بسم الله الرحمن الرحيم
الحمد لله رب العالمين الرحمن الرحيم مالك يوم الدين
اهدنا الصراط المستقيم صراط الذين
انعمت عليهم غير المغضوب عليهم
ولا الضالين

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی عمران

حل مسائل مکانیک جامدات
با استفاده از توابع پایه هموار به شکل بدون شبکه محلی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد عمران

گرایش سازه

احسان سلیمانی‌فر

استاد راهنما

دکتر بیژن برومند

۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده مهندسی عمران

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی عمران - گرایش سازه

احسان سلیمانی‌فر

تحت عنوان:

حل مسائل مکانیک جامدات
با استفاده از توابع پایه هموار به شکل بدون شبکه محلی

در تاریخ ۱۳۹۰/۶/۲۸ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرارگرفت.

۱- استاد راهنمای پایان نامه: دکتر بیژن برومند

۲- استاد مشاور پایان‌نامه: دکتر مجتبی ازهری

۳- استاد داور: دکتر فرشید مسیبی

۴- استاد داور: دکتر علی محمد مومنی

۵- مسئول تحصیلات تکمیلی دانشکده: دکتر عبدالرضا کبیری

تشکر و قدردانی

■ با تشکر از استاد ارجمند، **جناب آقای دکتر بیژن برومند**، که با حوصله و دقت فراوان هدایت این تحقیق را بر عهده داشته‌اند. بدون شک انجام این پایان‌نامه بدون حمایت و مدیریت ایشان میسر نمی‌بود.

■ با سپاس از استاد محترم، **جناب آقای دکتر مجتبی ازهری**، که در طول دوران تحصیل و انجام پایان‌نامه همواره مشوق و راهنمای من بوده‌اند.

■ با سپاس از استاد محترم، **جناب آقای دکتر محمد مهدی سعادت‌پور**، که در طول دوران تحصیل همواره مشوق و راهنمای من بوده‌اند.

■ با قدردانی از **خانواده‌ام** که همواره همراه و مشوق من بوده و هستند.

■ با تشکر از **کلیه اساتید و دوستان‌ام** که در طی دوران تحصیل از لطف و محبت آن‌ها برخوردار بوده‌ام.

کلیه حقـوق مادی مترتب بر نتایـــج مطالعـــات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیـق موضـوع این پایان‌نامه متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

تقدیم به

پدر و مادرم

فهرست مطالب

فهرست مطالب ..... هشت
چکیده ۱
فصل اول: مقدمه و کلیات
۱-۱- مقدمه ۲
۱-۲- هدف از تحقیق ۴
۱-۳- پیشینه علمی موضوع ۵
۱-۴- محتوی فصول آینده ۱۱
فصل دوم: حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از یک روش محلی بدون شبکه
۲-۱- مقدمه ۱۲
۲-۲- فرمول بندی روش ۱۳
۲-۲-۱- بخش خصوصی پاسخ معادله دیفرانسیل ۱۵
۲-۲-۲- بخش همگن پاسخ معادله دیفرانسیل ۱۷
۲-۲-۳- نحوه تشکیل معادلات در داخل دامنه حل ۱۸
۲-۲-۴- ارضاء شرایط مرزی ۱۹
۲-۳- مثال‌های عددی ۲۲
۲-۳-۱- دامنه‌های مستطیلی با آرایش منظم نقاط ۲۳
۲-۳-۲- دامنه‌های مستطیلی با آرایش نامنظم نقاط ۲۸
۲-۴- حل مسائل با دامنه‌های غیر مستطیلی ۳۴
۲-۴-۱- نحوه تشکیل معادلات در داخل دامنه حل ۳۵
۲-۴-۲- ارضاء شرایط مرزی ۳۵
فصل سوم: کلیات روش پیشنهادی
۳-۱- مقدمه ۴۰
۳-۲- فرمول بندی روش ۴۱
۳-۲-۱- نحوه تشکیل معادلات در داخل دامنه حل ۴۵
۳-۲-۲- نحوه ارضاء شرایط مرزی ۴۸

۳-۲-۳- اضافه نمودن حل خصوصی ۵۰
۳-۳- عوامل موثر بر دقت نتایج ۵۳
۳-۳-۱- توابع پایه حل همگن ۵۴
۳-۳-۲- نحوه تشکیل ابرها ۵۵
۳-۳-۳- موقعیت و تعداد نقاط واسطه ۵۶
۳-۳-۴- ضرایب وزنی موجود در عبارت باقیمانده ۵۷
فصل چهارم: استفاده از روش پیشنهادی برای حل معادلات هلمهلتز و پواسون
۴-۱- مقدمه ۵۹
۴-۲- معادله دیفرانسیل هلمهلتز ۵۹
۴-۳- معادله دیفرانسیل پواسون ۶۱
۴-۴- فرمول بندی روش ۶۲
۴-۴-۱- بدست آوردن توابع پایه حل همگن ۶۳
۴-۴-۲- نحوه تشکیل معادلات در داخل دامنه حل ۶۶
۴-۴-۳- نحوه ارضاء شرایط مرزی ۶۹
۴-۴-۴- بدست آوردن حل خصوصی ۷۲
۴-۵- مثال‌های عددی ۷۴
۴-۵-۱- بررسی دقت حل ونحوه توزیع خطا ۷۵
۴-۵-۲- بررسی روند همگرایی حل ۸۵
فصل پنجم: استفاده از روش پیشنهادی برای حل معادلات الاستیسیته و موج الاستیک
۵-۱- مقدمه ۸۹
۵-۲- مسئله الاستیسیته ۸۹
۵-۳- مسئله موج الاستیک ۹۲
۵-۴- فرمول‌بندی روش ۹۳
۵-۴-۱- بدست آوردن توابع پایه حل همگن ۹۴

۵-۴-۲- نحوه تشکیل معادلات در داخل دامنه حل ۹۸
۵-۴-۳- نحوه ارضاء شرایط مرزی ۱۰۲
۵-۴-۴- بدست آوردن حل خصوصی ۱۰۵
۵-۵- مثال‌های عددی ۱۰۶
۵-۵-۱- بررسی دقت حل ونحوه توزیع خطا ۱۰۷
۵-۵-۲- بررسی روند همگرایی حل ۱۲۵
فصل ششم: نتیجه‌گیری و پیشنهادات
۶-۱- مقدمه ۱۳۰
۶-۲- نتیجه‌گیری ۱۳۱
۶-۳- پیشنهادات ۱۳۲
پیوست ۱ ۱۳۳
فهرست مراجع ۱۳۵
چکیده انگلیسی ۱۳۸

چکیده

در این پایان‌نامه حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت با استفاده از توابع پایه هموار به صورت بدون شبکه محلی مورد بررسی قرار گرفته است. این معادلات دارای کاربرد فراوانی در زمینه حل مسائل مهندسی و علوم پایه می‌باشند. در این راستا ابتدا یک روش بدون شبکه محلی بر اساس تحقیقات صورت گرفته قبلی بیان شده و با ارائه چند مثال عددی به بررسی ویژگی‌های آن پرداخته شده است. در این روش به منظور گسسته‌سازی دامنه حل از یک سری نقاط گره‌ای در داخل دامنه و روی مرزها استفاده می‌شود. بررسی‌های انجام شده نشان می‌دهد که وجود نامنظمی در شبکه نقاط گره‌ای باعث کاهش دقت حل و کیفیت نتایج نهایی می‌گردد که به منظور بهبود این مشکل و فراهم شدن امکان حل مسائل بیشتری با استفاده از روش مذکور یک راهکار ساده ارائه شده است.

در این پایان‌نامه همچنین یک روش محلی بدون شبکه جدید به منظور حل مسائل مختلف توسعه داده شده است. در این روش نیز گسسته‌سازی دامنه حل به وسیله شبکه‌ای از نقاط گره‌ای صورت می‌گیرد و در هر یک از این نقاط یک ابر شامل تعدادی از نقاط گره‌ای مجاور در نظر گرفته می‌شود. پاسخ معادله دیفرانسیل در محدوده هر ابر به صورت مجموع دو بخش همگن و خصوصی نوشته شده و هر یک از این بخش‌ها به صورت یک ترکیب خطی از یک سری توابع پایه نمایی بیان می‌شوند. توابع پایه حل همگن به نحوی تعیین می‌شوند که معادله دیفرانسیل همگن به شکل دقیق در دامنه حل ارضاء شود. به منظور تشکیل معادلات نهایی در روش پیشنهادی علاوه بر نقاط گره‌ای از یک سری نقاط واسطه نیز در سراسر دامنه و روی مرزها استفاده می‌شود. این معادلات در داخل دامنه به گونه‌ای تنظیم می‌گردد که موجب پیوستگی حل ابرهای مجاور شود که این کار با تشکیل یک عبارت باقیمانده در هر یک از نقاط واسطه انجام می‌شود. به منظور ارضاء شرایط مرزی نیز از شیوه‌ای شبیه به نحوه تشکیل معادلات در داخل دامنه حل استفاده شده که از توانایی مناسبی در برآورده ساختن شرایط مرزی برخوردار می‌باشد. یکی از پارامترهای موثر بر دقت نتایج در روش پیشنهادی توابع پایه مورد استفاده در حل همگن است که این توابع با استفاده از قضایای نمونه‌برداری انتخاب می‌شوند. قضایای نمونه برداری حداکثر فرکانس موجود در توابع پایه حل همگن را به مقادیر مشخصی محدود می‌کنند. روابط مورد استفاده در روش پیشنهادی به منظور حل برخی از مسائل پرکاربرد در زمینه مکانیک جامدات، از جمله معادلات دیفرانسیل هلمهلتز و پواسون و نیز مسائل الاستیسیته و موج الاستیک بر روی دامنه‌های دو بعدی توسعه داده شده و در هر مورد حل مثال‌های عددی مختلفی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج بدست آمده از حل مثال‌های عددی نشان دهنده توانایی این روش در حل این دسته از مسائل بر روی دامنه‌هایی با اشکال هندسی مختلف و شرایط مرزی گوناگون است، همچنین این روش نسبت به نامنظمی شبکه نقاط گره‌ای حساس نمی‌باشد. توانایی حل مسائل با فرکانس‌های نسبتاً زیاد و نیز مسائلی که دارای نقاط تکین در نزدیکی دامنه حل می‌باشند از دیگر ویژگی‌های روش پیشنهادی به حساب می‌آید. اگرچه روش ارائه شده در این پایان‌نامه به منظور حل برخی از مسائل مهم در زمینه مکانیک جامدات مورد استفاده قرار گرفته است، قابلیت توسعه به منظور حل مسائل بسیار بیشتری را دارد.

کلمات کلیدی

معادلات دیفرانسیل، توابع پایه نمایی، روش بدون شبکه، قضایای نمونه برداری، مکانیک جامدات

فصل اول
مقدمه و کلیات

۱-۱- مقدمه

تلاش برای توصیف و پیش‌بینی رفتار پدیده‌های محیط پیرامون بشر همواره مورد توجه دانشمندان و محققان علوم مختلف بوده است. به دلیل پیچیدگی ذاتی پدیده‌های گوناگون، این تلاش‌ها معمولاً به مدل‌های ساده شده‌ای از هر پدیده منتهی می‌گردد و هر مدل تنها قادر به توضیح برخی از مهم‌ترین ویژگی‌های هر پدیده می‌باشد. نیاز به توصیف دقیق و کمی این پدیده‌ها منجر به استفاده از روابط ریاضی به منظور فرمول‌بندی مدل‌های مختلف می‌شود. این مدل‌های ریاضی در شاخه‌های مختلف علوم، به ویژه علوم مهندسی، معمولاً به شکل معادلات دیفرانسیل ظاهر می‌گردد. از این روی ارائه روش‌های مناسب به منظور حل دقیق‌تر و سریع‌تر معادلات مزبور از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

یک معادله دیفرانسیل رابطه‌ای ریاضی است که شامل توابع مجهول و مشتقات آنها نسبت به متغیرهای مسئله می‌باشد. حل یک مسئله معادله دیفرانسیل علاوه بر ارضاء معادله در داخل دامنه حل، نیازمند برآورده ساختن شرایط مرزی مخصوص آن مسئله است. تنوع شرایط مرزی در مسائل گوناگون و نیز پیچیدگی‌های مربوط به ارضاء معادلات باعث می‌شود ارائه روش‌های تحلیلی و حل‌های دقیق جز در موارد محدود و حالات خاص امکان‌پذیر نباشد. بنابراین تلاش برای گسترش روش‌های عددی به منظور حل معادلات دیفرانسیل بسیار حائز اهمیت بوده و همواره توجه محققان بیشماری را به خود جلب نموده است. از طرف دیگر پیشرفت چشمگیر فناوری رایانه در طول

دهه‌های اخیر امکان توسعه هرچه بیشتر این روش‌ها را فراهم نموده است. از جمله مهم‌ترین روش‌های عددی که برای حل معادلات دیفرانسیل گسترش یافته‌اند می‌توان به روش تفاضلات محدود[۱]، روش المان‌های محدود[۲]، روش المان‌های مرزی[۳] و روش بدون شبکه[۴] اشاره نمود که در ادامه توضیح مختصری درباره کلیات هر یک از آنها ارائه می‌شود.

در روش تفاضلات محدود ابتدا دامنه حل توسط شبکه‌ای از نقاط گره‌ای گسسته می‌شود. سپس در هر یک از این نقاط، مشتقات معادله دیفرانسیل به وسیله یک ترکیب خطی از مقادیر تابع مورد نظر در نقاط شبکه تقریب زده می‌شود. بدین ترتیب یک دستگاه معادلات خطی بر حسب مقادیر گره‌ای تابع مجهول حاصل خواهد شد که به راحتی قابل حل است. در شکل اولیه این روش، نقاط شبکه باید با آرایش مستطیلی کنار یکدیگر چیده شوند اما در شکل تعمیم یافته، نقاط می‌توانند به صورت دلخواه کنار یکدیگر قرار گیرند.

در روش المان‌های محدود گسسته‌سازی دامنه حل به وسیله تعداد متناهی از المان‌ها که از طریق گره‌هایشان با یکدیگر در ارتباط هستند صورت می‌پذیرد. در این روش تابع مورد نظر در محدوده هر المان با استفاده از یک سری توابع شکل بر حسب مقادیر گره‌ای مجهول درون‌یابی می‌گردد. توابع شکل مورد استفاده در روش المان‌های محدود معمولاً از خاصیت دلتای کرونیکر برخوردار هستند، بدین معنی که مقدار تابع در گره مربوطه برابر واحد و در سایر گره‌ها برابر صفر می‌باشد. در نهایت با اعمال فرم ضعیف معادلات بر کلیه المان‌ها، یک دستگاه معادلات خطی حاصل می‌شود که با حل آن مقادیر مجهول گره‌ای بدست می‌آید. لازم به ذکر است که روش المان‌های محدود در طول دهه‌های گذشته به عنوان قدرتمندترین روش در زمینه حل مسائل مکانیک شناخته شده و پیشرفت‌های چشمگیری در زمینه علوم پایه و مهندسی بوجود آورده است.

معادلات دیفرانسیل در بسیاری از موارد قابل تبدیل به فرم انتگرالی هستند. در روش المان‌های مرزی از این واقعیت استفاده شده و معادلات دیفرانسیل داخل دامنه به فرم انتگرالی روی مرز نوشته می‌شوند. برای حل معادله دیفرانسیل در این روش یک حل اساسی از معادله مورد نیاز است که این حل اساسی معمولاً حل معادله دیفرانسیل با سمت راست تابع دلتای دیراک است. در این روش گسسته‌سازی فقط روی مرز صورت می‌پذیرد که بسیار ساده‌تر از گسسته‌سازی کل دامنه حل می‌باشد.

دسته دیگری از روش‌ها که در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است روش‌های بدون شبکه است که در آنها نیازی به استفاده از المان یا شبکه جهت گسسته‌سازی دامنه حل نمی‌باشد. در این روش‌ها دامنه

---

[1] Finite Difference Method
[2] Finite Element Method
[3] Boundary Element Method
[4] Meshless Method (MeshFree Method)

حل به وسیله یک سری از نقاط گره‌ای گسسته می‌شود که تقریب تابع مجهول روی این گره‌ها بنا می‌گردد. به همین دلیل این روش‌ها نسبت به مشکلات ناشی از به کار بردن المان، در مقایسه با روش‌های مبتنی بر شبکه، آسیب‌پذیری کمتری دارند. این ویژگی ممتاز و نیز انعطاف‌پذیر بودن آنها در کاربردهای علمی و مهندسی به خصوص برای مقاصد برنامه‌نویسی موجب گشته است که این دسته از روش‌ها بیش از گذشته مورد توجه قرار گیرند و با سرعت فزاینده‌ای رو به گسترش باشند.

۱-۲- هدف از تحقیق

حل عددی معادلات دیفرانسیل یکی از مهم‌ترین چالش‌های موجود در زمینه علوم مهندسی به شمار می‌آید، بنابراین تحقیق و پژوهش در این زمینه از اهمیت بسیار زیادی برخوردار است. همانطور که در قسمت قبل نیز اشاره شد، روش‌های عددی زیادی برای حل این معادلات در طول دهه‌های متمادی گسترش یافته‌اند. امروزه نیز تلاش برای توسعه روش‌های قبلی و ایجاد روش‌های جدید با قابلیت حل سریع‌تر و دقیق‌تر معادلات دیفرانسیل از موضوعات اساسی علوم پایه و مهندسی به شمار می‌آید. این موضوع در چند دهه اخیر به خصوص با پیشرفت قابل توجه فناوری رایانه و امکان انجام سریع محاسبات عددی، بیش از پیش مورد توجه قرار گرفته و موضوع تحقیقات بسیار زیادی را در دانشگاه‌های سراسر دنیا به خود اختصاص داده است.

یک دسته از انواع معادلات دیفرانسیل که کاربرد بسیار زیادی در زمینه مسائل مهندسی و به خصوص مهندسی سازه و مکانیک جامدات دارد، معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت می‌باشد. در تحقیق حاضر حل این مسائل مورد توجه قرار می‌گیرد. در کلیه روش‌هایی که در این پایان‌نامه به منظور حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت مورد توجه قرار گرفته است، از توابع پایه هموار استفاده می‌شود. انتخاب این توابع به گونه‌ای انجام می‌شود که معادله دیفرانسیل را در داخل دامنه حل برآورده سازند. در این پژوهش، در ابتدا با معرفی یکی از روش‌های موجود برای حل معادلات مورد نظر، علاوه بر گسترش آن به منظور حل مسائل بیشتر، راهکارهایی برای بهبود خواص و رفع برخی از کاستی‌های موجود بیان شده است. هم‌چنین ارائه یک روش محلیِ جدید با قابلیت حل بسیاری از مسائل با دقت و سرعت بالا از مهم‌ترین اهداف این تحقیق به شمار می‌آید. در روش پیشنهادی ضمن حفظ بسیاری از خواص مطلوب روش‌های قبلی، بر برخی از مشکلات موجود در روش‌های پیشین تا حد زیادی غلبه شده است. این روش که در زمره روش‌های بدون شبکه قرار دارد، هم‌چنین از خواص مطلوب دیگری برخوردار است که در فصول مربوطه به آنها اشاره خواهد شد. اگرچه هدف اصلی این پایان‌نامه ارائه روشی برای حل گروهی از مسائل حاکم بر

مکانیک جامدات است، اما از آنجا که بدست آوردن توابع پایه مزبور برای بسیاری از معادلات دیفرانسیل ساده است، این روش قابل گسترش برای حل مسائل بسیار بیشتری می‌باشد.

۱-۳- پیشینه علمی موضوع

مباحث مربوط به حل عددی معادلات دیفرانسیل در زمینه علوم مختلف بسیار گسترده بوده و در طول دهه‌های متمادی مورد توجه محققان و دانشمندان بسیار زیادی قرار داشته است. از این روی ارائه یک پیشینه کاملاً مفصل در رابطه با روش‌های مختلفی که در این زمینه گسترش یافته‌اند خارج از حوصله این پایان‌نامه است. بنابراین در این قسمت تنها به بررسی برخی از مهم‌ترین روش‌های بدون شبکه، که به نظر می‌رسد ارتباط بیشتری با موضوع این تحقیق دارند، در زمینه حل عددی معادلات دیفرانسیل پرداخته می‌شود.

تاریخچه روش‌های بدون شبکه به حدود سه دهه پیش بر می‌گردد. اولین بار لوسی در سال ۱۹۷۷ و سپس گینگلد و موناگان در همان سال روشی به نام هیدرودینامیک ذره هموار[1] را مطرح نمودند که به منظور مدل‌سازی پدیده‌های بدون مرز فیزیک نجومی، همچون ستاره‌های در حال انفجار[2] و ابرهای غبار[3] به کار می‌رفت [۱] و [۲]. در این زمان روش‌های بدون شبکه در مقایسه با سایر روش‌های مشابه پیشرفت نسبتاً کندی داشت که عمده آنها در مقالات موناگان قابل مشاهده است [۳] و [۴]. در روش هیدرودینامیک ذره هموار، تقریب توابع با استفاده از روش تقریبی کرنل[4] انجام می‌شود. مبنای این روش بر نمایش انتگرالی تابع استوار است، به این صورت که یک تابع دلخواه u با استفاده از تابع دلتای دیراک δ به صورت زیر قابل بیان است:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} u(\xi)\,\delta(\mathbf{x}-\xi)\,d\xi \qquad (۱-۱)$$

نمایش تابع u به شکل فوق کاملاً دقیق است، اما امکان استفاده از آن در تحلیل‌های عددی وجود ندارد. به همین دلیل رابطه تقریبی زیر به منظور تقریب تابع u مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$\widehat{u}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} u(\xi)\,w(\mathbf{x}-\xi,h)\,d\xi \qquad (۱-۲)$$

در نمایش تابع u به صورت فوق که به تقریب‌سازی کرنل معروف است، منظور از $\widehat{u}$ تقریب تابع u بوده و w تابع وزن یا تابع کرنل نامیده می‌شود. هم‌چنین h معیاری از ابعاد ناحیه تاثیر Ω در تابع کرنل می‌باشد. با توجه به اینکه تابع

---

[1] Smoothed Particle Hydrodynamics
[2] Exploding Stars
[3] Dust Clouds
[4] Kernel

کرنل در رابطه فوق جایگزین تابع دلتای دیراک شده است، انتظار می‌رود که این تابع خواصی شبیه به آن از خود نشان دهد. به همین دلیل موناگان در سال ۱۹۸۲، خواص زیر را برای تابع کرنل معرفی نمود:

الف) $w(\mathbf{x}-\xi)>0, \quad \xi \in \Omega$

ب) $w(\mathbf{x}-\xi)=0, \quad \xi \notin \Omega$

ج) $\int_{\Omega} w(\mathbf{x}-\xi,h)\,d\xi = 1$

د) $w(s,h)$ is a monotonically decreasing function, where $s=\|\mathbf{x}-\xi\|$

ه) $\lim_{h\to 0} w(s,h)=\delta(s)$

خواص فوق در مرجع [۵] به صورت کامل مورد بررسی قرار گرفته‌اند، که برای دسترسی به اطلاعات بیشتر در این خصوص می‌توان به آن مراجعه نمود. از آنجا که در حل عددی مسائل اطلاعات تابع مورد نظر تنها توسط تعداد محدودی از نقاط بیان می‌شود، امکان محاسبه انتگرال رابطه (۱-۲) وجود نداشته و لازم است شکل گسسته‌ای برای آن ارائه گردد. بنابراین این انتگرال بر اساس مقادیر تابع u در نقاط ناحیه تاثیر Ω به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_c} w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)\,u_i\,\Delta V_i \qquad (۱-۳)$$

که در آن N_c تعداد نقاط موجود در ناحیه تاثیر، u_i مقدار تابع در محل ذره iام و ΔV_i حجم اختصاص یافته به این ذره می‌باشد. رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر نیز نمایش داد:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_c} \varphi_i(\mathbf{x})\,u_i \qquad (۱-۴)$$

در رابطه فوق φ_i تابع شکل روش هیدرودینامیک ذره هموار برای ذره iام بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)\,\Delta V_i \qquad (۱-۵)$$

لازم به ذکر است که توابع شکل فوق از مقادیر گره‌ای عبور نمی‌کنند، به همین دلیل مقدار تقریبی تابع در محل این نقاط با مقادیر گره‌ای متفاوت است. با وجود ساختار جدیدی که توسط روش هیدرودینامیک ذره هموار به منظور تقریب یک تابع معرفی شد، اما این روش در شکل اولیه خود با مشکلاتی همچون ناپایداری‌های عددی مواجه بود [۶] و [۷]. به منظور غلبه بر این ناپایداری‌ها و ارتقاء کیفیت حل راهکارهای متعددی پیشنهاد شده که عمدتاً در رابطه با انتخاب تابع وزن مناسب و نحوه اختصاص حجم مناسب به ذرات می‌باشند. یکی از موثرترین این راهکارها که با ایجاد تغییراتی در نحوه درون‌یابی تابع همراه است، روش بازتولید کننده ذره مرکزی[1] می‌باشد. در این روش که

[1] Reproducing Kernel Particle Method

توسط لیو و همکاران در سال ۱۹۹۵ ارائه شد، از بسط تیلور تابع در نمایش انتگرالی آن بهره گرفته شده است که این کار منجر به افزایش مرتبه پیوستگی و دقت حل می‌شود [۸].

یکی از روش‌هایی که در نحوه درون‌یابی توابع در روش‌های بدون شبکه جدیدتر مورد توجه قرار گرفته است، روش حداقل مربعات متحرک[1] می‌باشد. این روش که برای اولین بار در سال ۱۹۸۱ به منظور حل مسئله برازش سطوح مورد استفاده قرار گرفت [۹]، تقریب تابع u را به صورت زیر بیان می‌کند:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} a_k(\mathbf{x})\, p_k(\mathbf{x}) \qquad (۶-۱)$$

در رابطه فوق p_k توابع پایه تک جمله‌ای، a_k ضرایب سری (که به صورت توابعی از موقعیت نقطه فرض می‌شوند) و m تعداد توابع پایه مورد نیاز می‌باشد. می‌توان رابطه فوق را به شکل ماتریسی زیر نیز نوشت:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\,\mathbf{a}(\mathbf{x}) \qquad (۷-۱)$$

که در آن $\mathbf{p}$ و $\mathbf{a}$ به ترتیب بردار توابع پایه و بردار ضرایب مجهول می‌باشند. در این روش به منظور تعیین بردار ضرایب مجهول $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ در هر نقطه، ناحیه‌ای پیرامون آن شامل تعدادی از نقاط مجاور به عنوان ناحیه تاثیر در نظر گرفته شده و با کمینه کردن مجموع مربعات وزن‌دار خطا در این ناحیه، ضرایب مورد نظر تعیین می‌گردد. این معیار خطا در روش حداقل مربعات متحرک به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$J = \sum_{i=1}^{N_c} w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)\left(\hat{u}(\mathbf{x}_i)-u_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{N_c} w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)\left(\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i)\,\mathbf{a}(\mathbf{x})-u_i\right)^2 \qquad (۸-۱)$$

در رابطه فوق w تابع وزن و u_i مقدار گره‌ای تابع u می‌باشد. به منظور تعیین ضرایب $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ کافی است که معیار خطای فوق نسبت به این ضرایب کمینه شود. در این صورت خواهیم داشت:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\,\mathbf{B}(\mathbf{x})\,\bar{\mathbf{u}} \qquad (۹-۱)$$

که در آن، $\bar{\mathbf{u}}$ بردار مقادیر گره‌ای در ناحیه تاثیر بوده ونیز،

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_c} w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)\,\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)\,\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \qquad (۱۰-۱)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \left[\, w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\,\mathbf{p}(\mathbf{x}_1) \quad w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)\,\mathbf{p}(\mathbf{x}_2) \quad \cdots \quad w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{N_c})\,\mathbf{p}(\mathbf{x}_{N_c}) \,\right] \qquad (۱۱-۱)$$

با جایگذاری روابط فوق در رابطه (۱-۶) تقریب تابع مورد نظر به شکل زیر قابل بیان است:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_c} \varphi_i(\mathbf{x})\, u_i \qquad (۱۲-۱)$$

که توابع شکل این رابطه به صورت زیر نوشته می‌شوند:

---

[1] Moving Least Square Method

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} p_k(\mathbf{x}) \left(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\right)_{ki} \qquad (۱۳-۱)$$

نایرولز و همکاران در سال ۱۹۹۲ با استفاده از روش حداقل مربعات متحرک موفق به ارائه روشی با عنوان روش المان‌های پراکنده[1] شدند [۱۰]. در این روش علاوه بر بهره‌گیری از روش حداقل مربعات متحرک در تقریب‌سازی توابع، از اعمال فرم ضعیف معادلات به منظور تشکیل معادلات نهایی و مدل‌سازی مسائل استفاده می‌شود. در واقع ایده اصلی به کار رفته در روش المان‌های پراکنده جایگزین نمودن شیوه درون‌یابی توابع در روش المان محدود با روش حداقل مربعات متحرک می‌باشد. به این ترتیب که پس از المان‌بندی دامنه حل، به منظور درون‌یابیِ مقدار توابعِ تحت انتگرال در فرم ضعیف، از روش حداقل مربعات متحرک استفاده می‌شود. لازم به ذکر است که درون‌یابی مورد استفاده در روش المان محدود در محدوده یک المان معتبر است، در حالی که در روش حداقل مربعات این درون‌یابی فقط در همسایگی آن نقطه معتبر می‌باشد. این موضوع باعث می‌شود که المان‌بندی مورد استفاده در روش المان‌های پراکنده در انجام محاسبات نقش اساسی نداشته باشد و فقط به محاسبه انتگرال‌ها کمک می‌کند. بنابراین روش مذکور در زمره روش‌های بدون شبکه قرار می‌گیرد.

تنها تفاوتی که در شیوه درون‌یابی توابع در روش المان‌های پراکنده با روش حداقل مربعات متحرک وجود دارد این است که در روش المان‌های پراکنده ضرایب $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ در رابطه (۱-۷) به صورت ثابت فرض می‌شوند. بنابراین محاسبه مشتقات توابع شکل در رابطه (۱-۱۳) با فرض ثابت بودن ماتریس‌های $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ و $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ صورت می‌پذیرد. این موضوع اگرچه تا حدودی به سهولت محاسبات کمک می‌کند، اما از طرف دیگر باعث کاهش دقت نتایج در روش فوق می‌گردد [۱۱].

پس از آن در سال ۱۹۹۴، بلیچکو و همکاران با انجام اصلاحاتی بر روی روش المان‌های پراکنده، روش بدون المان گالرکین[2] را معرفی نمودند [۱۲]. ساختار کلی این روش شبیه به روش المان‌های پراکنده است. در این روش نیز ابتدا دامنه حل به وسیله مجموعه‌ای از المان‌های به هم پیوسته تقسیم‌بندی می‌شود. سپس با اعمال فرم ضعیف معادلات، انتگرال‌های حاصله با درون‌یابی توابع تحت انتگرال توسط روش حداقل مربعات متحرک محاسبه می‌شوند. اما در این روش، برخلاف روش المان‌های پراکنده، ضرایب $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ در رابطه (۱-۷) ثابت فرض نمی‌شوند و در نتیجه محاسبه مشتقات توابع شکل با دقت بیشتری صورت می‌گیردکه تاثیر قابل ملاحظه‌ای بر دقت نتایج نهایی دارد. هم‌چنین در این روش برای محاسبه انتگرال‌ها از تعداد نقاط گوسی بیشتری نسبت به روش المان‌های پراکنده استفاده می‌شود.

---

[1] Diffuse Element Method
[2] Element-Free Galerkin Method

روش بدون المان گالرکین از دقت خوبی در حل مسائل برخودار بوده و به همین دلیل در زمینه‌های مختلفی مورد توجه محققین قرار گرفته است [۱۵-۱۳].

با وجود اینکه روش بدون المان گالرکین از دقت خوبی برخوردار است، اما نیاز به المان‌بندی دامنه حل و محاسبه انتگرال‌های عددی باعث افزایش هزینه محاسبات و کاهش سرعت حل می‌گردد. این عوامل سبب شد که محققین در پی روش‌هایی باشند که وابستگی کمتری به شبکه المان داشته باشد. یکی از روش‌هایی که با این ایده شکل گرفت، روش بدون شبکه محلی پترو-گالرکین[1] می‌باشد [۱۶]. این روش شبیه به روش بدون المان گالرکین می‌باشد، با این تفاوت که در روش فوق فرم ضعیف معادلات در هر نقطه از دامنه تنها بر مجموعه‌ای از المان‌ها که در اطراف آن نقطه در نظر گرفته می‌شود، اعمال می‌گردد. به عبارت دیگر روش بدون شبکه محلی پترو-گالرکین، روش اعمال فرم ضعیف معادلات به صورت محلی می‌باشد. لازم به ذکر است که در این روش المان‌هایی که در اطراف نقاط در نظر گرفته می‌شوند، نیازی به افراز دامنه حل نداشته و می‌توانند با یکدیگر همپوشانی نیز داشته باشند. بنابراین در روش فوق دامنه حل فقط توسط نقاط گره‌ای گسسته می‌شود و حتی به منظور انتگرال‌گیری نیز نیازی به استفاده از شبکه المان‌های متصل به هم نمی‌باشد. آتلوری در سال ۲۰۰۲ از عبارت واقعاً بدون شبکه برای روش‌های که دارای این ویژگی هستند، استفاده کرد. روش بدون شبکه محلی پترو-گالرکین، در زمینه‌های زیادی مورد استفاده قرار گرفته است. در مرجع [۱۷] به منظور حل مسائل الاستیسیته از این روش استفاده شده است. حل مسئله خمش ورق در مرجع [۱۸] مورد توجه قرار گرفته است. هم‌چنین مرجع [۱۹] به بررسی مسئله جریان سیالات با استفاده از روش مذکور پرداخته است.

از دیگر روش‌های مهم بدون شبکه می‌توان به روش نقاط محدود[2] اشاره نمود. این روش برای اولین بار در سال ۱۹۹۵ توسط اُنیاته و همکاران به منظور مدل‌سازی جریان سیالات مورد استفاده قرار گرفت [۲۰]. در این روش ابتدا دامنه حل توسط یک سری از نقاط گره‌ای گسسته می‌شود. سپس درون‌یابی تابع مورد نظر در هر یک از نقاط فوق توسط روش حداقل مربعات وزن‌دار[3] صورت می‌گیرد، که حالت خاصی از روش حداقل مربعات متحرک است. در روش مذکور برای درون‌یابی تابع مورد نظر در هر نقطه، زیردامنه‌ای شامل تعدادی از نقاط مجاور در نظر گرفته شده و تقریب تابع مجهول در این زیردامنه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\widehat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} p_k(\mathbf{x})\, a_k = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\,\mathbf{a} \qquad (۱-۱۴)$$

[1] Meshless Local Petrov-Galerkin Method
[2] Finite Point Method
[3] Weighted Least Square Method

تفاوت روش فوق با روش حداقل مربعات متحرک در ثابت فرض کردن بردار ضرایب $\mathbf{a}$ می‌باشد. در این صورت معیار خطای وزن‌دار به فرم زیر تشکیل می‌شود:

$$J=\sum_{i=1}^{N_c} w(\mathbf{x}_i)\left(\widehat{u}(\mathbf{x}_i)-u_i\right)^2=\sum_{i=1}^{N_c} w(\mathbf{x}_i)\left(\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i)\,\mathbf{a}-u_i\right)^2 \qquad (۱۵-۱)$$

به منظور تعیین بردار ضرایب $\mathbf{a}$ کافی است که از عبارت J نسبت به ضرایب فوق مشتق‌گیری شده و برابر صفر قرار داده شود. در این صورت خواهیم داشت:

$$\mathbf{a}=\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}\,\bar{\mathbf{u}} \qquad (۱۶-۱)$$

که در آن،

$$\mathbf{A}=\sum_{i=1}^{N_c} w(\mathbf{x}_i)\,\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)\,\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \qquad (۱۷-۱)$$

$$\mathbf{B}=\left[\,w(\mathbf{x}_1)\mathbf{p}(\mathbf{x}_1)\quad w(\mathbf{x}_2)\mathbf{p}(\mathbf{x}_2)\quad\cdots\quad w(\mathbf{x}_{N_c})\mathbf{p}(\mathbf{x}_{N_c})\,\right] \qquad (۱۸-۱)$$

بنابراین می‌توان تقریب تابع مورد نظر را به صورت زیر بیان نمود:

$$\widehat{u}(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{N_c}\varphi_i(\mathbf{x})\,u_i \qquad (۱۹-۱)$$

که در آن،

$$\varphi_i(\mathbf{x})=\sum_{k=1}^{m} p_k(\mathbf{x})\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right)_{ki} \qquad (۲۰-۱)$$

در نهایت پس از درون‌یابی تابع مجهول به شیوه فوق، با اعمال فرم قوی معادلات در هر یک از نقاط گره‌ای در تمام دامنه حل، دستگاه معادلات نهایی حاصل شده که با حل آن مقادیر مجهول گره‌ای تابع مورد نظر بدست می‌آید. اگرچه این روش در ابتدا با هدف حل مسائل سیالات توسعه پیدا کرد، اما از آن به منظور حل مسائل دیگری از جمله مسئله الاستیسیته نیز استفاده شده است [۲۱]. روش نقاط محدود به دلیل عدم نیاز به انتگرال‌گیری دارای سرعت بسیار خوبی در حل مسائل می‌باشد، اما در حل برخی از مسائل از دقت مناسب برخوردار نیست. هم‌چنین این روش در بعضی موارد با مشکلاتی از قبیل ناپایداری عددی مواجه است که پیشنهادهایی به منظور بهبود این مشکلات در برخی از مراجع ارائه شده است [۲۲].

روش نقاط محدود تعمیم یافته[1] یکی از روش‌های بدون شبکه جدید محسوب می‌شود که در سال ۲۰۰۹ توسط برومند، نجار و اُنیاته ارائه شد [۲۳]. در این روش دامنه حل فقط به وسیله شبکه‌ای از نقاط گره‌ای گسسته شده و به منظور تقریب تابع u از روش حداقل مربعات وزن‌دار استفاده می‌شود. در روش مذکور زیردامنه‌هایی با شکل

[1] Generalized Finite Point Method