک مجموعه احاطه‌گر است، هرگاه هر عضو $V - D$ با رأسی از D، مجاور باشد. مجموعه D از رئوس گراف G، یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده است، هرگاه هر رأسی که در D نیست، با رأسی از D و رأسی از $V - D$ مجاور باشد. عدد احاطه‌ای مهارشده G، $\gamma_r(G)$، مینیمم اندازه یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده در G است. در این پایان‌نامه، کران‌هایی برای $\gamma_r(G)$، پیدا کرده و گراف‌هایی را که این کران‌ها را اختیار می‌کنند، دسته‌بندی می‌کنیم و نیز یک کران بالا و پایین برای حاصلجمع $\gamma_r(G) + \gamma_r(\bar{G})$ که در آن G گرافی همبند است، ارائه می‌کنیم.

واژگان کلیدی: **عدد احاطه‌ای، عدد احاطه‌ای مهارشده.**

فهرست مطالب

پیش گفتار

در سال‌های اخیر، همزمان با رشد علوم کامپیوتر، الکترونیک و سایر علوم، نظریه گراف نیز رشد چشمگیری داشته است. مفهوم احاطه‌گری به دلیل کاربردهای فراوان آن در زمینه‌های مختلف همچون علوم کامپیوتر و شبکه‌های الکترونیکی از اهمیت خاصی برخورداراست.

مفهوم عدد احاطه‌ای مهارشده نخستین بار سال ۱۹۹۹ توسط دومکه و همکارانش [۱] در [۳] معرفی گردید. یک کاربرد مفهوم عدد احاطه‌ای مهارشده برای مسئله زندانی‌ها و زندانبان‌هاست. در اینجا، هر رأس که در مجموعه احاطه‌گر مهارشده نیست، متناظر با موقعیت یک زندانی است و هر رأس که در مجموعه احاطه‌گر مهارشده باشد متناظر با موقعیت یک زندانبان است. حال موقعیت هر زندانی، توسط موقعیت یک زندانبان قابل مشاهده است در صورتی که موقعیت هر زندانی توسط حداقل موقعیت یک زندانی دیگر دیده می‌شود. در اینجا استفاده از کمترین تعداد زندانبان ممکن، اهمیت دارد.

در فصل دوم، مقدار دقیق این پارامتر را برای گراف‌های خاصی، به دست می‌آوریم. همچنین، کرانهای بالا و پایین برای $\gamma_r(G)$ ارائه کرده و گراف‌هایی را که این کرانها را اختیار می‌کنند، دسته‌بندی می‌کنیم. نهایتا یک کران بالا و پایین برای $\gamma_r(G)+\gamma_r(\bar{G})$ که در آن G گرافی همبند است به دست می‌آوریم.

در فصل سوم، نشان می‌دهیم که اگر T درختی از مرتبه n باشد، آنگاه
$\gamma_r(T) \geq \lceil (n+2)/3 \rceil$. همچنین، درخت‌هایی که این کران را اختیار می‌کنند، مشخص می‌کنیم.

در فصل چهارم، به بررسی گراف‌هایی با عدد احاطه‌ای مهارشده بزرگ خواهیم پرداخت.

[۱] Domke

فصل ۱

تعاریف

۱.۱ مفاهیم مقدماتی

در این بخش برخی تعاریف مقدماتی نظریه گراف را که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، بیان می‌کنیم. فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E باشد.

تعریف ۱.۱.۱. دو رأس u و v **مجاورند** هرگاه $e=uv$ یالی از G باشد. هرگاه دوسر یک یال برهم منطبق باشند آن را **طوقه** و دو یال متمایز با رئوس ابتدا و انتهای یکسان را **یال‌های موازی** گویند. **گراف ساده** گرافی است که یال موازی و طوقه نداشته باشد.

تعریف ۲.۱.۱. **گراف کامل** K_n گرافی ساده از مرتبه n است که در آن هر دو رأس دلخواه باهم مجاورند. گراف فاقد یال را **گراف تهی** می‌نامند.

تعریف ۳.۱.۱. **فاصله** بین دو رأس $u,v\in V(G)$، $d_G(u,v)$ برابر طول کوتاهترین (u,v) -مسیر در G است. در صورتی‌که G شامل هیچ (u,v)-مسیری نباشد تعریف می‌کنیم $d_G(u,v)=\infty$. برای رأسی مانند v در G، **گریز از مرکز** $e(v)$ فاصله بین v و دورترین رأس از v می‌باشد. کمترین فاصله موجود بین رئوس گراف G را **شعاع** G نامیده و با $\mathrm{rad}(G)$ نشان می‌دهند و بزرگترین فاصله موجود بین رئوس گراف G را **قطر** G نامیده و با $\mathrm{diam}(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۴.۱.۱. هرگاه بین هر دو رأس متمایز گراف G مسیری موجود باشد، گراف G را **همبند** می‌نامند. گرافی که همبند نباشد، **ناهمبند** نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱. گراف همبند بدون دور را **درخت** می‌نامند.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید H و G دو گراف باشند. دراین‌صورت H را **زیر گراف** G گویند هرگاه $V(H)\subseteq V(G)$ و $E(H)\subseteq E(G)$. اگر $V(H)=V(G)$ و $E(H)\subseteq E(G)$ ، آن‌گاه H را **زیرگراف فراگیر** G می‌نامند. فرض کنید $S\subseteq V(G)$. **زیرگراف القاشده توسط** S ، زیرگرافی از G است که مجموعه رأس‌های آن S بوده و مجموعه یال‌هایش متشکل از یال‌های G است که هر دو انتهای آن‌ها در S باشد. زیرگراف القایی توسط مجموعه‌ای از یال‌ها به‌صورت مشابه تعریف می‌شود.

تعریف ۷.۱.۱. زیرگراف همبند ماکسیمال یک گراف را **مؤلفه همبندی** آن می‌نامند.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید G یک گراف باشد. زیرمجموعه S از $V(G)$، که در آن هیچ دو رأسی مجاور نباشند، **مجموعه مستقل** نامیده می‌شود. مجموعه مستقل S در G **ماکسیمال** است هرگاه هیچ مجموعه مستقلی از G شامل S موجود نباشد. مجموعه مستقل S **ماکسیمم** نامیده می‌شود هرگاه هیچ مجموعه مستقل S' با شرط $|S|<|S'|$ موجود نباشد. تعداد رئوس یک مجموعه مستقل ماکسیمم در گراف G را **عدد استقلال** G نامیده و با $\alpha(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۹.۱.۱. یک مجموعه مستقل از یال‌ها در گراف G را **جورسازی** نامیده و اندازه جورسازی ماکسیمم را **عدد جورسازی** گویند و با $\alpha'(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید G همبند بوده و $D \subseteq V(G)$. اگر $G-D$ بیش از یک مؤلفه داشته باشد، آن‌گاه D را یک **برش رأسی** از G گویند. مینیمم اندازه یک برش رأسی D از G را، به طوری که $G-D$ ناهمبند بوده یا گراف بدیهی باشد، **عدد همبندی** G نامیده و با $\kappa(G)$ نشان می‌دهند. گراف G، **$\mathbf{k}$-همبند** است اگر عدد همبندی آن حداقل k باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. مینیمم تعداد یال‌هایی را که در گراف G باید حذف شوند تا گراف ناهمبند شود، **عدد یال-همبندی** نامیده و با $\kappa'(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۲.۱.۱. مجموعه تمام رئوس مجاور با رأس v در G را **همسایگی باز** v نامیده و با $N_G(v)$ نشان می‌دهند. **همسایگی بسته** v عبارتست از

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}.$$

تعریف ۱۳.۱.۱. $|N_G(v)|$ را **درجه رأس** v در G نامیده و با $\deg_G(v)$ نشان می‌دهند. رأس درجه صفر، **رأس تنها** و رأس درجه یک، **برگ** نامیده می‌شود. تنها همسایه یک برگ را **رأس اتکاء** می‌نامند. **ماکسیمم و مینیمم** درجه G را به ترتیب با $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ نشان داده و چنین تعریف می‌کنند

$$\Delta(G) = \max\{\deg(v) : v \in V(G)\} \;\;,\;\; \delta(G) = \min\{\deg(v) : v \in V(G)\}$$

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنید $S \subseteq V(G)$. **همسایگی باز مجموعه S** عبارتست از

$$N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v).$$

اگر $S \subseteq V(G)$ و $u \in S$ آن‌گاه **همسایگی خصوصی** u نسبت به S، $Pn[u,S]$ عبارتست از

$$Pn[u,S] = N[u] - N[S - \{u\}].$$

تعریف ۱۵.۱.۱. رأس v از گراف همبند G را **رأس برشی** گویند، هرگاه $G-v$ ناهمبند باشد.

تعریف ۱۶.۱.۱. رأس v از گراف G را **سادکی** نامند هرگاه زیرگراف القاشده توسط همسایه‌های v در G، کامل باشد. به طور مثال، هر رأس انتهایی، سادکی است.

تعریف ۱.۱.۱۷. گراف $G=(V,E)$ را **دوبخشی** گویند؛ هرگاه $V=V_1\cup V_2$ که در آن $V_1\neq\emptyset$ و $V_2\neq\emptyset$ و $V_1\cap V_2=\emptyset$ و هر یال G دارای یک انتها در V_1 و یک انتها در V_2 باشد. گراف دو بخشی با بخش‌های V_1 و V_2 را که در آن $|V_1|=m$ ، $|V_2|=n$ و هر عضو V_1 با هر عضو از V_2 مجاور است را **گراف دوبخشی کامل** نامیده و با $K_{m,n}$ نشان می‌دهند. گراف دوبخشی $K_{1,n}$ را **ستاره** می‌نامند.
گراف‌های چندبخشی و چندبخشی کامل به‌طور مشابه تعریف می‌شوند.

تعریف ۱.۱.۱۸. **زیرتقسیم کردن** یال uv در گراف G عبارت است از حذف یال e و افزودن رأس جدید w، همراه با دو یال uw و wv. (هر یال حداکثر یک‌بار زیرتقسیم می‌شود). **عنکبوت سالم** $S(K_{1,t})$ گرافی است که از زیرتقسیم همه یال‌های ستاره $K_{1,t}$، برای $t\geq 2$، حاصل می‌شود و **عنکبوت زخمی** S_t گرافی است که از زیرتقسیم حداکثر $t-1$ یال از ستاره $K_{1,t}$، برای $t\geq 2$، حاصل می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱۹. یک **خوشه** از G، زیرمجموعه‌ای مانند S از $V(G)$ است به‌طوری‌که زیرگراف القایی $G[S]$ گراف کامل باشد. ماکسیمم تعداد رأس‌های یک خوشه در G را **عدد خوشه‌ای** G نامیده و با $\omega(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱.۱.۲۰. **کرونای** $G=H\circ K_1$ گرافی است که از H با افزودن یک یال آویز به هر رأس آن بدست می‌آید.

تعریف ۱.۱.۲۱. **اجتماع** دو گراف مجزای G_1 و G_2، $G_1\cup G_2$، گرافی است با مجموعه رئوس $V(G_1)\cup V(G_2)$ و مجموعه یال‌های $E(G_1)\cup E(G_2)$.

۱.۲ مجموعه‌های احاطه‌گر

فرض کنید G یک گراف با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E باشد.

تعریف ۱.۲.۱. مجموعه$D\subseteq V$ در گراف G، یک مجموعه **احاطه‌گر** نامیده می‌شود هرگاه هر عضو $V(G)-D$ با رأسی از D، مجاور باشد. **عدد احاطه‌ای** گراف G، $\gamma(G)$، کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر G است. یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه $\gamma(G)$ را یک $\gamma(G)$ **-مجموعه** می‌نامند.

تعریف ۱.۲.۲. مجموعه $D\subseteq V$ در گراف G، یک **مجموعه احاطه‌گر مهارشده،** نامیده می‌شود؛ هرگاه هر رأسی که در D نیست با رأسی از D و رأسی از $V-D$، مجاور باشد. **عدد احاطه‌ای مهارشده** G، $\gamma_r(G)$، کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده G می‌باشد. یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه $\gamma_r(G)$ را یک $\gamma_r(G)$ **-مجموعه** می‌نامند.

فصل ۲

عدد احاطه‌ای مهارشده در گراف‌ها

۱.۲ مقدمه

در این بخش عدد احاطه‌ای مهارشده برخی از گراف‌های خاص را تعیین می‌کنیم. اثبات چند گزاره اول بدیهی است و از بیان آنها خودداری می‌کنیم.

گزاره ۱.۱.۲. *اگر $n \neq 2$ یک عدد صحیح مثبت باشد، آنگاه* $\gamma_r(K_n) = 1$.

گزاره ۲.۱.۲. *اگر $n \geq 2$ یک عدد صحیح باشد، آنگاه* $\gamma_r(K_{1,n-1}) = n$.

گزاره ۳.۱.۲. *اگر n_1 و n_2 اعداد صحیح باشند به طوری که* $\min\{n_1, n_2\} \geq 2$*، آنگاه* $\gamma_r(K_{n_1,n_2}) = 2$.

گزاره ۴.۱.۲. *اگر $t \geq 3$ یک عدد صحیح باشد، آنگاه*

$$\gamma_r(K_{n_1,\dots,n_t}) = \begin{cases} 1 & \min\{n_1, \dots, n_t\} = 1 \text{ اگر } \\ 2 & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$$

چون هر مجموعه احاطه‌گر مهارشده یک مجموعه احاطه‌گر است لذا $\gamma(G) \leq \gamma_r(G)$. فرض کنید $n \geq 1$ و $k \in \{1, \dots, n-2, n\}$ و گیرید G گراف به دست آمده از P_{n-k}، با اضافه کردن مجموعه رئوس $\{v, v_1, \dots, v_{k-1}\}$ و متصل کردن رأس v به هر رأس در $V(P_{n-k}) \cup \{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ باشد. در این صورت $|V(G)| = n$، $\gamma_r(G) = k$ و $\gamma(G) = 1$. بنابراین قضیه زیر ثابت شده است.

گزاره ۵.۱.۲. *گرافی همبند مانند G وجود دارد به طوری که تفاضل $\gamma_r(G) - \gamma(G)$ بقدر کافی بزرگ است.*

گزاره ۶.۱.۲. *اگر $n \geq 1$ یک عدد صحیح باشد، آنگاه* $\gamma_r(P_n) = n - 2\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor$.

برهان. فرض کنید S یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده از $P_n = v_1v_2\dots v_n$ باشد. بوضوح $v_1, v_n \in S$. همچنین، هر مولفه از $V - S$ دقیقاً از اندازه ۲ است. فرض کنید m تا از این مولفه‌ها وجود داشته باشد. در این صورت $2m + m + 1 \leq n$ و بنابراین $m \leq \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor$. از اینرو $|S| = n - 2m \geq n - 2\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor$.

از طرفی، $V - \{v_i | 1 \leq i \leq 3\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor,\ i \equiv 2 \text{ یا } 3 \pmod 3\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده از اندازه $n - 2\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor$ است و این برهان را تمام می‌کند. □

با استدلالی مشابه برهان گزاره ۶.۱.۲ داریم:

گزاره ۲.۱.۷. *اگر $n \geq 3$، آنگاه* $\gamma_r(C_n) = n - 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.

بوضوح برای هر گراف G از مرتبه n داریم $\gamma_r(G) \leq n$. گزاره زیر نشان می‌دهد که ستاره $K_{1,n-1}$ تنها گراف همبند G از مرتبه n است که $\gamma_r(G) = n$.

گزاره ۲.۱.۸. *فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه $n \geq 3$ باشد.در این صورت $\gamma_r(G) = n$ اگر و تنها اگر G یک ستاره باشد.*

برهان. فرض کنید $\gamma_r(G) = n$ و $n \geq 3$. بوضوح $\mathrm{diam}(G) = 2$. فرض کنید u و v دو رأس مجاور دلخواه در گراف G باشند. در این صورت باید یکی از رئوس u و v برگ باشد. از اینرو G، $n-1$ برگ دارد و این یعنی G یک ستاره است. عکس گزاره نیز بوضوح برقرار است. □

اگر G گرافی همبند از مرتبه n باشد که ستاره نیست، آنگاه چون هر رأس خارج یک مجموعه مهارشده باید با رأسی در آنجا مجاور باشد، خواهیم داشت $\gamma_r(G) \leq n - 2$.

قضیه ۲.۱.۹. *فرض کنید T درختی از مرتبه $n \geq 3$ باشد. در این صورت $\gamma_r(T) = n - 2$ اگر و تنها اگر T یکی از P_4، P_5 یا P_6 بوده یا از آنها با افزودن یالهای آویز به رئوس اتکا به دست آمده باشد.*

برهان. بوضوح اگر T، P_4، P_5 یا P_6 بوده یا از آنها با افزوده شدن یال آویز به رئوس اتکای این مسیرها به دست آمده باشد، آنگاه $\gamma_r(T) = n - 2$.
بالعکس، فرض کنید T درختی از مرتبه n باشد به طوری که $\gamma_r(T) = n - 2$. اگر $\mathrm{diam}(T) \geq 6$ آنگاه T شامل زیرگراف القایی P_7، مانند $v_1, ..., v_7$، است. اما در این صورت $V(T) - \{v_2, v_3, v_5, v_6\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده از T از اندازه $n - 4$ است که این تناقض است. بنابراین
$\mathrm{diam}(T) \leq 5$. بعلاوه، چون T یک ستاره نیست و ستاره‌ها تنها درخت‌هایی هستند که قطرشان ۲ است، داریم $\mathrm{diam}(T) \geq 3$. سه حالت زیر را بررسی می‌کنیم.
حالت ۱: $\mathrm{diam}(T) = 3$. در این صورت T شامل زیرگراف القایی P_4، مثلا $\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4\}\rangle$ است. در این صورت بوضوح بقیه رئوس باید به v_2 یا v_3 متصل باشند.
حالت ۲: $\mathrm{diam}(T) = 4$. در این صورت T شامل زیرگراف القایی P_5، مثلا $\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}\rangle$ است. در این صورت بقیه رئوس باید به v_2 یا v_4 متصل باشند. چون اگر v_3 غیر از رئوس مسیر همسایه‌ای دیگر داشته باشد، در این صورت $V(T) - \{v_2, v_3, v_4\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده از T است و بنابراین $\gamma_r(T) \leq n - 3$، که یک تناقض است. بنابراین هر رأسی که روی مسیر نیست باید به v_2 یا v_4 متصل باشد.
حالت ۳: $\mathrm{diam}(T) = 5$. فرض کنید $P = v_1v_2v_3v_4v_5v_6$ یک مسیر قطری باشد. بوضوح، v_2 و v_5 رئوسی هستند که برگ به آنها می‌تواند متصل باشد. اگر v_3(به ترتیب v_4) غیر از رئوس مسیر همسایه‌ای دیگر داشته باشد، در این صورت $V(T) - \{v_2, v_3, v_4\}$
(به ترتیب $V(T) - \{v_3, v_4, v_5\}$) یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده از اندازه $n - 3$ است که یک تناقض است. بنابراین هر رأسی که روی مسیر نیست باید به v_2 یا v_5 متصل باشد و این برهان را تمام می‌کند. □

قضیه ۱۰.۱.۲. *فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه n بوده و شامل یک دور باشد، در این صورت $\gamma_r(G) = n - 2$ اگر و تنها اگر G، C_4 یا C_5 بوده یا G از C_3 با اضافه کردن تعدادی برگ به حداکثر دوتا از رئوس این دور به دست آمده باشد.*

برهان. اگر G، C_4 یا C_5 یا گراف به دست آمده از C_3 با افزودن تعدادی برگ به حداکثر دوتا از رئوس این دور باشد، آنگاه بوضوح $\gamma_r(G) = n - 2$.

فرض کنید $\gamma_r(G) = n - 2$. در این صورت G نمی‌تواند دوری از طول حداقل ۶ داشته باشد. چون اگر $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ رئوس متوالی یک دور از طول حداقل ۶ باشند، آنگاه $V(T) - \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده از G است که این یک تناقض است. حال دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم.

حالت ۱: G شامل یک C_5، یا C_4، با رئوس متوالی v_1, v_2, v_3, v_4 است. اگر یکی از این رئوس، مثلا v_2، همسایه‌ای غیر از v_1 و v_3 داشته باشد، آنگاه $V(G) - \{v_1, v_2, v_3\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده از $n - 3$ است که این یک تناقض است. بنابراین، $G \cong C_4$ یا $G \cong C_5$.

حالت ۲: G شامل مثلث، (v_1, v_2, v_3) است. اگر هر کدام از رئوس v_1، v_2 و v_3 همسایه‌ای غیر از رئوس روی دور داشته باشند، آنگاه $V(G) - \{v_1, v_2, v_3\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده از G است که این یک تناقض است. بدون کاسته شدن از کلیت برهان، گیرید v_1 همسایه‌هایی غیر از v_2 و v_3 ندارد.

اگر v_2(یا v_3) همسایه‌ای غیر از دور، مثلا u_2، داشته باشد که متصل به رأس دیگری، مثلا w_2، که روی دور نیست، باشد، آنگاه $V(G) - \{v_1, v_2, u_2\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده از اندازه $n - 3$ است که این یک تناقض است. بنابراین، هر رأس روی دور تنها به رئوس درجه یک که روی دور نیستند، می‌تواند متصل باشد. □

نتیجه ۱۱.۱.۲. *فرض کنید G گرافی از مرتبه n باشد. در این صورت $\gamma_r(G) = n$ اگر و تنها اگر G اجتماعی مجزا از ستاره‌ها و رئوس تنها باشد. همچنین، $\gamma_r(G) = n - 2$ اگر و تنها اگر دقیقاً یکی از مولفه‌های G با یکی از گراف‌های داده شده در قضیه‌های ۱.۱.۲ و ۲.۱.۲ همریخت باشد و هر مولفه دیگر یک ستاره یا K_1 باشد.*

گزاره زیر بی‌درنگ نتیجه می‌شود.

گزاره ۱۲.۱.۲. *اگر G یک گراف باشد، آنگاه $\gamma_r(G) = 1$ اگر و تنها اگر $G \cong K_1 + H$ که در آن H گرافی بدون رأس تنها است.*

این بخش را با ارائه و اثبات کران پایینی برای عدد احاطه‌ای مهارشده یک درخت به پایان می‌رسانیم.

قضیه ۱۳.۱.۲. *اگر T درختی از مرتبه $n \geq 3$ باشد، آنگاه $\gamma_r(T) \geq \Delta(T)$. همچنین، $\gamma_r(T) = \Delta(T)$ اگر و تنها اگر T یک عنکبوت زخمی غیر ستاره باشد.*

برهان. فرض کنید T یک درخت از مرتبه $n \geq 3$ باشد. چون T حداقل $\Delta(T)$ برگ دارد و هر مجموعه احاطه‌گر مهارشده باید شامل همه برگ‌ها باشد، داریم $\gamma_r(T) \geq \Delta(T)$. بوضوح، برای هر عنکبوت زخمی T که ستاره نباشد، داریم $\gamma_r(T) = \Delta(T)$. حال فرض کنید T یک درخت باشد که $\gamma_r(T) = \Delta(T)$. گیرید v رأس از درجه $\Delta(T)$ در T باشد و فرض کنید S یک γ_r-مجموعه در T باشد. بوضوح، S باید شامل همه برگ‌های T باشد و بنابراین دقیقاً برابر با مجموعه همه برگ‌ها است. فرض کنید V مجموعه رئوس T است. در این صورت چون T ستاره نیست،

$|V-S| \geq 2$ و هر رأس $x \in V-S$ حداقل به یک $x' \in S$ متصل است به طوری که اگر $x \neq y$ آنگاه $x' \neq y'$. بنابراین، هر رأس در $V-S-\{v\}$ به v و دقیقاً یک رأس دیگر در S متصل است. در نتیجه T یک عنکبوت زخمی است که ستاره نیست. □

۲.۲ نامساوی از نوع نوردهاوس-گادوم

نوردهاوس و گادوم[1] کران‌هایی روی حاصلجمع عدد رنگی گراف و مکمل آن در [8] ارائه کردند. نتیجه‌ای متناظر با آن برای عدد احاطه‌ای توسط جاگر[2] و پاین[3] در [6] به دست آمده است؛ یعنی، اگر G گرافی از مرتبه $n \geq 2$ باشد، آنگاه $3 \leq \gamma(G)+\gamma(\bar{G}) \leq n+1$. یک کران بالای بهتر توسط جوزف[4] و آروموگام[5] در [7] به صورت زیر ارائه گردید:

اگر G گرافی از مرتبه n باشد به طوری که G و $\bar{G}$ رئوس تنها نداشته باشند، آنگاه $\gamma(G)+\gamma(\bar{G}) \leq (n+4)/2$. در ادامه کرانهایی از نوع نوردهاوس-گادوم برای عدد احاطه مهارشده ارائه می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۲. *اگر G گرافی از مرتبه $n \geq 2$ باشد، آنگاه $4 \leq \gamma_r(G)+\gamma_r(\bar{G})$. بعلاوه، اگر G گرافی از مرتبه $n \geq 2$ باشد به طوری که $G \ncong P_4$ و $\bar{G} \ncong P_4$، آنگاه $\gamma_r(G)+\gamma_r(\bar{G}) \leq n+2$. همچنین، این کران‌ها قابل وصول هستند.*

برهان. برای کران پایین، تنها نیاز است نشان دهیم که اگر $\gamma_r(G)=1$ آنگاه $\gamma_r(\bar{G}) \geq 3$. گیرید $\gamma_r(G)=1$. در این صورت طبق گزاره ۱۲.۱.۲، $G \cong K_1+H$ که در آن H گرافی بدون رأس تنها است. حال اگر $\gamma_r(\bar{H})=1$، آنگاه طبق گزاره ۱۲.۱.۲، $\bar{H} \cong K_1+H'$ که در آن H' رأس تنها ندارد. این نتیجه می‌دهد که H دارای رأس تنها است که این یک تناقض است. بنابراین $\gamma_r(\bar{H}) \geq 2$ و در نتیجه $\gamma_r(\bar{G}) \geq 3$.
حال کران بالا را ثابت می‌کنیم. اگر $n=2,3$ آنگاه حکم واضح است. گیرید $n \geq 4$. چون مکمل یک گراف ناهمبند، همبند است، می‌توان فرض کرد که $G=(V,E)$ همبند است. فرض کنید $uv \in E$ و $N=N_G(u) \cap N_G(v)$، $A=V-N-\{u,v\}$ و $I=\{w|$ w یک رأس تنها در $\langle A\rangle_{\bar{G}}$ است$\}$.
حالت ۱: $|I| \leq 1$ و $N=\emptyset$. اگر $I=\emptyset$، آنگاه $\{u,v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده در $\bar{G}$ بوده و کران بالا برقرار است. حال فرض کنید $|I|=1$.

در این صورت رأسی مانند w در $(N(u)-\{v\}) \cup (N(v)-\{u\})$ موجود است به طوری که $\deg(w) \geq 2$. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله، گیرید w متصل به u باشد. در این صورت $V-\{u,w\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده G بوده و $\{u,v\} \cup I$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده در $\bar{G}$ است. بنابراین،

$$\gamma_r(G)+\gamma_r(\bar{G}) \leq (n-2)+2+|I| \leq n+1 < n+2.$$

حالت ۲: $|I| \leq 1$ و $N \neq \emptyset$. چون $A \cup \{u\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده در G و $I \cup N \cup \{u,v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده در $\bar{G}$ است، داریم

$$\gamma_r(G)+\gamma_r(\bar{G}) \leq (|A|+1)+(2+|N|+|I|)=(|A|+|N|+2)+1+|I| \leq n+2.$$

[1] Nordhaus-Gaddum
[2] Jaeger
[3] Payan
[4] Joseph
[5] Arumugam

حالت ۳: $|I| \geq ۲$. گیرید $u', v' \in I$. توجه کنید که چون u'(به ترتیب v') در I است، رأس u'(به ترتیب v') به هر رأس در $A - \{u'\}$(به ترتیب $A - \{v'\}$) در G متصل است. یال $e = xy \in E(G)$ را که در آن $x \in N \cup \{u, v\}$ و $y \in A$است، در نظر بگیرید. فرض کنید $w \in \{u, v\} - \{x\}$ و $w' \in \{u', v'\} - \{y\}$ را در نظر بگیرید. در این صورت $\{w, w'\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده از G است. از اینرو، $\gamma_r(G) + \gamma_r(\bar{G}) \leq n + ۲$.

در ادامه نشان می‌دهیم که کران بالا و پایین، ارائه شده، قابل وصول هستند.

برای کران پایین، برای $n = ۲, ۳$، گراف کامل K_n را در نظر بگیرید. برای $n = ۴$، مسیر $P_۴$ را در نظر بگیرید. برای $n \geq ۵$، فرض کنید $n_۱$ و $n_۲$ اعداد صحیحی باشند که $\min\{n_۱, n_۲\} \geq ۲$ و $n_۱ + n_۲ = n - ۱$ و فرض کنید $\bar{H} \cong K_{n_۱, n_۲}$ و $G \cong K_۱ + H$. در این صورت طبق گزاره ۳.۱.۲ و ۱۲.۱.۲، $\gamma_r(G) = ۱$، $\gamma_r(\bar{G}) = ۳$ و $\gamma_r(G) + \gamma_r(\bar{G}) = ۴$. چون $\gamma_r(K_{۱,n-۱}) + \gamma_r(\bar{K}_{۱,n-۱}) = n + ۲$، کران بالا دقیق است. □

فصل ۳

عدد احاطه‌ای مهارشده در درخت‌ها

۱.۳ کران پایین

در گزاره ۶.۱.۲ نشان داده شد که اگر $n \geq 1$، آنگاه $\gamma_r(P_n) \geq \lceil \frac{n+2}{3} \rceil$. حال نشان می‌دهیم که این کران، کران پایین دقیقی برای عدد احاطه‌ای مهارشده در درخت‌ها نیز هست. در این بخش، $T(u, uv)$، نشان دهنده مولفه‌ای از $T - uv$ شامل u است.

قضیه ۱.۱.۳. *اگر T درختی از مرتبه $n \geq 1$ باشد، آنگاه $\gamma_r(T) \geq \lceil \frac{n+2}{3} \rceil$.*

برهان. اثبات به روش استقراء روی n است. براحتی می‌توان دید که حکم برای همه درخت‌های از مرتبه $n \leq 5$ برقرار است. فرض کنید حکم برای همه درخت‌های از مرتبه کمتر از n، $n \geq 6$، برقرار باشد. حال فرض کنید $\gamma_r = \min\{\gamma_r(T) |$ T یک درخت از مرتبه n است $\}$. نشان می‌دهیم که $\gamma_r \geq \lceil \frac{n+2}{3} \rceil$.
فرض کنید $\mathcal{F} = \{T |$ T یک درخت از مرتبه n است به‌طوری‌که $\gamma_r(T) = \gamma_r\}$. بین همه درخت‌ها در $\mathcal{F}$، فرض کنید T طوری انتخاب شود که حاصلجمع درجه‌های رئوسی که درجه آنها حداقل ۳ است، $s(T)$، مینیمم باشد. اگر $s(T) = 0$، آنگاه $T \cong P_n$ و بنابراین $\gamma_r = \gamma_r(P_n) \geq \lceil \frac{n+2}{3} \rceil$. از اینرو فرض کنید $s(T) \geq 1$ و گیرید S یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده مینیمم از T باشد.
ادعا ۱: اگر $\deg v \geq 3$، آنگاه

(i) $v \notin S$،

(ii) v دقیقاً به یک رأس S متصل است.

(iii) $\deg v = 3$.

برهان. فرض کنید $N(v) = \{v_1, v_2, ..., v_d\}$ و T را در v ریشه دار کنید. برای $i = 1, 2, ..., d$، فرض کنید T_i زیردرختی از T باشد که توسط v_i و فرزندانش القاء می‌شود و گیرید l_i برگی از T باشد که در T_i نیز هست. ادعا می‌کنیم $v \notin S$. گیرید $v \in S$، در این صورت، چون هر برگ T به S متعلق است، پس $l_1 \in S$ و از اینرو مجموعه S همچنین یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده درخت T' است که از T با حذف کردن یال vv_2 و اضافه کردن یال v_2l_1 به دست می‌آید. بنابراین $T' \in \mathcal{F}$. حال چون، $s(T') < s(T)$، با انتخاب S متناقض است. در نتیجه $v \notin S$. بنابراین v با یک رأس از S، مانند v_1، و با یک رأس که در S نیست، مانند v_2، مجاور است. اگر برای kای، $3 \leq k \leq d$،

$v_k \in S$، آنگاه S یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده درخت T' که از T توسط حذف کردن یال vv_k و اضافه کردن یال v_kl_1 به دست می‌آید، است و بنابراین $T' \in \mathcal{F}$. چون، $s(T') < s(T)$، با انتخاب S به تناقض خواهیم رسید. بنابراین v_1 تنها همسایه v در S است. اگر $d \geq 4$، در این صورت S یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده درخت T' است که از T با حذف کردن یال‌های vv_3 و vv_4 و اضافه کردن یال‌های v_3v_4 و v_3l_1 به دست می‌آید که منجر به تناقض خواهد شد. بنابراین $d = 3$. □

ادعا ۲: هیچ دو رأسی از درجه ۳، باهم مجاور نیستند.

برهان. با استفاده از مطالب به کار برده شده در ادعا ۱، v_1 تنها همسایه v در S است و $\deg v_1 \geq 2$. اگر $\deg v_2 = 3$، آنگاه طبق ادعا ۱، v_2 مجاور رأسی از T_2 است که در S نیست و مجاور با رأسی از T_2 که در S است. در این صورت S یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده درخت T' که از درخت T با حذف یال vv_2 و اضافه کردن یال l_1v_2 به دست می‌آید، می‌باشد. بنابراین $T' \in \mathcal{F}$ که همانند بالا متناقض با انتخاب S است. بنابراین $\deg v_2 \leq 2$. چون v_2 مجاور رأسی از S است، این نتیجه می‌دهد که $\deg v_2 = 2$. به طور مشابه، $\deg v_3 = 2$. □

با استفاده از استدلال به کار برده شده در ادعا ۱، v_1 برگ نیست. در این صورت طبق ادعا ۱، $\deg v_1 = 2$. گیرید v_1' همسایه v_1 غیر از v باشد. در این صورت S یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده درخت T' است که از درخت T با حذف یال v_1v_1' و اضافه کردن یال $v_1'l_2$ به دست می‌آید، می‌باشد. بنابراین $T' \in \mathcal{F}$ و v_1 یک برگ T' است. در نتیجه می‌توان فرض کرد که v_1 یک برگ T است. برای $i = 2, 3$، گیرید v_i' همسایه v_i غیر از v باشد. در این صورت، $v_2', v_3' \in S$. حال همان طور که برای v_1 انجام دادیم، می‌توانیم فرض کنیم که v_2' یک برگ در T است.

اگر $n = 6$، آنگاه بوضوح $\gamma_r(T) = 3 = \lceil \frac{n+2}{3} \rceil$. از اینرو، فرض کنید $n \geq 7$. گیرید T' زیردرختی از T باشد که توسط v_3' و فرزاندانش القاء می‌شود. در این صورت $S \cap V(T')$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده T' است و از اینرو $|S \cap V(T')| \geq \gamma_r(T')$. در نتیجه، $|S| \geq 2 + \gamma_r(T')$. بنابر فرض استقراء داریم $\gamma_r(T') \geq \lceil \frac{n-3}{3} \rceil$ و از اینرو

$$\gamma_r(T) = |S| \geq \lceil \frac{n+3}{3} \rceil \geq \lceil \frac{n+2}{3} \rceil.$$

□

برای $n \geq 1$، گیرید $\mathcal{F}_n = \{T | \gamma_r(T) = \lceil \frac{n+2}{3} \rceil$ است به‌طوری‌که n یک درخت از مرتبه $T\}$ در ادامه یک دسته‌بندی مفید از خانواده $\mathcal{F}$ ارائه می‌کنیم. برای این منظور، فرض کنید عملگر نوع (۱) روی درخت T عملگری است که یک P_2 به رأس v متعلق به هیچ مجموعه احاطه‌گر مهارشده مینیمم T، نیست، ضمیمه می‌کند و عملگر نوع (۲) روی درخت T عملگری است که یک P_3 به رأس v که متعلق به یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده مینیمم T، است، ضمیمه می‌کند. برای $i = 1, 2$، گیرید T_i درختی باشد که از $K_{1,3}$ با زیرتقسیم کردن i یال آن به دست می‌آید.

حال سه خانواده از درخت‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. گیرید $\mathcal{L}_{3k}$ خانواده‌ای از درخت‌هایی مانند T از مرتبه $3k$ باشد که از درخت T_2 با دنباله‌ای متناهی از عملگر نوع (۲) به دست آید. فرض کنید $\mathcal{L}_{3k+1}$ خانواده‌ای از درخت‌هایی مانند T از مرتبه $3k + 1$ باشد که از P_4 با دنباله‌ای متناهی از عملگر نوع (۲) به دست آید. بالاخره، فرض کنید $\mathcal{L}_{3k+2}$ خانواده‌ای از درخت‌هایی مانند T از مرتبه $3k + 2$ باشد که یا از P_5 و یا از T_1 با دنباله‌ای متناهی از عملگر نوع (۲) به دست آید و یا از T_2 با یک دنباله متناهی از عملگر نوع (۲) و بعد یک دنباله متناهی از عملگر نوع (۱) و سپس یک دنباله متناهی از عملگر نوع (۲) به دست آید.

لم ساده زیر را که قبلاً نیز به صورت مکرر بیان شده، در زیر آوردیم.

لم ۲.۱.۳. *فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده مینیمم شده از درخت T باشد، در این صورت هر برگ T متعلق به D است.*

قضیه ۳.۱.۳. *برای $n \geq ۴$، $\mathcal{F}_n = \mathcal{L}_n$.*

قضیه ۳.۱.۳ را با بیان ۸ لم، ثابت می‌کنیم.

لم ۴.۱.۳. *اگر $T \in \mathcal{F}_n$ آنگاه هر رأس T مجاور با حداکثر دو برگ است. همچنین، حداکثر یک رأس از T دقیقا با دو برگ مجاور است.*

برهان. گیرید D یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده مینیمم T باشد. چون $T \in \mathcal{F}_n$، $|D| = \lceil \frac{n+۲}{۳} \rceil$. فرض کنید که رأسی مانند v از T با حداقل سه برگ ، مثلا $v_۱$، $v_۲$ و $v_۳$، مجاور باشد. در این صورت $D - \{v_۱, v_۲\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده از $T' = T - \{v_۱, v_۲\}$ است. بنابراین
$\gamma_r(T') \leq |D| - ۲ = \lceil \frac{n-۴}{۳} \rceil$. از طرف دیگر چون T' یک درخت از مرتبه $n - ۲$ است از قضیه ۱.۱.۳، نتیجه می‌شود $\gamma_r(T') \geq \lceil \frac{n}{۳} \rceil$. در این صورت، $\lceil \frac{n}{۳} \rceil \leq \lceil \frac{n-۴}{۳} \rceil$، که غیرممکن است. بنابراین هیچ رأسی از T با بیشتر از دو برگ مجاور نمی‌باشد. همچنین، فرض کنید که u و v رئوس متمایزی از T باشند که هردو مجاور با دو برگ باشند. فرض کنید $l_۱$ و $l_۲$ دو برگ متصل به u و $l_۳$ و $l_۴$ دو برگ متصل به v، باشند. در این صورت $D - \{l_۱, l_۳\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده از $T' = T - \{l_۱, l_۳\}$ است. از اینرو $\gamma_r(T') \leq |D| - ۲ = \lceil \frac{n-۴}{۳} \rceil$. بنابراین $\gamma_r(T') \geq \lceil \frac{n}{۳} \rceil$ و این دوباره به تناقض منجر می‌شود. بنابراین حداکثر یک رأس T مجاور با دو برگ است. □

لم ۵.۱.۳. *اگر $T \in \mathcal{F}_n$ و $n \not\equiv ۲ (\mathrm{mod}\ ۳)$ آنگاه هر رأس T حداکثر با یک برگ مجاور است و هیچ رأس اتکای T متعلق به مجموعه احاطه‌گر مهارشده مینیمم T نیست.*

برهان. گیرید D یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده مینیمم T باشد. فرض کنید که رأسی مانند v از T با حداقل دو برگ ، مثلا $l_۱$ و $l_۲$، مجاور باشد. در این صورت $D - \{l_۱\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده از $T' = T - \{l_۱\}$ است. چون $T \in \mathcal{F}_n$ داریم $\gamma_r(T') = \gamma_r(T) - ۱ = \lceil \frac{n-۱}{۳} \rceil$. بنابراین T' درختی از مرتبه $n - ۱$ است و از قضیه ۱.۱.۳، نتیجه می‌شود $\gamma_r(T') \geq \lceil \frac{n+۱}{۳} \rceil$. از اینرو، $\lceil \frac{n+۱}{۳} \rceil \leq \lceil \frac{n-۱}{۳} \rceil$، که غیرممکن است مگر اینکه $n \equiv ۲ (\mathrm{mod}\ ۳)$. بنابراین هیچ رأسی از T با بیش از یک برگ مجاور نیست. حال، اگر v مجاور با برگی مانند $l_۱$ باشد و $v \in D$، آنگاه بوضوح $D - \{l_۱\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده از $T' = T - \{l_۱\}$ است که یک تناقض است مگر اینکه $n \equiv ۲ (\mathrm{mod}\ ۳)$. □

لم ۶.۱.۳. *اگر $T \in \mathcal{F}_n$ و T' از درخت T توسط عملگر (۲) به دست آید، آنگاه $T' \in \mathcal{F}_{n+۳}$.*

برهان. گیرید D یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده مینیمم T باشد. در این صورت برگ جدید T' را به D اضافه می‌کنیم که حاصل یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده برای T' می‌باشد. حال، چون $T \in \mathcal{F}_n$ از اینرو خواهیم داشت $\gamma_r(T') \leq \gamma_r(T) + ۱ = \lceil \frac{n+۵}{۳} \rceil$. از اینرو، T' یک درخت از مرتبه $n + ۳$ است و طبق قضیه ۱.۱.۳، خواهیم داشت $\gamma_r(T') \geq \lceil \frac{n+۵}{۳} \rceil$. در نتیجه $\gamma_r(T') = \lceil \frac{n+۵}{۳} \rceil$ و بنابراین $T' \in \mathcal{F}_{n+۳}$. □

چون $\mathcal{L}_4 = \{P_4\} = \mathcal{F}_4$ و $\mathcal{L}_6 = \{T_2\} \subseteq \mathcal{F}_6$، به ازای $k = 4$ و $k = 6$، $\mathcal{L}_k \subseteq \mathcal{F}_k$. لم زیر یک نتیجه از لم ۶.۱.۳، است.

لم ۷.۱.۳. *اگر $n \geq 4$ و $n \not\equiv 2 \pmod 3$، آنگاه* $\mathcal{L}_n \subseteq \mathcal{F}_n$.

لم ۸.۱.۳. *اگر $n \geq 4$ و $n \not\equiv 2 \pmod 3$، آنگاه* $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{L}_n$.

برهان. اثبات به استقراء روی $n \geq 4$ است. چون $\mathcal{F}_4 = \{P_4\} = \mathcal{L}_4$ و $\mathcal{F}_6 = \{T_2\} = \mathcal{L}_6$، نتیجه برای $n = 4$ و $n = 6$ برقرار است. گیرید $n \geq 7$ و $n \equiv 2 \pmod 3$. فرض کنید برای همه اعداد صحیح، با شرط $4 \leq k < n$، $k \not\equiv 2 \pmod 3$، $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{L}_k$. گیرید $T \in \mathcal{F}_n$. نشان می‌دهیم که $T \in \mathcal{L}_n$. فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده مینیمم T باشد. گیرید $P : v_1, v_2, \dots, v_m$ طولانی‌ترین مسیر در T باشد. در این صورت v_1 و v_n برگ هستند و بنابراین $v_1 \in D$. چون P طولانی‌ترین مسیر است، از لم ۵.۱.۳، نتیجه می‌شود v_2 یک رأس اتکا از درجه ۲ بوده و $v_2 \notin D$. بنابراین $v_3 \notin D$. نشان می‌دهیم که $\deg v_3 = 2$ یا $\deg v_{m-2} = 2$. اگر این حالت درست نباشد، آنگاه $\deg v_3 \geq 3$ و $\deg v_{m-2} \geq 3$. گیرید $T^* = T(v_3, v_3v_4)$. قبل از ادامه ادعاهای زیر را ثابت می‌کنیم.

ادعا ۳: اگر v_3 یک رأس اتکا نباشد، آنگاه $T^* \cong P_5$، $v_4 \in D$ و $D \cap V(T^*)$ شامل رئوس انتهایی T^* است.

برهان. چون $\deg v_3 \geq 3$ و P طولانی‌ترین مسیر است. T^* می‌تواند از یک ستاره $K_{1,r+1}$، $r \geq 1$، با مرکز v_3 توسط زیرتقسیم دقیقاً هر یال آن یکبار، به دست می‌آید. داریم که هر برگ T^* متعلق به D است و طبق لم۵.۱.۳، D شامل هیچ رأس اتکای T^* نیست. چون $v_3 \notin D$ خواهیم داشت $v_4 \in D$. فرض کنید T' درخت به دست آمده از T با حذف همه رئوس T^* غیر از $\{v_1, v_2, v_3\}$ باشد. در این صورت $\gamma_r(T') \leq |D| - r$. حال چون $T \in \mathcal{F}_n$، داریم $\gamma_r(T') \leq \lceil \frac{n+2-3r}{3} \rceil$. همچنین، T' درختی از مرتبه $n - 2r$ است و از اینرو، طبق قضیه ۱.۱.۳، $\gamma_r(T') \geq \lceil \frac{n+2-2r}{3} \rceil$. بنابراین، $\lceil \frac{n+2-2r}{3} \rceil \leq \lceil \frac{n+2-3r}{3} \rceil$. حال چون $n \not\equiv 2 \pmod 3$، باید داشته باشیم $r = 1$ و $n \equiv 0 \pmod 3$. □

ادعا ۴: اگر v_3 یک رأس اتکا باشد، آنگاه $T^* \cong P_4$، $v_4 \notin D$ و $D \cap V(T^*)$ شامل رئوس انتهایی T^* است.

برهان. بنابر لم ۵.۱.۳، v_3 تنها به یک برگ، مثلا l_1 متصل است. اگر $v_4 \in D$، آنگاه $D - \{l_1\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده $T' = T - l_1$ است. حال چون $T \in \mathcal{F}_n$،نتیجه می‌شود $\gamma_r(T') \leq \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$. چون، T' درختی از مرتبه $n - 1$ است بنابر قضیه ۱.۱.۳، $\gamma_r(T') \geq \lceil \frac{n+1}{3} \rceil$ که ایجاب می‌کند $\lceil \frac{n+1}{3} \rceil \leq \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$ که این غیرممکن است چون $n \not\equiv 2 \pmod 3$. بنابراین $v_4 \notin D$. پس درخت T^* از ستاره $K_{1,r+1}$، $r \geq 1$، با مرکز v_3 با زیرتقسیم کردن r یال آن دقیقاً یکبار به دست می‌آید. هر برگ T^* به D تعلق دارد، در حالیکه، طبق لم ۵.۱.۳، D شامل هیچ رأس اتکا T^* نیست. فرض کنید T' نشان دهنده درخت به دست آمده از T با حذف همه رئوس T^* غیر از $\{v_3, l_1\}$ باشد. در این صورت $\gamma_r(T') \leq |D| - r = \lceil \frac{n+2-3r}{3} \rceil$. حال چون، T' درختی از مرتبه $n - 2r$ است از قضیه طبق ۱.۱.۳ نتیجه می‌شود $\gamma_r(T') \geq \lceil \frac{n+2-2r}{3} \rceil$. از اینرو، $\lceil \frac{n+2-2r}{3} \rceil \leq \lceil \frac{n+2-3r}{3} \rceil$ که این غیرممکن است مگر اینکه $r = 1$ و $n \equiv 0 \pmod 3$. □

وضعیتی مشابه برای ادعای ۳ و ۴ برای درخت $T(v_{m-۲}, v_{m-۲}, v_{m-۳})$ برقرار است. بنابراین اگر T' درخت به دست آمده از T با حذف رئوس $v_۱, v_۲, v_{m-۱}, v_m$ باشد، آنگاه $D - \{v_۱, v_m\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده T' است و بنابراین $\gamma_r(T') \leq |D| - ۲ = \lceil \frac{n-۴}{۳} \rceil$. چون، T' درختی از مرتبه $n - ۴$ است از قضیه ۱.۱.۳ خواهیم داشت $\gamma_r(T') \geq \lceil \frac{n-۲}{۳} \rceil$. در نتیجه، $\lceil \frac{n-۲}{۳} \rceil \leq \lceil \frac{n-۴}{۳} \rceil$ که این غیرممکن است زیرا $n \not\equiv ۲ (\mathrm{mod}\ ۳)$. بنابراین، نتیجه می‌شود که $\deg v_۳ = ۲$ یا $\deg v_{m-۲} = ۲$.

فرض کنید $\deg v_۳ = ۲$. در این صورت $v_۴ \in D$. بنابراین $D - \{v_۱\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده درخت $T' = T - \{v_۱, v_۲, v_۳\}$ است و چون $T \in \mathcal{F}_n$، داریم $\gamma_r(T') \leq |D| - ۱ = \lceil \frac{n-۱}{۳} \rceil$. حال، T' درختی از مرتبه $n - ۳$ است و از قضیه ۱.۱.۳ نتیجه می‌شود $\gamma_r(T') \geq \lceil \frac{n-۱}{۳} \rceil$. از اینرو، $\gamma_r(T') = \lceil \frac{n-۱}{۳} \rceil$. بنابراین $T' \in \mathcal{F}_{n-۳}$. بنابر فرض استقراء، $\mathcal{L}_{n-۳} \subseteq \mathcal{F}_{n-۳}$ و از اینرو $T' \in \mathcal{L}_{n-۳}$. بدین ترتیب، T از درخت T' توسط عملگر نوع (۲) ساخته شده است. بنابراین از لم ۶.۱.۳ نتیجه می‌شود $T \in \mathcal{L}_n$. □

لم ۹.۱.۳. *اگر $T \in \mathcal{F}_n$ و $n \not\equiv ۲ (\mathrm{mod}\ ۳)$، آنگاه T از درخت T' متعلق به $\mathcal{F}_{n+۲}$ توسط عملگر نوع (۱) به دست می‌آید.*

برهان. فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده مینیمم در T باشد. در این صورت با اضافه کردن برگ جدید به D یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده برای T' به دست می‌آید. حال، چون $T \in \mathcal{F}_n$ و $n \not\equiv ۲ (\mathrm{mod}\ ۳)$، داریم $\gamma_r(T') \leq \gamma_r(T) + ۱ = \lceil \frac{n+۵}{۳} \rceil = \lceil \frac{n+۴}{۳} \rceil$. چون T' درختی از مرتبه $n + ۲$ است، بنابر قضیه ۱.۱.۳، $\gamma_r(T') \geq \lceil \frac{n+۴}{۳} \rceil$. از اینرو، $\gamma_r(T') \geq \lceil \frac{n+۴}{۳} \rceil$ و بنابراین $T' \in \mathcal{F}_{n+۲}$. □

لم ۱۰.۱.۳. *اگر $n \geq ۱$، آنگاه $\mathcal{L}_{۳n+۲} \subseteq \mathcal{F}_{۳n+۲}$.*

برهان. اثبات به استقراء روی $n \geq ۱$ است. اگر $n = ۱$ آنگاه حکم بوضوح برقرار است زیرا $\mathcal{L}_۵ = \{P_۵, T_۱\} \subseteq \mathcal{F}_۵$. فرض کنید $n \geq ۱$ و $\mathcal{L}_{۳n+۲} \subseteq \mathcal{F}_{۳n+۲}$. نشان می‌دهیم که $\mathcal{L}_{۳(n+۱)+۲} \subseteq \mathcal{F}_{۳(n+۱)+۲}$. گیرید $\mathcal{F} \in \mathcal{L}_{۳(n+۱)+۲}$. در این صورت T از درخت T' توسط یک عملگر نوع (۱) و یا یک عملگر نوع (۲) به دست می‌آید. اگر T توسط T' با یک عملگر نوع (۱) به دست بیاید، در این صورت T'، مرتبه $۳n + ۳$ دارد و ساختمان T' تنها با استفاده از عملگر نوع (۲) و با شروع از درخت $T_۲$ به دست می‌آید. بنابراین، طبق لم ۶.۱.۳، $T' \in \mathcal{F}_{۳n+۳}$. از اینرو بنابر لم ۹.۱.۳، $T \in \mathcal{F}_{۳(n+۱)+۲}$. از طرف دیگر، اگر T از T' با یک عملگر نوع (۲) به دست بیاید، آنگاه T' دارای مرتبه $۳n + ۲$ است و $T' \in \mathcal{L}_{۳n+۲}$. بنابر فرض استقراء، $T' \in \mathcal{F}_{۳n+۲}$ و طبق ۶.۱.۳ خواهیم داشت $T \in \mathcal{F}_{۳n+۵}$. □

لم ۱۱.۱.۳. *اگر $n \geq ۱$، آنگاه $\mathcal{F}_{۳n+۲} \subseteq \mathcal{L}_{۳n+۲}$.*

برهان. اثبات به استقراء روی $n \geq ۱$ است. چون $\mathcal{F}_۵ = \{P_۵, T_۱\} = \mathcal{L}_۵$، حکم برای $n = ۱$ برقرار است. فرض کنید $n \geq ۲$ و برای همه اعداد صحیح k، $۱ \leq k < n$، داشته باشیم $\mathcal{F}_{۳k+۲} \subseteq \mathcal{L}_{۳k+۲}$. گیرید $T \in \mathcal{F}_{۳n+۲}$. نشان می‌دهیم که $T \in \mathcal{L}_{۳n+۲}$. فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده مینیمم T باشد. طبق قضیه ۱.۱.۳، $|D| = n + ۲$. فرض کنید $P : v_۱, v_۲, ..., v_m$ یک مسیر قطری در T باشد. در این صورت $v_۱$ و v_m برگ هستند و بنابراین $v_۱, v_m \in D$، طبق ۴.۱.۳، می‌توان فرض کرد که $v_۲$ یک رأس اتکا از درجه ۲ است. دو حالت امکانپذیر زیر را که $v_۲$ متصل به یک برگ یا دو برگ است، را در نظر می‌گیریم.

گیرید $T^* = T(v_۳, v_۳v_۴)$.

حالت ۱: $\deg v_{m-۱} = ۳$. در این صورت $v_{m-۱}$ به دو برگ متصل است. اگر $v_۲ \in D$، در این صورت $D - \{v_۱, v_m\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده درخت $T' = T - \{v_۱, v_m\}$ است. اما در این صورت $\gamma_r(T') \le |D| - ۲ = n$ و $n + ۱ = \lceil \frac{۳n+۲}{۳} \rceil \le \gamma_r(T')$ که غیرممکن است. بنابراین $v_۲ \notin D$ و در نتیجه $v_۳ \notin D$.

ادعا ۵: $\deg v_۳ = ۲$.

برهان. فرض کنید که $\deg v_۳ \ge ۳$ و $v_۳$ یک رأس اتکا نباشد. در این صورت، چون P طولانی‌ترین مسیر است، T^* از ستاره $K_{1,r+۱}$، $r \ge ۱$، با مرکز $v_۳$ با زیرتقسیم هر یال دقیقاً یکبار به دست می‌آید. همچنین طبق لم ۴.۱.۳، هر رأس اتکا T^* از درجه ۲ است و همانطور که برای $v_۲$ نشان داده شد، D شامل هیچ رأس اتکای T^* نیست. چون $v \notin D$، $v_۴ \in D$. بنابراین، اگر T' نشان دهنده درخت به دست آمده از T با حذف همه رئوس T^* غیر از $\{v_۱, v_۲, v_۳\}$ و حذف v_m باشد، در این صورت $\gamma_r(T') \le |D| - r - ۱ = n + ۱ - r$. همچنین، T' درختی از مرتبه $۳n + ۱ - ۲r$ است و بنابراین، طبق قضیه ۱.۱.۳، $\gamma_r(T') \ge n + ۱ - \lfloor \frac{۲r}{۳} \rfloor$، یک تناقض است. بنابراین $v_۳$ یک رأس اتکا است.

طبق لم ۴.۱.۳، $v_۳$ تنها به یک برگ، مثلا $l_۱$، متصل است. اگر $v_۴ \in D$، در این صورت $D - \{l, v_m\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده درخت $T' = T - \{l_۱, v_m\}$ است که مانند بالا یک تناقض است. بنابراین $v_۴ \notin D$. درخت T^* می‌تواند از ستاره $K_{1,r+۱}$، $r \ge ۱$، با مرکز $v_۳$ با زیرتقسیم هر یال دقیقاً یکبار به دست می‌آید. هر برگ T^* به D متعلق است، در صورتی که D شامل هیچ رأس اتکای T^* نیست. بنابراین، اگر T' نشان دهنده درخت به دست آمده از T با حذف همه رئوس T^* غیر از $\{v_۳, l_۱\}$ و حذف v_m باشد، آنگاه $\gamma_r(T') \le |D| - r - ۱ = n + ۱ - r$. بنابراین، $\gamma_r(T') \ge n + ۱ - \lfloor \frac{۲r}{۳} \rfloor$، که یک تناقض است. بنابراین $\deg v_۳ = ۲$. □

طبق ادعا ۵، $\deg v_۳ = ۲$. بنابراین $v_۴ \in D$. از اینرو $D - \{v_۱\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده درخت $T' = T - \{v_۱, v_۲, v_۳\}$ است و از اینرو، داریم $\gamma_r(T') \le |D| - ۱ = n + ۱$. همچنین، T' درختی از مرتبه $۳n - ۱$ است و بنابر قضیه ۱.۱.۳، $\gamma_r(T') \ge n + ۱$. بنابراین، $\gamma_r(T') = n + ۱ = \lceil \frac{۳n+۱}{۳} \rceil$ و از اینرو $T' \in \mathcal{F}_{۳(n-۱)+۲}$. طبق فرض استقراء، داریم $\mathcal{F}_{۳(n-۱)+۲} \subseteq \mathcal{L}_{۳(n-۱)+۲}$ و بنابراین $T' \in \mathcal{L}_{۳(n-۱)+۲}$. پس، T از درخت T' توسط عملگر نوع (۲) ساخته می‌شود. از اینرو، طبق لم ۶.۱.۳، $T \in \mathcal{L}_{۳n+۲}$.

حالت ۲: $\deg v_{m-۱} = ۲$. اگر رئوس $v_۲$ و $v_{m-۱}$ هردو متعلق به D باشند، آنگاه $D - \{v_۱, v_m\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده درخت $T' = T - \{v_۱, v_m\}$ است، که یک تناقض است. بنابراین می‌توان فرض کرد که $v_۲ \notin D$. در نتیجه $v_۳ \notin D$. اگر $v_۴ \notin D$، آنگاه $D - \{v_۱\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده درخت $T' = T - \{v_۱, v_۲\}$ است و بنابراین، داریم $\gamma_r(T') \ge n + ۱$. چون، T' درختی از مرتبه $۳n$ است از اینرو بنابر قضیه ۱.۱.۳ نتیجه می‌شود $\gamma_r(T') \ge n + ۱$. بنابراین، $T' \in \mathcal{L}_{۳n}$. چون T از درخت T' توسط عملگر نوع (۱) ساخته می‌شود. از اینرو بنابر لم ۹.۱.۳ نتیجه می‌شود $T \in \mathcal{L}_{۳n+۲}$. بنابراین می‌توان فرض کرد که $v_۴ \in D$. چون اگر $\deg v_۳ = ۲$ آنگاه بنابر حالت ۱، داریم $T \in \mathcal{L}_{۳n+۲}$. از اینرو می‌توانیم فرض کنیم که $\deg v_۳ \ge ۳$.

ادعا ۶: اگر $v_۳$ یک رأس اتکا نباشد، آنگاه $T \in \mathcal{L}_{۳n+۲}$.

برهان. گیرید u یک همسایه از $v_۳$ متمایز از $v_۲$ و $v_۴$ باشد. فرض کنید $u \in D$. حال u متصل به یک برگ یا دو

برگ است. در هر حالت، درخت T' از درخت T با حذف $N[u]-\{v_۳\}$ که $\gamma_r(T')\leq |D|-\deg u\leq n$به دست می‌آید. همچنین، مرتبه T' حداقل $۳n-۱$ است و از اینرو بنابر قضیه ۱.۱.۳ نتیجه می‌شود $\gamma_r(T')\geq n+۱$ که یک تناقض است. بنابراین $u\notin D$. اما در این صورت $D-\{v_۱\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده درخت $T'=T-\{v_۱,v_۲\}$ است در حالیکه در بالا نشان داده‌ایم، $T'\in\mathcal{F}_{۳n}$ و $T\in\mathcal{L}_{۳n+۲}$. □

طبق ادعا ۶، می‌توان فرض کرد $v_۳$ یک رأس اتکا T است. فرض کنید $v_۳$ به دو برگ متصل باشد، در این صورت این دو برگ را از T حذف می‌کنیم که درخت T' با $\gamma_r(T')\leq |D|-۲=n$ تولید می‌شود. همچنین، T' مرتبه حداقل $۳n$ دارد و از اینرو بنابر قضیه ۱.۱.۳، $\gamma_r(T')\geq n+۱$ که یک تناقض است. بنابراین $v_۳$ تنها به یک برگ، مثلا $l_۱$، متصل است. فرض کنید $v_{m-۱}\in D$ در این صورت $D-\{v_m,l_۱\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده درخت $T'=T-\{v_m,l_۱\}$ است که یک تناقض است. از اینرو $v_{m-۱}\notin D$ و همچنین $v_{m-۲}\notin D$. با توجه به $v_۴$، می‌توان فرض کرد که $v_{m-۳}\notin D$. طبق ادعا ۶ (که $v_{m-۲}$ را به جای $v_۳$ جایگزین می‌کنیم)، می‌توان فرض کرد که $v_{m-۲}$ یک رأس اتکا T است. در این صورت با توجه به $v_۳$، $v_{m-۲}$ تنها به یک برگ، مثلا $l_۲$، متصل است. فرض کنید $v_۳$ و $v_{m-۲}$ درجه ۳ داشته باشند، در این صورت $D-\{l_۱,l_۲\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده درخت $T'=T-\{l_۱,l_۲\}$ است که یک تناقض است. بنابراین می‌توان فرض کرد که $\deg v_۳\geq ۴$.

گیرید u یک همسایه $v_۳$ متمایز از $v_۲$، $v_۴$ و $l_۱$ باشد. فرض کنید $u\in D$، در این صورت به همان تناقض که در ادعا ۶ نشان داده شد، می‌رسیم. بنابراین $u\notin D$. در این صورت $D-\{v_۱\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهارشده درخت $T'=T-\{v_۱,v_۲\}$ است در حالیکه در بالا نشان داده‌ایم، $T'\in\mathcal{F}_{۳n}$ و $T\in\mathcal{L}_{۳n+۲}$. □

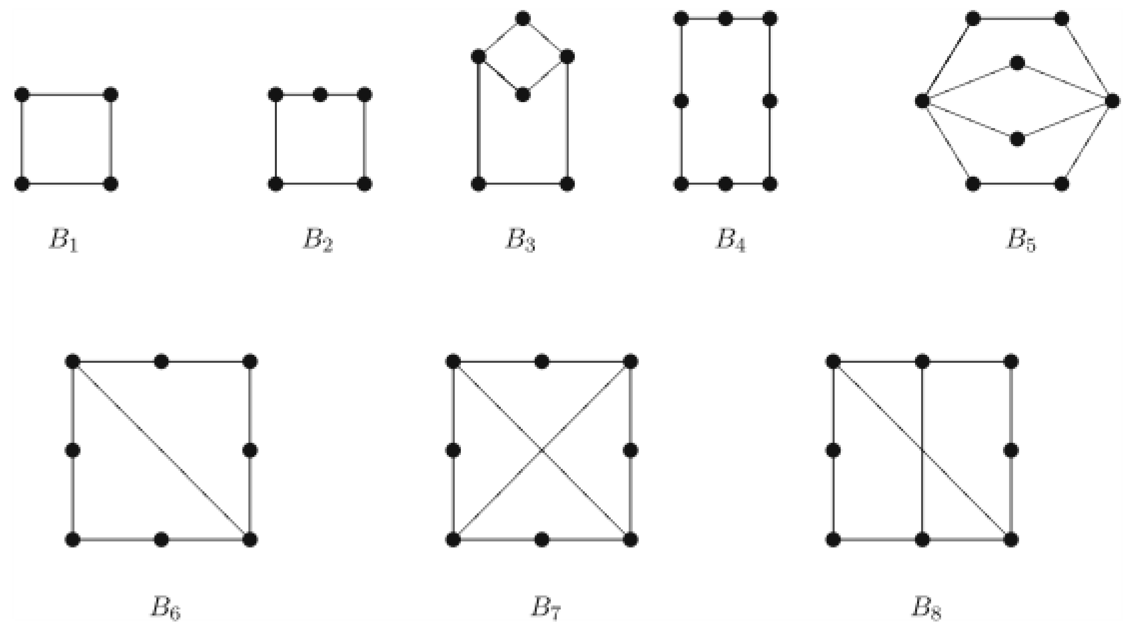
حال قضیه ۳.۱.۳، با توجه به لم‌های ۷.۱.۳، ۸.۱.۳، ۱۰.۱.۳ و ۱۱.۱.۳ به دست می‌آید.

فصل ۴

گراف‌هایی با عدد احاطه‌ای مهارشده بزرگ

۱.۴ کران‌هایی روی عدد احاطه‌ای مهارشده

اگر G گرافی همبند از مرتبه n باشد، در این صورت $V(G)$ مجموعه احاطه‌گر مهارشده G است و داریم $\gamma_r(G) \leq n$. خانواده ستاره‌های $K_{۱,n-۱}$ نشان می‌دهد که این کران دقیق است. دومکه[۱] و همکارانش در [۳] کران بالا روی عدد احاطه‌ای مهارشده یک گراف همبند با مینیمم درجه حداقل ۲ را مورد بررسی قرار دادند. فرض کنید $\mathcal{B}$ مجموعه گراف‌های نشان داده شده در شکل ۱.۴ باشد.



شکل ۱.۴: مجموعه $\mathcal{B}$ از گراف‌ها

قضیه ۱.۱.۴. [۳] *فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه $n \geq ۳$ با $\delta(G) \geq ۲$ باشد. اگر $G \notin \mathcal{B}$، آنگاه*

$$\gamma_r(G) \leq (n-۱)/۲.$$

[۱] Domke