بسم الله الرحمن الرحيم

مرکز شیراز

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض

دانشکده علوم پایه

گروه علمی ریاضی

عنوان پایان نامه:

عملگرهای ترکیبی فعال روی فضای هاردی وزن دار به توی فضای دیریکله

استاد راهنما : دکتر صدیقه جاهدی

استاد مشاور : دکتر فریبا ارشد

نگارش : نوشین فرهادی

بسمه تعالی

تصویب نامه / رساله

پایان نامه تحت عنوان " عملگرهای ترکیبی فعال روی فضای هاردی وزن دار به توی فضای دیریکله " که توسط نوشین فرهادی در مرکز شیراز تهیه و به هیات داوران ارائه گردیده است مورد تائئد می باشد .

تاریخ دفاع : 3/11/ 86 نمره : درجه ارزشیابی :

اعضای هیات داوران :

نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه علمی
1. دکتر صدیقه جاهدی	استاد راهنما	استاد یار
2. دکتر فریبا ارشاد	استاد مشاور	استادیار
3. دکتر بهمن یوسفی	استاد داور	استاد
4. دکتر بهرامی	نماینده تحصیلات تکمیلی	استادیار

چکیده

این پایان نامه شامل سه فصل می باشد .

فصل اول به تعاریف و قضایای مقدماتی که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می گیرد، می پردازد .

فصل دوم به بررسی عملگرهای ترکیبی روی فضاهای برگمن وزن دار می پردازد . در این جا کرانداری ، فشردگی و نرم اساسی این عملگرها را مورد توجه قرار می گیرد .

فصل سوم به مطالعه عملگهای ترکیبی میان فضاهای هاردی می پردازد.

که ساختار توپولوژیکی فضاهای $C(D_\alpha)$ و $C(H^\infty)$ و $C(H^p , H^q)$ ، $q<p$ را بررسی می کند . بیشتر توجه روی عملگرهایی است که در یک مولفه راهی واقع اند و آنهایی که در این فضاها عملگری تنها هستند ،

می باشد .

فهرست مطالب `

فصل سوم : عملگرهای ترکیبی میان فضاهای هاردی

Abstract

This thesis includes three chapters .first chapter

Considers   preliminary definitions and theorems that will be used in next chapters .

Second chapter considers composition opepators on weighted bergman spaces . this chapter is studying boundedness.

Third chapter is studying composition operation between hardy spaces , that examines topological structure **C (D) ,** **C (H)** , and **$C(H^p,H^q),p<q$.**

More attention is on operators that are in a path component and those are isolated operator .

فصل اول
مقدمات

مقدمات

در این فصل بعضي از تعاریف اساسي و قضایایي که در فصل‌هاي آینده مورد استفاده قرار مي‌گیرند مي‌آوریم. فرض ما بر این است که خواننده با مفاهیم مقدماتي آشنایي کافي دارد.

در اینجا نماد D بیانگر گوي یکه است، یعني $D = \{Z \| Z| < 1\}$.

بخش اول: مفاهیم توپولوژیکي

یک توپولوژي روي مجموعه X عبارت است از گردایه τ از زیر مجموعه‌هاي مجموعه X همراه با سه خاصیت زیر:

1) $\phi \in \tau$, $X \in \tau$ ؛

2) اگر $V_i \in \tau$ ، $i = 1, \ldots, n$ ، آنگاه $V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_n \in \tau$ ؛

3) هرگاه $\{V_\alpha\}$ گرادیه دلخواهي از اعضاي τباشد ، آنگاه $\bigcup_\alpha V_\alpha \in \tau$.

هر گاه τیک توپولوژي در Xباشد، آنگاه X را فضاي توپولوژیک و اعضاي τرا مجموعه‌هاي باز در X مي‌نامند.

1-1. 1 : تعریف. فرض کنید X یک فضا باشد. در این صورت یک جداسازي X یعني زوج مرتب (U,V) که در آن V,Uدو مجموعه باز غیر تهي از X هستند به طوري که

$. U \cap V = \phi, X = U \cup V$

فضاي X را همبند گوئيم در صورتي كه هيچ جداسازي نداشته باشد.

1-1. 2: تعريف. فرض كنيد X يك فضا باشد. در اين صورت يك زير مجموعه همبند X مانند A را مؤلفه X گويند در صورتي كه A زير مجموعه واقعي هيچ زير مجموعه همبند X نباشد. به عبارت ديگر، اگر B زير مجموعه همبند دلخواهي از X باشد و $A \subseteq B$، آنگاه $A=B$. (دراين صورت گوئيم A زير مجموعه همبند ماكسيمال X است.)

1-1. 3: تعريف. فرض كنيد X يك فضا، b,a دو نقطه از آن باشند. در اين صورت منظور از يك مسير در X از a به b تابعي پيوسته مانند $\alpha:[0,1] \to X$ است به طوري كه $\alpha(0)=a$ و $\alpha(1)=b$.

فضاي Xرا همبند راهي(مسيرى) گوئيم در صورتي كه به ازاي هر دو نقطه از X مانند a و b راهى (مسيري) در X از a به b موجود باشد.

1-1. 4: تعريف. فرض كنيد X يك فضا باشد. در X رابطه هم ارزي ~ را چنين تعريف مي‌كنيم:

به ازاي هر a و b از X، $a \sim b$ اگر و تنها اگر مسيري در X از a به b وجود داشته باشد.

دراین صورت هر دسته هم ارز بر حسب رابطه ~ را یك مؤلفه راهی (مسیري) فضاي X می‌نامیم.

1-1. 5: تعریف. اگر مؤلفه‌اي از فضاي همبند تك عضوي باشد، آنگاه آن عضو یك نقطه منفرد یا تکین نامیده می‌شود.

1-1. 6: قضیه: اگر X یك فضا و A مؤلفه‌اي از X باشد در این صورت به ازاي هر زیر مجموعه همبند X مانند $C\subseteq A$,C یا $C\subseteq X-A$.

اثبات: براي دیدن اثبات به [14] رجوع شود.

1-1. 7: تعریف. فرض کنید $\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط باشد و $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$. فرض کنید dA نشان دهنده اندازه مساحت روي D با اندازه کلي یك باشد. در مختصات قطبي و دکارتي dA به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$dA=\frac{1}{\pi}dx\,dy=\frac{1}{\pi}r\,dr\,d\theta .$$

1-1. 8: تعریف: براي $1\le p<\infty$، $L^p(D,dA)$ را فضاي توابع اندازه‌پذیر لبگ روي D تعریف می‌کنیم هرگاه براي هر f در $L^p(D,dA)$،

$$\|f\|_p=\left\{\int_D |f(z)|^p\,dA(z)\right\}^{\frac{1}{p}}<\infty$$

$L^\infty(D,dA)$ را فضاي توابع اندازه‌پذیر لبگ روي D تعریف می‌کنیم به قسمي که

$$\|f\|_\infty=ess\sup\{|f(z)|:z\in D\}<\infty$$

1-1. 9. تعریف: تابع حقیقیφکه بر بازه باز (a,b)، $-\infty<a<b<\infty$، تعریف شده را محدب نامند اگر نامساوی

$$\varphi((1-\lambda)x+\lambda y)\le(1-\lambda)\varphi(x)+\lambda\varphi(y)$$

به ازاء هر$a<x<b$ و$a<y<b$ و $0\le\lambda\le1$برقرار باشد.

به عنوان مثال تابع نمایی بر $(-\infty,\infty)$ محدب است.

1-1. 10: قضیه. فرض کنید δ یك اندازه مثبت بر δ-جبر m باشد در این صورت

a) $\delta(\phi)=0$

b) اگر $A_1,...,A_n$ اعضاي دو بدو از هم جدايي از m باشند،

$$\delta(A_1\cup....\cup A_n)=\delta(A_1)+...+\delta(A_n)$$

c) اگر $A\in m$ ، $B\in m$ آنگاه $A\subset B$ ایجاب می‌کند $\delta(A)\le\delta(B)$

d) هرگاه $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ و به ازای هر n، $A_n\in m$ و $A_1\subset A_2\subset...$

آنگاه $\delta(A_n)\to\delta(A)$

e) هر گاه $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ و به ازای هر n، $A_n\in m$ و $A_1\supset A_2\supset...$ و $\delta(A_1)$متناهي باشد، آنگاه:

$$\delta(A_n)\to\delta(A)$$

اثبات : براي ديدن اثبات به [19] رجوع شود.

1-1. 11: تعریف. فرض کنید μ یك اندازه مثبت بر X باشد. گوئیم دنباله $\{f_n\}$ از توابع اندازه‌پذیر مختلط بر X همگرا در اندازه به تابع اندازه‌پذیر f است اگر به

ازاي هر $\varepsilon>0$، $N>0$ وجود داشته باشد بطوريكه به ازاي هر $n>N$

$$\mu\{x:|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\}<\varepsilon$$

1-1. 12: قضيه. فرض كنيد $\mu(X)<\infty$. عبارات زير برقرارند .

a) هرگاه $f_n(x)\to f(x)$ تقريباً همه جا، آنگاه $f_n\to f$ در اندازه.

b) هر گاه $f_n\in L^p(\mu)$ ، $1\leq p\leq\infty$، و $\|f_n-f\|_p\to 0$، آنگاه $f_n\to f$ در اندازه.

c) هر گاه $f_n\to f$ در اندازه، آنگاه $\{f_n\}$ زير دنبالـه اي همگرا به f تقريباً همه جا دارد.

اثبات: به [19] رجوع شود.

1-1. 13: تعريف. يك قطاع (در D) در نقطه $\omega\in\partial D$، ناحيه ميان دو خط راست در D مي‌باشد كه اين دو خط در ω متقاطعند و اين ناحيه اطراف شعاعي كه از ω مي‌گذرد متقارن مي‌باشد.

1-1. 14: تعريف. ديسك جوليا، $J(\xi,a)$، مجموعه

$$\left\{z\in D:|\xi-z|^2<a\left(1-|z|^2\right)\right\}$$

است جائيكه $\xi\in\partial D$ و $a>0$ باشد. $J(\xi,a)$ ديسكي باز به شعاع $\frac{a}{1+a}$ مي‌باشد كه در ξ به طور مرزي با ∂D مماس است.

1-1. 15: تعریف. اگر φ یک خودنگاشت تحلیلی از دیسک به خودش باشد و b یک نقطه از بستار دیسک باشد آنگاه b را نقطه ثابت φ می نامیم اگر

$$\lim_{r\to 1}\varphi(rb)=b$$

بخش دوم: توابع تحليلي

1-2. 1: تعريف. عملگر خطي T روي فضاى باناخ H را فشرده گوئيم هر گاه $\overline{T(ballH)}$ فشرده باشد.

فرض كنيد $D=\{z:|z|<1\}$، ديسك واحد باز در صفحه مختلط باشد. يك تابع تحليلي φ روي D با شرط $\varphi(D)\subset D$ را يك خود نگاشت تحليلي روي D مى‌ناميم. مجموعه همه خودنگاشتهاي تحليلي از D را با $S(D)$ نشان مي‌دهيم.

1-2. 2: تعريف. فرض كنيد $\{f_n\}$ دنباله‌اي از توابع تحليلي روي Ω باشد. گوئيم دنباله $\{f_n\}$ به طور يكنواخت برزير مجموعه‌هاي فشرده Ω به f همگرا است هر گاه به ازاي هر زير مجموعه فشرده $k\subset\Omega$ و $\varepsilon>0$، عددي مانند $N=N(k,\varepsilon)$ موجود باشد بطوريكه به ازاي هر $z\in k$ و $n>N$،

$|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$.

مجموعه همه تبديلات خطي كراندار از X به Y را با $B(X,Y)$ نشان مي‌دهيم.

يادآوری می‌كنيم كه $H(\Omega)$ فضای همه توابع تحليلی روی Ω می‌باشد.

1-2. 3: قضيه. فرض كنيد $f_n\in H(\Omega)$، $n=1,2,...$ و دنباله $\{f_n\}$ بطور يكنواخت روي زير مجموعه‌هاي فشرده Ω به f همگرا باشد، آنگاه $f\in H(\Omega)$ و دنباله $\{f'_n\}$ به طور يكنواخت روي زير مجموعه‌هاي فشرده Ω به f' همگرا خواهد بود.

اثبات. براي ديدن اثبات به [19] رجوع شود.

1-2. 4: تعریف. فرض کنید به ازاي ناحیه‌اي مانند Ω، $F \subset H(\Omega)$ باشد. F را یك خانواده نرمال می‌نامیم اگر هر دنباله از اعضاي F شامل زیردنباله‌اي باشد که بر زیر مجموعه‌هاي فشرده Ω به طور یکنواخت همگرا باشد.

1-2. 5: قضیه. فرض کنید $F \subset H(\Omega)$ و F بر هر زیر مجموعه فشرده ناحیه Ω بطور یکنواخت کراندار باشد. در این صورت F یك خانواده نرمال می‌باشد.

اثبات: براي دیدن اثبات به [19] رجوع شود.

1-2. 6: قضیه. (قضیه مونتل[1]). خانواده F در $H(\Omega)$ نرمال است اگر و تنها اگر موضعاً کراندار باشد.

اثبات. براي دیدن اثبات به [19] رجوع شود.

1-2. 7: تعریف. فرض کنید ∂D مرز دیسك یکه باشد، در این صورت به ازاي $1 \le p < \infty$، $L^p(\partial D) = \left\{ f : \int_0^{2\pi} |f(t)|^p \, dt < \infty \right\}$

براي هر $f \in L^p(\partial D)$، نرم را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p \, dt \right\}^{1/p}$$

براي $p = \infty$، تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_\infty = ess.\sup \{ |f(z)| : z \in \partial D \}$$

آنگاه $L^\infty(\partial D)$ شامل تمام f هایي است که براي آنها $\|f\|_\infty < \infty$.

---

[1] .Montel

واضح است که $L^p(\partial D)$، $1\le p\le\infty$، یک فضاي باناخ است. لازم به ذکر است که $C(\partial D)$ بر تمام توابع مختلط پیوسته بر ∂Dدلالت دارد.

1-2. 8: تعریف. منظور از $F=p[f]$، تابع انتگرال پواسون[2] f در Dبراي $f\in L^1(\partial D)$ میباشد که با

$$F(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}p_r(\theta-t)\,f(t)\,dt$$

تعریف شده، جائیکه $p_r(\theta-t)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}=\mathrm{Re}\left[\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right]$ هسته پواسون نامیده میشود.

عبارت در قضیه، حد شعاعي Fنامیده میشود.

1-2. 9: تعریف. هر گاه $f\in C(\partial D)$ و $F=p[f]$، آنگاه وقتي $r\to1$، بطور یکنواخت بر ∂Dداریم:

$$F_r\to f$$

جائیکه $\left(F_r(e^{i\theta})=F(re^{i\theta})\right)$.

به عبارت دیگر

$$\lim_{r\to1}\|F_r-f\|_\infty=0$$

و این ایجاب میکند که در هر نقطه از ∂D $\lim_{r\to1}F_r(e^{i\theta})=f(e^{i\theta})$.

1-2. 10: تعریف. اگر fیک تابع تعریف شده روي D باشد و $\omega\in\partial D$، آنگاه

$$\prec\lim_{z\to\omega}f(z)=L$$

---

[2] .Poisson

بدان معناست که براي هر قطاع در D، وقتي $z\to\omega$، $f(z)\to L$. در اين صورت گوئيم L حد غير مماسي (زاويه‌اي) f در ω مي‌باشد.

1-2. 11: تعريف. مي‌گوئيم خودنگاشت تحليلي φ از D، يك مشتق زاويه‌اي در $\omega\in\partial D$ دارد اگر براي هر $\eta\in\partial D$،

$$\prec\lim_{z\to\omega}\frac{\eta-f(z)}{\omega-z}$$

موجود و متناهي باشد. مقدار آنرا حد مشتق زاويه‌اي φ در ω مي‌ناميم و مي‌نويسيم $\varphi'(\omega)$.

1-2. 12: لم. فرض كنيد $R=\{z\in D:|z|\geq r_0\}$ جائيكه $0<r_0<1$. آنگاه $C>0$ وجود دارد كه تنها به r_0 و G وابسته است بطوريكه براي تمام توابع تحليلي f در D،

$$\int_D|f|^2G\ dA\leq C\int_R|f|^2G\ dA.$$

اثبات: براي اثبات به [11] رجوع شود.

فرض كنيد $\varphi:D\to D$ تحليلي باشد و $\omega\in\varphi(D)$، $\{z_j(\omega)\}$ بر مجموعه تمام صفرهاي $\varphi(z)-\omega$، با در نظر گرفتن تكرار، دلالت دارد. قضاياي زير را اينچنين تعريف مي‌كنيم.

1-2. 13: قضيه. فرض كنيد g, Q توابع اندازه‌پذير غير منفي روي D باشند. آنگاه:

$$\int_D g(\varphi(z))|\varphi'(z)|^2Q(z)\,dA(z)=\int_{\varphi(D)}g(\omega)\left(\sum_{j\geq1}Q(z_j(\omega))\right)dA(\omega)$$

اثبات. براي اثبات به [11] رجوع شود.

2-1. 14: قضیه. (نامساوي ليتلوود[3]) . فرض کنید $\omega\in\varphi(D)$ ، آنگاه :

$$\sum_{j\ge1}\log\frac{1}{|z_j(\omega)|} \quad \le \log\left|\frac{1-\overline{\varphi(0)}\,\omega}{\omega-\varphi(0)}\right|$$

اثبات: براي اثبات به [11] رجوع شود.

2-1. 15: تعريف. مجموعه تمام نقاط ∂Dبا خاصيت $\varphi^*(\xi)=\lim_{r\to1}\varphi(r\xi)$

که داراي نرم 1 باشد مجموعه فرين[4] φ ناميده مي‌شود.

2-1. 16: تعريف: فرض كنيدφيك تابع تحليلي روي Dباشد چنانچه $\varphi(D)\subset D$.

تابع شمارشي نوالينا[5] برايφ، براي همه $\omega\in D\setminus\{\varphi(0)\}$ ، با

$$N_\varphi(\omega)=\sum\ \{-\log|z| : z\in\varphi^{-1}\{\omega\}\}$$

تعريف مي‌شود، جائيكه $\varphi^{-1}\{\omega\}$ بر مجموعه نقاط پيش تصويرφ از ωدلالت مي‌كند.

هر نقطه در دنباله مطابق با چند گانگي‌اش تكرار مي‌شود.

اگر ωيك مقدار براي φ نباشد، آنگاه $N_\varphi(\omega)=0$ و اگر $\omega=\varphi(0)$ ، آنگاه $N_\varphi(\omega)=\infty$ و در بقيه حالات $0<N_\varphi(\omega)<\infty$

2-1. 17: قضيه. (نامساوي ليتلوود)[6]. اگرφيك خود نگاشت تحليلي از D باشد، آنگاه براي هر $\omega\in D\setminus\{\varphi(0)\}$ ،

---

[3] - Littlewood Inequalitty theorem
[4] -Extreme set
[5] -Nevanlinna Counting Function
[6] -Littlewood Inequalitty Theorem