دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

زیرخمینه‌های ریمانی با مرز معین

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (هندسه)

حسین نجف‌زاده

استاد راهنما

دکتر اعظم اعتماد

۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (هندسه) آقای حسین نجف‌زاده

تحت عنوان

زیرخمینه‌های ریمانی با مرز معین

در تاریخ ۲۳/ ٦/ ۱۳۹۰ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱– استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر اعظم اعتماد
۲– استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر امیر هاشمی
۳– استاد داور ۱	دکتر منصور آقاسی (دانشگاه صنعتی اصفهان)
۴– استاد داور ۲	دکتر محمد رضا کوشش

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده   دکتر اعظم اعتماد

از پدر و مادر عزیزم که در طول این سال‌ها هموار مشوق ما در ادامه تحصیل بوده اند، بسیار سپاس گذارم. از استاد را هنمای بزرگوارم سر کار خانم دکتر اعتماد که در طول این مدت بسیار کمکم کردند و با راهنمایی‌های به جا و راهگشای خود مرا یاری دادند تشکر می‌کنم.

فهرست مطالب

چکیده:

اساسی‌ترین مثال از زیر خمینه‌های ریمانی با انحنای از پایین کراندار، ابررویه‌های دارای انحنای مقطعی مثبت در فضای اقلیدسی هستند. این ابررویه‌ها موضعاً محدب هستند، یعنی هر نقطه دارای یک همسایگی است که به طور موضعی در یک طرف صفحه مماس در نقطه مورد نظر واقع است. در این پایان نامه در ابتدا هدف، ساختن یک خم ساده‌ی بسته و دارای مسیر مستقیم در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^3$ است. این خم در پارامتر طول قوس خود دیفرانسیل پذیراست. همچنین به جز در دو نقطه $\mathcal{C}^{\infty}$ است و مرز تعداد نامتناهی از رویه‌های $\mathcal{C}^{\infty}$، فشرده، نشانده شده، به طور مثبت خمیده شده و به طور توپولوژی مجزا واقع می‌شود. همچنین در این پایان نامه قضیه‌ی تناهی نوع توپولوژی برای زیرخمینه‌های ریمانی با مرز معین ثابت می‌شود. برای این منظور ابتدا فضاهای الکساندروف با انحنای از پایین کراندار تعریف می‌شود و در ادامه قضیه‌ی تناهی با قرار آن در چارچوب فضاهای الکساندروف با انحنای از پایین کراندار ثابت می‌گردد. طبق این قضیه بدون اعمال محدویتی روی مرز، ابررویه‌های به طور مثبت خمیده شده می‌توانند دارای هر نوع توپولوژی و ساختار هندسی کاملاً پیچیده باشند. بنابراین سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که «آیا می‌توان با تحمیل شرط‌هایی روی مرز ابررویه‌های موضعاً محدب، هندسه و توپولوژی آنها را کنترل کرد». در ادامه، فرض‌های منظم بودن از مرتبه‌ی بالاتر را در نظر می‌گیریم. همچنین با استفاده از نتایج قدیمی قضیه‌ی گاوس بونه، یعنی لم‌های کوهن — ووسن و هابر حالت قوی‌تری از قضیه‌ی تناهی نوع توپولوژی ثابت می‌شود. طبق این قضیه« یک گردآورده‌ای متناهی از خم‌های C^3، بسته و غوطه‌ور شده که در یک خمینه ریمانی مفروض شده M، واقع هستند را در نظر می‌گیریم. این گردآورده مرز حداکثر تعداد متناهی از رویه‌های C^3، غوطه‌ورشده و تام و به طور توپولوژی مجزا می‌شود. همچنین انحنای مقطعی کلی آنها به طور یکنواخت از پایین کراندار است» اثبات خواهد شد. در ادامه قضیه‌های مشهور گروموف و قضیه‌ی پایایی پرلمان ارائه می‌گردد که نشان می‌دهند بین فضاهای الکساندروف با انحنای از پایین کراندار و قضیه‌ی تناهی نوع توپولوژی رابطه عمیقی وجود دارد. همچنین با استفاده از یک تبدیل تصویری، کران بالا برای قطر خمینه که در قضیه‌ی فشردگی گروموف مطرح می‌شود به دست می‌آید. فرض کنیم Γ یک زیر خمینه‌ی غوطه ور شده، فشرده با نقص بعد ۲ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^{n+1}$ باشد. همچنین فرض کنیم $\mathcal{F}_\Gamma$ نمایش یک خانواده از ابررویه‌های غوطه‌ور شده، فشرده با خمیدگی نامنفی که Γ مرز آنها است، باشد. اکنون این نکته را مد نظر قرار می‌دهیم که فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^{n+1}$، هم ارز تصویری نیم کره‌ی باز در کره‌ی استاندارد $\mathbb{S}^{n+1}$ است و دومین فرم اساسی خمینه‌ی M نیم معین مثبت است. در این‌صورت هر $M \in \mathcal{F}_\Gamma$ به عنوان ابررویه‌ای با انحنای مقطعی بزرگ‌تر یا مساوی یک در نیم کره‌ی باز واقع در کره‌ی $\mathbb{S}^{n+1}$ در نظر گرفته می‌شوند. در انتها، با این فرض که انحنای مقطعی خارج از یک مجموعه‌ی فشرده مثبت است و دومین فرم اساسی هرجا خارج از یک مجموعه فشرده، پوچی حداکثر یک دارد، ساختار یک پایان برای ابررویه‌های غوطه‌ور شده در فضای اقلیدسی شرح داده می‌شود. همچنین با در نظر گرفتن خمینه‌های ریمانی تام با انحنای ریچی از پایین کراندار، می‌توان نشان داد که تعداد پایان برای این خمینه‌ها متناهی است و به خصوص یک کران بالا برای این تعداد وجود دارد.

کلمات کلیدی: انحنای نامنفی، ابررویه‌ی موضعاً محدب، قضیه‌ی تناهی، فضای الکساندروف باانحنای کراندار.

فصل ۱

مقدمه

اساسی‌ترین مثال از زیر خمینه‌های ریمانی با انحنای از پایین کراندار، ابررویه‌های دارای انحنای مقطعی مثبت در فضای اقلیدسی هستند. این رویه‌ها موضعاً محدب هستند، یعنی هر نقطه یک همسایگی دارد که آن همسایگی به طور موضعی در یک طرف صفحه مماس در نقطه مورد نظر واقع است. قضیه ساختاری اصلی برای ابررویه‌های تام با انحنای مقطعی مثبت که توسط هادمارد، استوکر، وان هیجنورت و ساکستدر ارائه گردیده است به صورت زیر است « فرض کنیم M یک ابررویه به طور ژئودزی تام و غوطه‌ور شده در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ باشد. اگر M در یک نقطه موضعاً محدب و اکیداً موضعاً محدب با شد و یا آن‌که M دارای انحنای مقطعی نامنفی و دارای انحنای مقطعی مثبت در آن نقطه باشد، آنگاه M محدب است یعنی مرز یک مجموعه محدب را تشکیل می‌دهد».

بنابراین می‌توان گفت که رویه‌های با انحنای مثبت و بدون مرز دارای ساختاری بسیار ساده هستند. اما رویه‌های به طور مثبت خمیده شده و مرزدار ممکن است که هم از لحاظ هندسی و هم از لحاظ توپولوژی بسیار پیچیده بشوند[۱۹]. به خصوص این رویه‌ها ممکن است که در $\mathbb{R}^3$ نه محدب و نه نشانده شده باشند حتی اگر مرز آنها روی یک بدنه محدب واقع شود. بنابراین هر نوع توپولوژی ممکن است که برای آنها وجود داشته باشد. پس بدون اعمال یک محدویت روی مرز، ابررویه‌های به طور مثبت خمیده شده می‌توانند دارای هر نوع توپولوژی و ساختار هندسی کاملاً پیچیده باشند. بنابراین یک سؤال که در این‌جا مطرح می‌شود این است که «آیا می‌توان با تحمیل شرط‌هایی روی مرز ابررویه‌های موضعاً محدب، هندسه و توپولوژی آنها را کنترل کرد؟»[۱۹].

در این پایان نامه یک ابزار اساسی روش جراحی است که به وسیله آن برای یک خانواده از رویه‌های به طور مثبت خمیده شده مانند $\{M_۰, M_۱ \ldots\}$ ما از رویه $M_۰$ یک یا چند ناحیه با انحنای بالا (یعنی یک گردن که در ادامه تعریف می‌شود) را حذف می‌کنیم و آنها را با ناحیه‌های منظم جایگزین می‌کنیم[۳۶]. به منظور تعریف دقیق چنین روشی نیاز داریم که خواص هندسی ناحیه‌های که حذف می‌شوند و همچنین ناحیه‌هایی که جایگزین آنهامی‌شوند، مشخص شود. برای این منظور مفهوم گردن را معرفی می‌کنیم، یعنی بخشی از یک رویه که به تقریب ایزومتری استوانه استاندارد $\mathbb{S}^{n-۱} \times [a, b]$ محسوب می‌شود. در ادامه، جراحی به صورت حذف یک گردن و جایگزین کردن آن با دو ناحیه وابرریخت با دیسک است که این دیسک‌ها حفره‌های به جا مانده در دو انتهای گردن را به طور هموار پر می‌کنند. به این ترتیب ما می‌توانیم به طور دقیق تغییرات احتمالی توپولوژی رویه را توصیف کنیم. در حقیقت جراحی، معکوس جمع مستقیم در توپولوژی است. بنابراین می‌توان نشان داد که بعد از تعداد متناهی جراحی همه مؤلفه‌های باقیمانده دارای توپولوژی شناخته شده هستند. در نتیجه رویه ابتدایی لزوماً با جمع مستقیم مؤلفه‌ها وابرریخت است[۳۶].

در قرن اخیر، توجه بسیاری به ساختار ابررویه‌های موضعاً محدب با مرز معین شده است. برای نمونه در [۲۴] ابررویه‌های موضعاً محدب، مرزدار و غوطه‌ور شده در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^{n+۱}$ مطالعه می‌شود. همچنین به عنوان کاربردی از قضیه اصلی در [۱۶] یک مسئله‌ی باز از یائو در [۴۲] مطرح می‌شود به این صورت که « تحت چه شرایطی خم جردن $\Gamma \subset \mathbb{R}^۳$ مرز یک رویه از انحنای مثبت است » و در [۱۶] شرایط کافی برای حل این مسئله بررسی می‌شود. همچنین درمرجع [۱۸] برای $n \geq ۲$ هر غوطه‌وری از یک خمینه $n-$ بعدی همبند و فشرده یک نشاننده است هرگاه روی هر مؤلفه‌ی مرزی خمینه، یک به یک باشد. همچنین پرفسور قمی در حالت کلی قضیه‌ی هادمارد را توسیع می‌دهد و در [۲۹] سؤالی را مطرح می‌کند که « چه موقع یک رویه به طور مثبت خمیده شده در یک ناحیه اکیداً محدب واقع می‌گردد ؟».
وی در حالت کلی این سؤال را مطرح کرد که « چه موقع یک زیر خمینه با بعد دلخواه در مرز یک ناحیه اکیداً محدب خواهد بود؟» سپس به این سؤال پاسخ داد. در حقیقت انگیزه اصلی ایشان از طرح سؤال، دادن آدرسی برای پاسخ به مسئله‌ی یائو بود.
در این پایان نامه نشان می‌دهیم که جواب سؤال فوق که مرتبط با مسئله‌ای مشابه از گاون و اسپروک است، مثبت می‌باشد به شرط آن‌که Γ به اندازه کافی منظم باشد. همچنین همین مسئله برای زیر خمینه‌های ریمانی با هر نقص بعدی بررسی می‌شود. در مقابل نشان داده می‌شود که اگر منظم بودن به طور جزئی کاهش یابد طوری که چرخش خم Γ متناهی باشد، آنگاه فقط تعداد متناهی از رویه‌های پر کننده وجود دارد که خم Γ مرز آنها است. در ادامه با فرض منظم بودن از مرتبه بالاتر، حالت قوی‌تر از قضیه‌ی تناهی برای رویه‌های پر کننده، به طور مثبت خمیده شده و فشرده ثابت خواهد شد.

مشروط بر آن‌که انحنای مقطعی در هر نقطه ناصفر باشد. در این‌صورت می‌توان همین نتیجه را برای ابررویه‌های نافشرده بررسی کرد.

در فصل دوم مفاهیم و پیش نیازها ارائه گردیده است که بر اساس تعاریف و نیازهای هندسی، مفاهیمی از توپولوژی جبری و روش‌های جراحی تنظیم و بخش بندی شده است.

در فصل سوم ابتدا یکی از روش‌های چسب (اصل پل) را بیان می‌شود و کاربرد و نتیجه آن که به نتیجه چسب معروف است در اثبات بعضی قضیه‌ها استفاده می‌شود. سپس مفهوم چرخش برای خم Γ در هنگام کاهش منظم بودن آن به طور جزئی بررسی می‌شود .

در فصل چهارم فضای طول متری موضعاً محدب، یعنی فضای الکساندروف با انحنای از پایین کراندار تعریف می‌شود و با در نظر گرفتن این فضاها استفاده از قضیه‌های معروف فشردگی گروموف و قضیه پایایی پرلمان نشان می‌دهیم که یک کلاس فشرده از زیرخمینه‌های به طور مثبت خمیده شده، یک فضای الکساندروف با انحنای از پایین کراندار است.

در فصل پنجم ساختار پایان ابررویه‌های غوطه‌ور در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^{n+1}$ شرح داده می‌شود. فرض می‌کنیم که انحنا خارج از یک مجموعه‌ی فشرده مثبت و یا انحنا نامنفی باشد و پوچی دومین فرم اساسی ابررویه خارج از یک مجموعه‌ی فشرده حداکثر یک باشد. همچنین با در نظر گرفتن خمینه‌های ریمانی تام با انحنای ریچی نامنفی خارج از یک مجموعه فشرده، ثابت می‌کنیم که تعداد پایان برای این خمینه‌ها متناهی است. به خصوص می‌توان نشان داد که یک کران بالای صریح برای این تعداد وجود دارد.

فصل ۲

پیش نیازها

۲—۱ مقدمه

در این فصل بعضی از مفاهیم و قضایایی آورده می‌شود که در فصل‌های آینده از آنها استفاده خواهد شد. مراجع عمده برای این بخش عبارتند از [۲۵] , [۱] , [۱۵] , [۳۵] , [۸] , [۱۳] , [۳۰] , [۲۸] , [۱۰].

۲—۲ پیش نیازهای هندسی و توپولوژیکی

خمینه

تعریف **۱.۲** فرض کنیم M یک فضای توپولوژی هاسدورف و با پایه‌ی شمارا باشد. در این‌صورت زوج (U,ϕ)، که در آن U مجموعه‌ای باز در M و $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ یک همان‌ریختی از U به یک زیر مجموعه‌ی باز $\mathbb{R}^m$ است را یک **دستگاه مختصاتی** یا **نقشه** و U را یک **همسایگی مختصاتی** می‌نامند. همچنین زوج (V,ϕ^{-1}) متشکل از مجموعه‌ی باز $V=\phi(U)$ در $\mathbb{R}^m$ و همان‌ریختی $\phi^{-1} : V \longrightarrow M$، یعنی وارون ϕ را یک **پارامتری** برای M گویند.

اگر خانواده‌ی $\mathcal{A} := \{(U_a,\phi_a)\}_{a\in A}$ از نقشه‌های M را با شرط $\bigcup_{a\in A} U_a = M$ در نظر بگیریم که A یک خانواده از اندیس‌هاست، آنگاه $\mathcal{A}$ یک **اطلس** و M یک **خمینه‌ی** توپولوژی m بعدی همراه با اطلس

$\mathcal{A}$ نامیده می‌شود. گوییم اطلس $\mathcal{A}$ از کلاس $\mathcal{C}^r$ است، هرگاه برای هر $a, b \in I$

$$\phi_a o\phi_b^{-1} : \phi_b(U_a \cap U_b) \longrightarrow \phi_a(U_a \cap U_b)$$

$\mathcal{C}^r$ باشد پس، خمینه‌ی M را دیفرانسیل پذیر از کلاس $\mathcal{C}^r$ نامیم هرگاه یک اطلس از کلاس $\mathcal{C}^r$ بپذیرد. خمینه‌ی m بعدی M را گاهی اوقات با نماد M^m نیز نمایش می‌دهیم. لازم به ذکر است که یک خمینه ممکن است که چندین ساختار دیفرانسیل پذیر بپذیرد و یا اصلاً هیچ ساختاری را نپذیرد.

تعریف ۲.۲ اگر $\{M, \mathcal{A}_m\}$ یک خمینه‌ی m بعدی و $N \subseteq M$ و $n \leq m$ باشد. در این‌صورت N را یک زیر خمینه n بعدی از M نامیم هرگاه برای هر $p \in M$، یک پارامتری (U, ϕ) از اطلس $\mathcal{A}$ موجود باشد که $\phi^{-1}(\phi(U) \cap N) = U \cap \mathbb{R}^n$ یا به طور معادل $\phi(U) \cap N = \phi(U \cap \mathbb{R}^n)$.

تعریف ۳.۲ فرض کنیم M و N دو خمینه $\mathcal{C}^\infty$ و $f : M \longrightarrow N$ یک نگاشت دیفرانسیل پذیر باشد. همچنین داشته باشیم $m = \dim M \leq \dim N = n$، در این صورت:

۱) نگاشت $f : M \longrightarrow N$ را یک غوطه وری در نقطه $p \in M$ می‌نامند هرگاه $(df)_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ یک تبدیل خطی یک به یک باشد. همچنین تابع هموار f را روی خمینه M غوطه‌وری می‌نامند هرگاه در همه نقاط غوطه‌وری باشد.

۲) هرگاه غوطه‌وری $f : M \longrightarrow N$ برای دو خمینه هموار M و N یک به یک و $f : M \longrightarrow f(M)$ با توپولوژی موروثی $f(M)$ از N، یک همان ریختی باشد f را یک نشاننده می‌نامند.
ثابت می‌شود هر غوطه‌وری در یک نقطه $p \in M$ به طور موضعی یک نشاننده است.

تعریف ۴.۲ فرض کنیم W یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^3$ و ν یک بردار مماس بر $\mathbb{R}^3$ در نقطه‌ی p باشد. در این‌صورت **مشتق هموردِ** W نسبت به ν عبارت است بردار مماس زیر در نقطه‌ی p،

$$\nabla_\nu W = W(p + t\nu)'(0).$$

تعریف ۵.۲ فرض کنیم M یک خمینه ریمانی باشد. یک **التصاق** روی خمینه‌ی M یک عملگر دوتایی $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ با نماد $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$ است که برای هر $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ و $X, Y, Z \in \mathcal{C}^\infty(TM)$ در شرایط زیر صادق باشد:

۱) $\nabla(fX + gY)\ Z = f\nabla_X\ Z + g\nabla_X\ Z$

۲) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

۳) $\nabla_X\ (fY) = f\nabla_X\ Y + X(f)Y$

تعریف **۶.۲** فرض کنیم (M,g) یک خمینه ریمانی با التصاق ∇ باشد. نگاشت $R : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(TM) \times \mathcal{C}^\infty(TM) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(TM)$ با نماد $R(X,Y,Z) = R(X,Y)Z$ یک **میدان تانسوری** با تعریف زیر است،

$$R(X,Y,Z) = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

تعریف **۷.۲** یک **دسته** H_λ^n با بعد n و نمایه (شمارنده) λ عبارت است از حاصل‌ضرب دو دیسک $D^{n-\lambda}$ و D^λ، یعنی $H_\lambda^n = D^\lambda \times D^{n-\lambda}$.

دیسک D^λ را در این حالت محور دسته گویند. همچنین مرز دسته H_λ^n به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\partial H_\lambda^n &= \partial(D^\lambda \times D^{n-\lambda}) = (\partial D^\lambda \times D^{n-\lambda}) \cup (D^\lambda \times \partial D^{n-\lambda}) \\ &= (S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}) \cup (D^\lambda \times S^{n-\lambda-1}).\end{aligned}$$

در ادامه یک ابزار اساسی، یعنی افراز واحد از مرجع ([٦]) تعریف می‌شود که در فصل‌های آینده از آن استفاده می‌شود.

تعریف **۸.۲** فرض کنیم M یک فضای توپولوژی باشد. در این‌صورت **محمل** تابع حقیقی مقدار $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ که با نماد نمایش داده می‌شود $\mathrm{supp(f)}$ عبارت است از بستار مجموعه‌ی نقاطی از M که مقدار تابع f در آن نقاط مخالف صفر است یا به طور معادل

$$\mathrm{supp(f)} := cl(\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}).$$

تعریف **۹.۲** فرض کنیم که M یک فضای توپولوژی باشد. در این‌صورت یک پوشش باز $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ را برای M **موضعاً متناهی** نامند هرگاه برای هر $x \in M$ یک همسایگی مانند U از نقطه $x \in M$ در M وجود داشته باشد به قسمی که به جز برای تعداد متناهی از اندیس‌های i، $U \cap U_i = \emptyset$.

اگر $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ و $\mathcal{V} = \{V_j \mid j \in J\}$ دو پوشش باز باشند، آنگاه پوشش $\mathcal{U}$ تظریف پوشش باز $\mathcal{V}$ است هرگاه حداقل برای یک $j \in J$، $U_i \subset V_j$.

تعریف **۱۰.۲** فرض کنیم که N یک خمینه از کلاس $\mathcal{C}^k$ باشد. در این‌صورت یک افراز واحد روی N عبارت است از یک خانواده‌ی $\{(U_i,\psi_i) \mid i \in I\}$ که در آن $U_i \subset N$ باز هستند و $\psi_i : N \longrightarrow \mathbb{R}$ توابعی $\mathbb{C}^k$ هستند که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

۱) برای هر $x \in N$ و برای هر $i \in I$، $\psi_i(x) \geq 0$، ۲) $\text{supp}\ (\psi_i) \subset U_i$،

۳) $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ یک پوشش موضعاً متناهی از N باشد،

۴) برای هر $x \in N$، $\sum_{i\in I} \psi_i(x) = ۱$.

تبصره **۱۱.۲** در قسمت (۴) از تعریف فوق چون مجموع مساوی یک است برای هر x مفروض، فقط تعداد متناهی از $\psi_i(x)$ ناصفر هستند، پس طبق قسمت (۳) می‌توان یک همسایگی مانند U پیدا کرد که فقط تعداد متناهی از U_i ها را قطع می‌کند. همچنین به وسیله (۳) فقط ψ_i اختصاص داده شده در x ناصفر هستند.

تعریف **۱۲.۲** اگر M یک خمینه دیفرانسیل پذیر n بعدی باشد، آنگاه به هر نقطه $p \in M$ یک فضای برداری n بعدی T_pM اختصاص می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنیم که

$$Curves_pM := \{\Gamma_۱ : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M \mid \Gamma_۱(۰) = p\}$$

فضای خم‌های روی M با مرکز واقع در p باشند. یک جفت خم $\Gamma_۱, \Gamma_۲ \in Curves_pM$ را در نقطه p مماس گوییم و به صورت $\Gamma_۱ \sim \Gamma_۲$ نمایش می‌دهیم به شرط آن‌که یک نقشه موضعی (U, ϕ) از M وجود داشته باشد به قسمی که

$$(\phi o \Gamma_۱)'(۰) = (\phi o \Gamma_۲)'(۰)$$

توجه داریم که اگر (V, ψ) یک نقشه موضعی دیگر از M باشد، آنگاه طبق قاعده زنجیری

$$\begin{aligned}
(\psi o \Gamma_۱)'(۰) &= (\psi o \phi^{-۱} \circ \phi o \Gamma_۱)'(۰) \\
&= [(\psi o \phi^{-۱})'(\phi(\Gamma_۱(۰)))] o [(\phi \circ \Gamma_۱)'(۰)] \\
&= (\psi o \phi^{-۱} \circ \phi o \Gamma_۲)'(۰) \\
&= [(\psi o \phi^{-۱})'(\phi(\Gamma_۲(۰)))] o [(\phi \circ \Gamma_۲)'(۰)] \\
&= (\psi o \Gamma_۲)'(۰)
\end{aligned}$$

بنابراین رابطه‌ی $\sim$ خوش‌تعریف است، یعنی مستقل از انتخاب مختصات موضعی است. بنابراین واضح است که $\sim$ یک رابطه‌ی هم ارزی است. مجموعه بردارهای مماس بر M در نقطه‌ی p را با T_pM نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$T_pM := Curves_pM/\sim .$$

تعریف ۱۳.۲ فرض کنیم E و M دو خمینه‌ی توپولوژی و $\pi : E \longrightarrow M$ یک تابع پیوسته و پوشا باشد. در این صورت سه تایی (E, M, π) را یک **کلاف برداری** از بعد k روی M گویند هرگاه شرایط زیر برقرار باشد.

(۱) برای هر $p \in M$، $E_p := \pi^{-1}(p)$ یک فضای برداری حقیقی k بعدی باشد. به E_p، تار نظیر p گویند.

(۲) برای هر $p \in M$، همسایگی $U \subseteq M$ از p و یک وابرریختی $\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^k$ موجود باشد به قسمی که برای هر $q \in U$ نگاشت $\phi_q = \phi_{|_{E_q}} : E_q \longrightarrow \{q\} \times \mathbb{R}^k$ یک یکریختی فضاهای برداری باشد. در این‌صورت به زوج $(\pi^{-1}(U), \phi)$ **نقشه‌ی کلافی** گویند.

تعریف ۱۴.۲ برای یک کلاف برداری $\pi : E \longrightarrow M$ اگر نگاشت پیوسته‌ی $\xi : M \longrightarrow E$ موجود باشد به‌طوری که $\pi \circ \xi = id_M$، که در این‌جا id_M تابع همانی روی M است، آنگاه نگاشت ξ را یک **برش** از π نامند.

فضای برش‌های هموار از کلاف برداری $\pi : E \longrightarrow M$ با $\Gamma(\pi)$ نمایش داده می‌شود.

فرض کنیم که M یک خمینه ریمانی n بعدی و M' یک زیر خمینه ریمانی با بعد k باشد به قسمی که $k \leq n$ و $i : M' \hookrightarrow M$ نگاشت شمول باشد. در این‌صورت در هر نقطه $x \in M'$ فضای مماس به M' به عنوان یک زیرفضا از فضای مماس به M از طریق شمول خطی $di_x : T_xM' \hookrightarrow T_xM$ است به قسمی که $x = i(x)$.

خارج قسمت $N_xM' := T_xM - T_xM'$ یک فضای برداری $(n-k)$ بعدی است که **فضای قائم** به M' در نقطه x نامیده می‌شود. همچنین کلاف قائم از M' به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$NM' := \{(x, v) |\ x \in M',\ v \in N_xM'\}.$$

در این‌صورت مجموعه NM' تحت تصویر طبیعی دارای ساختار کلاف قائم از رتبه‌ی $(n-k)$ روی M' است از این رو به عنوان یک خمینه دارای بعد n است.

قضیه ۱۵.۲ (قضیه همسایگی لوله‌ای[۱۰]) فرض کنیم که M یک خمینه n بعدی و M' یک زیر خمینه $k-$ بعدی $(k \leq n)$ و NM' کلاف قائم M' در M و $i_\circ : X \hookrightarrow NM'$ برش صفر و $i : M' \hookrightarrow M$ نگاشت شمول باشد، آنگاه یک همسایگی محدب مانند $\mathcal{U}_\circ$ از M' در NM' و یک همسایگی $\mathcal{U}$ از M' در M و یک وابرریختی $\varphi : \mathcal{U}_\circ \longrightarrow \mathcal{U}$ وجود دارند طوری که نمودار زیر جابجایی باشد.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}_0 \arrow[rr, "\varphi", "\simeq"'] & & \mathcal{U} \subseteq M \\ & M' \arrow[ul, "i_0"] \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

شکل ۲–۱: دیاگرام جابجایی

تعریف ۱۶.۲ برای $1 < p \leq q$ فرض کنیم M^p یک خمینه فشرده و به طور هموار نشانده شده در خمینه ریمانی $\overline{M}^q$ باشد. دراین صورت برای نقطه $x \in M$، دیسک باشعاع ε و مرکز x را در $\overline{M}^q$ نظر می‌گیریم. اجتماع این دیسک ها یک همسایگی لوله‌ای است که با نماد $N_\varepsilon M$ نمایش داده می‌شود.
همچنین برای خم Γ در $\mathbb{R}^3$ فرض کنیم که $N_\varepsilon \Gamma$ مجموعه همه‌ی نقاطی از M باشد که فاصله‌ی آنها از Γ کمتراز ε است، طبق قضیه همسایگی لوله‌ای برای ε به اندازه کافی کوچک، $N_\varepsilon \Gamma$ به وسیله‌ی پاره خط‌های ژئودزی که خم Γ را به طور عمودی در یک نقطه قطع می‌کنند، تار تار شده است، این مطلب نگاشت تصویری طبیعی $\pi : N_\varepsilon \Gamma \longrightarrow \Gamma$ را نتیجه می‌دهد. اکنون همسایگی U از نقطه p لوله‌ای است به شرط آن‌که همسایگی باز I از نقطه p در خم Γ وجود داشته باشد به قسمی که $U = \pi^{-1}(I)$ است و برای هر $p \in I$ (I) $U = \pi^{-1}$ تار روی p باشد.

با توجه به تعریف چون $N_\varepsilon M$ یک زیر مجموعه باز از $\overline{M}^q$ است، پس یک زیر خمینه q–بعدی از آن است و همچنین می‌دانیم مرز آن یعنی $\partial N_\varepsilon M$ یک زیر خمینه $(q-1)$–بعدی از $\overline{M}^q$ است. به خصوص $\partial N_\varepsilon M$ به صورت کره‌هایی با شعاع ε لایه لایه بندی شده است که مرکز آن‌ها در M واقع است[۱۵].

تعریف ۱۷.۲ یک مجموعه‌ی محدب با درون غیر تهی را یک **بدنه‌ی محدب** می‌نامند. یک بدنه‌ی محدب را اکیداً محدب نامند هرگاه از هر نقطه‌ی آن یک گوی با شعاع یکنواخت بگذرد به قسمی که درون آن مجزا از بدنه محدب باشد. یک ابررویه‌ی محدب، مرز یک بدنه‌ی محدب است . همچنین یک **قاچ محدب** یک ابررویه محدب از یک ابر صفحه در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^{n+1}$ است. به علاوه یک خمینه ریمانی n– بعدی مرز دار که برابر بستار اشتراک یک ابررویه محدب در $\mathbb{R}^{n+1}$ با نیم فضای باز $\mathbb{H}^{n+1}$ است را یک **کلاه محدب** می‌نامند. واضح است که مرز یک کلاه محدب، یک قاچ محدب است.

تعریف ۱۸.۲ فرض کنیم M یک خمینه n–بعدی $(n \geq 2)$، همبند و مرزدار باشد. در این‌صورت نگاشت $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ را موضعاً محدب نامیم هرگاه f یک توسیع $\tilde{f}$ به یک خمینه بدون مرز $\tilde{M}$ دارد به قسمی که هر $p \in M$ یک همسایگی U_p در $\tilde{M}$ دارد که به وسیله‌ی $\tilde{f}$ به روی مرز بدنه محدب K_p

نشانده می‌شود.

۲–۳ جراحی روی یک خمینه

نظریه جراحی روی یک خمینه، عبارت است از به کارگیری یک خانواده از روش‌ها برای تولید یک خمینه از خمینه دیگر به صورت کنترل شده، که توسط میلنر([۳۰]) معرفی گردید. جراحی با برش از قسمت‌های یک خمینه و جایگزین کردن آن با قسمت های خمینه دیگر صورت می‌گیرد به این معنی که چون فضای $S^p \times S^{q-1}$ هم می‌تواند مرز $D^{p+1} \times S^{q-1}$ باشد و هم مرز $S^p \times D^q$ واقع شود، بنابراین برای خمینه $n-$ بعدی دیگر یعنی M با بعد $n = p + q$ و یک نشاننده $\phi : S^p \times D^q \longrightarrow M$، می‌توان با فرض $A = \mathrm{Im}(\phi)$ خمینه دیگر یعنی M' با بعد n را به صورت زیر تعریف کنیم،

$$M' = (M - \mathrm{Int}\ A) \cup_{\phi_{|S^p \times S^{q-1}}} D^{p+1} \times S^{q-1}$$

بنابراین خمینه M' به وسیله جراحی برش از $S^p \times D^q$ و چسباندن فضای $D^{p+1} \times S^{q-1}$ به دست می آید که به آن یک $p-$ جراحی گویند. تأکید می‌کنیم که خمینه M' دارای نقاط گوشه است که یک روش متعارف برای هموار کردن آنها وجود دارد.
بین جراحی و اتصال دسته به خمینه ارتباط نزدیکی وجود دارد. در واقع اتصال یک دسته به این‌صورت است که برای یک خمینه ریمانی $(n+1)$- بعدی و مرزدار $(L, \partial L)$ و یک نشاننده $\phi : S^p \times D^q \longrightarrow \partial L$ خمینه ریمانی $(n+1)$- بعدی و مرزدار L' به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$L' = L \cup_{\phi_{|S^p \times D^q}} D^{p+1} \times D^q$$

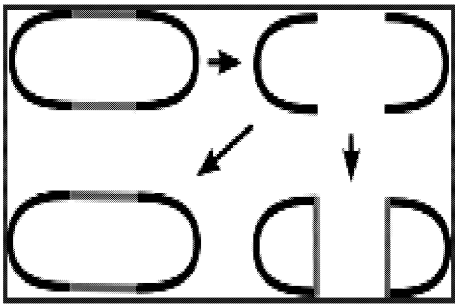
در واقع خمینه L' به وسیله اتصال یک $(p+1)-$ دسته به خمینه‌ی L به دست می‌آید. همچنین $\partial L'$ به وسیله یک $p-$ جراحی از ∂L به دست می‌آید، یعنی با فرض $B = \mathrm{Im}(\phi)$ خواهیم داشت،

$$\partial L' = (\partial L - \mathrm{Int}\ B) \cup_{|S^p \times S^{q-1}} D^{p+1} \times S^{q-1}$$

مثال‌های زیر با هدف توضیح این موضوع بیان می‌گردند.

مثال ۱۹.۲ جراحی روی یک دایره

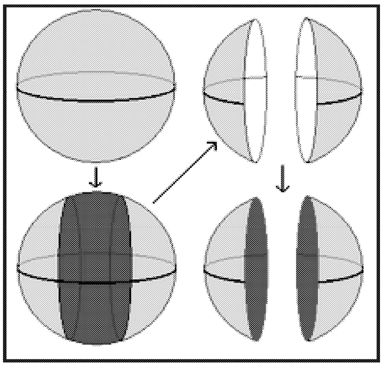
طبق تعریف جراحی روی یک دایره شامل برش از یک کپی از $S^\circ \times D^1 = \{-1\} \times [\circ, 1] \cup \{1\} \times [-1, 1]$ و چسباندن در $D^1 \times S^\circ$ است. نتیجه این کار یا S^1 است یا دوکپی از S^1 که در شکل ۲–۲ نشان داده شده است.

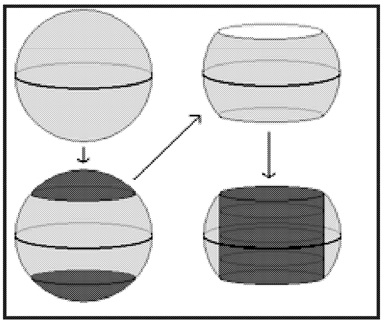


شکل ۲—۲: جراحی روی دایره

مثال ۲۰.۲ جراحی روی یک کره دوبعدی

در این مورد، برش به صورت $D^{2} \times S^{0}$ یا $D^{1} \times S^{1}$ است. اگر استوانه $D^{1} \times S^{1}$ را از کره $\mathbb{S}^{2}$ حذف کنیم، طبق شکل ۲—۳ دو دیسک $D^{2} \times S^{0}$ می‌مانند. اکنون با چسباندن این دو دیسک $D^{2} \times S^{0}$ در امتداد مرزی که استوانه حذف شده است، دو کره متمایز حاصل می‌شود. اگر برش به صورت دو دیسک $D^{2} \times S^{0}$ باشد با چسباندن استوانه‌ی $D^{1} \times S^{1}$ در امتداد مرز دیسک‌ها دو امکان وجود دارد، یعنی اگر نگاشت‌های چسب روی مرز دو دایره دارای جهت یکسان باشند یک چنبره $S^{1} \times S^{1}$ به دست می‌آید و اگر دارای جهت عکس باشند یک بطری کلاین به دست می‌آید.





شکل ۲—۳: جراحی روی کره دو بعدی

حال فرض کنیم H_λ^n یک دسته و M^n یک خمینه باشد. در زیر مطابق [۱۵] نحوه‌ی چسباندن دسته به یک خمینه هموار توضیح داده می‌شود. برای کره به طور هموار نشانده شده $S^{\lambda-1} \subset V^{n-1}$ طبق تعریف (۲.۱) $N_\varepsilon S^{\lambda-1}$ یک همسایگی لوله‌ای به شعاع ε، برای آن است و به شکل $N_\varepsilon S^{\lambda-1} = S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$ قابل نمایش است. همچنین در آن $D^{n-\lambda}$ یک دیسک نرمال به شعاع ε است. وقتی که دسته H_λ^n را به خمینه W^n متصل کنیم، $S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$ بخشی از مرز $\tilde{V}$ می‌شود. اگر کره $S^{\lambda-1}$ متعلق به $\partial W^n = V^{n-1}$ باشد، در این صورت یک خمینه جدید $\tilde{W}^n$ با مرز $\tilde{V}^{n-1}$ بدست خواهدآمد، به عبارت دیگر فرض کنیم V^{n-1} یک خمینه فشرده و هموار و ϕ یک نشاننده هموار از $S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$ به V^{n-1} باشد. طوری که همسایگی لوله‌ای $N_\varepsilon S^{\lambda-1}$ با $S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$ همان ریخت است. به وضوح، $\partial(S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}) = S^{\lambda-1} \times S^{n-\lambda-1}$. حال خمینه $D^\lambda \times S^{n-\lambda-1}$ با $\partial(D^\lambda \times S^{n-\lambda-1}) = S^{\lambda-1} \times S^{n-\lambda-1}$ را در نظر می گیریم. با جراحی روی خمینه V^{n-1} و با فرض $\mathrm{Im}\ (\phi) = A$ خمینه جدید

$$\tilde{V}^{n-1} = (V^{n-1} - \mathrm{Int}\ A) \cup_{|S^{\lambda-1} \times S^{n-\lambda-1}} S^{n-\lambda-1} \times D^\lambda.$$

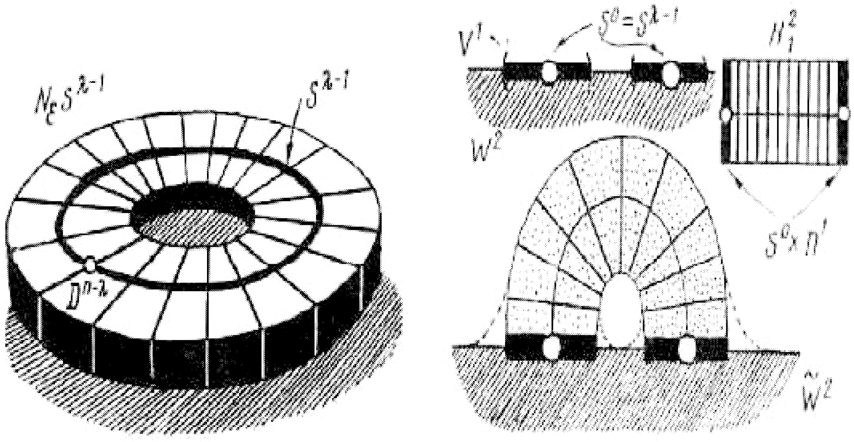
را می سازیم، یعنی همسایگی $N_\varepsilon S^{\lambda-1}$ از V^{n-1} بر می داریم و به جای آن $S^{n-\lambda-1} \times D^\lambda$ قرار می‌دهیم. به عبارت دیگر در ضرب مستقیم $S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$ جای کره و دیسک را با هم عوض می‌کنیم. یعنی $S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$ به جای $D^\lambda \times S^{n-\lambda-1}$ قرار می‌گیرد. در واقع همان طور که پیشتر گفته شد از این حقیقت استفاده می کنیم که مرز این دو خمینه همان‌ریخت هستند. ساده ترین مثال در این زمینه برای $n = ۳$ و $\lambda = ۲$ با توجه به این که $D^\lambda \times S^{n-\lambda-1} = D^1 \times S^1$ به صورت زیر است:

$$U_\varepsilon S^{\lambda-1} = D^2 \cup D^2 = S^0 \times D^2, \qquad \partial(U_\varepsilon S^{\lambda-1}) = S^1 \times S^0, \qquad \partial(D^1 \times S^1) = S^0 \times S^1.$$

حال همواری در نقاط گوشه را بررسی می‌کنیم. فرض کنیم $x \in \partial N_\varepsilon S^{\lambda-1}$ یک نقطه گوشه و $g : S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \longrightarrow N_\varepsilon S^{\lambda-1}$ یک نشاننده هموار باشد که قسمتی از مرز دسته رابه همسایگی $N_\varepsilon S^{\lambda-1}$ تصویر می‌کند. نشاننده هموار g همسایگی U از نقطه گوشه x را به قسمتی از مرز هموار شده یعنی $\tilde{V}^{n-1}$ تصویر می‌کند، بنابراین $g^{-1}(x)$ یک همسایگی همواراست و بر مرز $\tilde{V}$ واقع است.

۲–۴ پیش نیازهایی از جبر خطی

تعریف **۲۱.۲** شکل درجه دوم $q(X) = X^T A X = \sum\limits_{i,j} a_{ij} x_j$ که در آن X یک بردار و A یک ماتریس متقارن است، معین مثبت نامیم اگر و فقط اگر برای تمام بردارهای حقیقی X به‌جز $X = 0$، $q(X)$



شکل ۲—۴: همسایگی لوله‌ای و چگونگی اتصال دسته به خمینه

بزرگ‌تر از صفر باشد.

تعریف ۲۲.۲ فرض کنیم که $U \subset \mathbb{R}^n$ و $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع n—متغیره حقیقی مقدار باشد. دراین‌صورت برای هر نقطه $p \in U$، هسیان (هسه‌ای) f در نقطه p یک فرم دوخطی روی $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ است که برای بردارهای $v, w \in \mathbb{R}^n$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود،

$$Hess\ f_p(v,w) := \sum_{i,j}^{n} D_{ij}f(p)v_iw_j$$

تعریف ۲۳.۲ فرض کنیم $f : R^n \to R$ یک تابع $n-$ متغیره حقیقی مقدار باشد که مشتقات جزئی مرتبه دوم دارد. در این صورت ماتریس هسه‌ای برای نگاشت f یک ماتریس $n \times n$ است که درایه‌های آن مشتقات جزیی مرتبه دوم f هستند. بنابراین اثر ماتریس هسه‌ای f روی هر بردار X به صورت زیر محاسبه می شود

$$H(f)_{ij}(X) = D_iD_jf(X) \quad , \qquad X = (x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$$

که در آن D_k نمایش مشتق جزئی مرتبه k ام است. همچنین، هسه‌ای f در نقطه p به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Hessf(p) = det[D_iD_jf(p)]$$

بنابراین برای نقطه‌ی $p = (x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$، هسه‌ای برابر ماتریس زیر است.