دانشگاه تربیت معلّم

دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

رساله

جهت اخذ درجه دکترا

رشته ریاضی محض (جبر جابجایی)

عنوان

مدول‌های کوهمولوژی موضعی مینیماکس و کواتمیک و ایده‌آل‌های اوّل وابستهٔ آنها

استاد راهنما

دکتر عبدالجواد طاهری‌زاده

دانشجو

محرّم آقاپور نهر

شهریور ۱۳۸۷

تقدیم به

پدر و مادر بزرگوار و فداکارم که همواره در فراز و نشیب‌های زندگی با تحمّل زحمات و مشقّات غیرقابل وصفشان به من درس صبر و بردباری آموختند.

تقدیم به

همسر مهربانم که در پیمودن این راه صبرش مکمّل تلاش من بود و مسلّماً بدون یاری ایشان این کار غیرممکن می‌نمود.

تقدیم به

برادران و خواهران گرامی‌ام که همواره تشویقات آنها سختی راه را بر من هموار کرد.

تقدیم به

جامعهٔ ریاضی‌دانان ایران

تقدیرو تشکر

حمد وسپاس مخصوص اوست که منشاء علم و نور و نیکی است. سپاس فراوان خداوند را که در سایه الطاف بیکران و مراحم بیشمارش مفتخر به نگارش این رساله گردیدم.

بدینوسیله مراتب قدردانی و تشکر خود را به همه بزرگواران که در تمام مراحل این پژوهش مربی و راهنمایم بوده‌اند ابراز می دارم و توفیقات ایشان را از خداوند متعال خواستارم. با سپاس از:

استاد گرانمایه و فرزانه ام جناب آقای دکتر عبدالجواد طاهری زاده که با اخلاق نیکو، راهنمایی و مساعدت اینجانب را در امر نگارش این رساله به عهده داشته اند، داوران محترم داخلی،آقایان دکتر حسین ذاکری، دکتر محمدتقی دیبایی و همچنین اساتید مدعوآقایان دکتر سیامک یاسمی و دکتر کامران دیوانی آذرکه زحمت مطالعه وداوری این رساله رامتحمل شدند و باتشکر از دوستان ارجمندم آقایان علیرضا نظری، نعمت الله شیرمحمدی و علیرضا وحیدی که در تمام مراحل نگارش این رساله یار و یاورم بودند.

در پایان از آقایان محمدرضا مجیدی و محمد المکچی که در تایپ این رساله مرا یاری کردند تشکر می کنم.

محرم آقاپور

چکیده

فرض کنیم R یک حلقهٔ جابجایی و یکدار و نوتری، $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از R و M یک $R-$مدول باشد. در این رساله ابتدا معادلی برای مینیماکس بودن یک مدول که ارتباط آن را با مدول‌های لسکرین ضعیف نشان می‌دهد، ارائه می‌نمائیم. ثابت می‌کنیم که اگر M یک $R-$مدول متناهی مولد باشد و برای هر i که $1 \geq r \geq i$، $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ مینیماکس باشد در این‌صورت برای هر i که $1 \geq r \geq i$، $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ آرتینی است. همچنین قضیهٔ اصل سراسری موضعی برای مدول‌های مینیماکس راثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ناصفرشدن گروتندیک رابرای مدول‌های کواتمیک ثابت می‌کنیم. همچنین ثابت می‌کنیم. اگر M متناهی مولد و $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ برای هر i که $i < n$ کواتمیک باشد آنگاه $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ برای هر i که $i < n$ متناهی مولد است.

قضیهٔ یوشیدا را تعمیم داده و قضایایی در صفر شدن کوهمولوژی موضعی ثابت می‌کنیم درادامه همریختی طبیعی $f : Ext_R^n(\frac{R}{\mathfrak{a}}, M) \longrightarrow Hom_R(\frac{R}{\mathfrak{a}}, H_{\mathfrak{a}}^n(M))$ را مورد مطالعه قرار داده و تعلّق داشتن هسته و هم‌هستهٔ این همریختی به یک کلاس سِر از کاتگوری $R-$مدول‌هارا تحت شرایط خاصی بررسی می‌کنیم این مطالعه نتایجی در ارتباط با آرتینی بودن کوهمولوژی موضعی و متناهی بودن ایده‌آل‌های اول وابستهٔ کوهمولوژی موضعی به دست می‌دهد.

ثابت می کنیم که اگر M یک $R-$مدول دلخواه باشد و $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ برای هر $i < n$ محمل متناهی داشته باشد آنگاه $Ass_R(H_{\mathfrak{a}}^i(M))$ یک مجموعهٔ متناهی است اگروتنهااگر $Ass_R(Ext_R^n(\frac{R}{\mathfrak{a}}, M))$ یک مجموعهٔ متناهی باشد.

درپایان $R-$ مدول‌های کوهمولوژی موضعی آرتینی و هم‌متناهی نسبت به یک ایده‌آل را مشخص سازی می‌کنیم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدّمات

۱.۱ مقدّمه تاریخی

نظریه کوهمولوژی موضعی توسط گروتندیک، در سال ۱۹۶۷ معرفی شد. سپس هونیکه در [۲۴] چند سئوال مهم راجع به مدول‌های کوهمولوژی موضعی مطرح کرد. یکی از این سئوالات بررسی این موضوع است که چه هنگام ایده‌آل‌های اول وابسته به مدول‌های کوهمولوژی موضعی متناهی است؛ و سه سئوال مهم دیگر دراین زمینه، صفر شدن، آرتینی بودن و متناهی مولد بودن این مدول‌ها است.

در سال ۱۹۶۷ هارتشورن [۱] ثابت کرد که روی حلقهٔ موضعی نوتری $(R,\mathfrak{m})$، برای هر $R-$مدول متناهی مولد M، مدول‌های کوهمولوژی موضعی $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ برای هر $i \geq 0$ آرتینی‌اند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت اگر مدول M روی حلقهٔ موضعی نوتری کامل $(R,\mathfrak{m})$ متناهی مولد باشد، آنگاه برای هر $i \geq 0$، مدول‌های $Hom_R(\frac{R}{\mathfrak{m}}, H^i_{\mathfrak{m}}(M))$

[۱] Hartshorne

متناهی مولد خواهد بود. این مطلب انگیزهٔ خوبی فراهم کرد تا گروتندیک در سال‌های ۱۹۶۸—۶۹ حدس زیر را بر مبنای تعویض $\mathfrak{m}$، بایک ایده‌آل دلخواه $\mathfrak{a}$ درتعقیب حکم فوق ارائه نماید.

حدس گروتندیک: فرض کنیم M روی حلقهٔ موضعی نوتری $(R,\mathfrak{m})$ یک مدول متناهی مولد و $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از R باشد. در این صورت برای هر $i \geq 0$، مدول‌های $Hom_R(\frac{R}{\mathfrak{a}}, H^i_{\mathfrak{a}}(M))$ متناهی مولد هستند.

هارتشون در سال ۱۹۷۰ با ارائه مثال نقض زیر نشان داد که حتی اگر R حلقهٔ موضعی منظم باشد پاسخ این سئوال منفی است. به این ترتیب خط بطلانی نیز بر حدس گروتندیک کشیده شد.

مثال نقض هارتشورن: فرض کنیم $R = K[[x,y,u,v]]$، حلقهٔ سری‌های صوری توانی چهارمتغیّره با ضرائب در میدان K باشد. قرار می‌دهیم $\mathfrak{a} = (x,u)$ و $M = \frac{R}{(xy-uv)}$ در این صورت مدول $Hom_R(\frac{R}{\mathfrak{a}}, H^2_{\mathfrak{a}}(M))$ متناهی مولد نیست.

مدول‌های هم‌متناهی نسبت به یک ایده‌آل نخستین بار توسط هارتشورن درسال ۱۹۶۷ تعریف شد. هدف از طرح بررسی این نوع مدول‌ها جواب دادن به برخی از سئوالات عنوان شده از سوی گروتندیک در سمینار هندسهٔ جبری‌اش درسال ۱۹۶۲ بود. بعلاوه او باتوجه به این تعریف، حدس گروتندیک رابا طرح یک سئوال بصورت زیر کاملتر کرد:

پرسش هارتشورن:

برای کدام حلقهٔ R و ایده‌آل $\mathfrak{a}$ از آن، مدول‌های کوهمولوژی موضعی $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ برای هر $i \geq 0$ و هر مدول متناهی مولد M، یک مدول $\mathfrak{a}-$ هم‌متناهی می‌باشد؟

مدول‌های مینیماکس نخستین‌بار توسط زشینگر[۲] تعریف و در مقالهٔ معروفش تحت همین نام [۴۵] مورد مطالعه قرار گرفتند؛ و بعدها زینک[۳] و رادلوف[۴] به ترتیب در [۴۳] و [۳۸] این مدول‌ها را مورد مطالعه بیشتری قرار دادند و قضایایی در مشخص‌سازی آنها مطرح کردند. ملکرسون[۵] در [۳۵] اولین بار مدول‌های کوهمولوژی موضعی مینیماکس و ارتباط آنها را با مدول‌های کوهمولوژی موضعی هم‌متناهی نسبت به یک ایده‌آل مورد مطالعه قرار داد. مدول‌های کواتمیک نخستین بارتوسط زشینگر تعریف و در مقالهٔ [۴۴] تحت همین نام مورد مطالعه قرار گرفتند. در این رساله روابط بین مدول‌های مینیماکس و مدول‌های کوهمولوژی موضعی و کوهمولوژی موضعی مدول‌های کواتمیک ایده‌آل‌های اول وابسته مدول‌های کوهمولوژی موضعی مورد بررسی قرار می گیرد.

از این رساله مقالات زیر استخراج شده است.

1) M. Aghapournahr, L. Melkersson, *Local cohomology and Serre subcategories,* J. Aalgebra. **320** (2008),1275-1287.

2) M. Aghapournahr, L. Melkersson, *Local cohomology: associated primes, artinianness and assymptotic behaviour,* Submitted.

3) M. Aghapournahr, L. Melkersson, *Minimax and coatomic local cohomology modules,* Submitted.

---

[۲] Zöschinger

[۳] Zink

[۴] Rudolf

[۵] Melkersson

۲.۱ معرفی نمادهای کلی

در سراسر این رساله R بیانگر یک حلقهٔ جابجایی، یکدار و نوتری و M یک R—مدول و $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از R است. ایده‌آل تولید شده توسط عناصر $a_1, \cdots, a_n$ را به صورت $(a_1, \cdots, a_n)$ نشان خواهیم داد.

مجموعهٔ تمام ایده‌آل‌های اوّل حلقهٔ R را با $Spec(R)$ نمایش می‌دهیم. همچنین برای هر ایده‌آل $\mathfrak{a}$ از R مجموعهٔ

$$\{\mathfrak{p} \in Spec(R) \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$$

را با $V(\mathfrak{a})$ نمایش می‌دهیم. نماد $0 :_M \mathfrak{a}$ نشان‌دهندهٔ زیرمدول

$$\{m \in M \mid \mathfrak{a}m = 0\}$$

از M خواهد بود. نمادهای $Ass_R(M)$ و $Supp_R(M)$ به ترتیب برای نشان‌دادن ایده‌آل‌های اوّل وابسته به M و محمل M مورد استفاده قرار می‌گیرند. یادآوری می‌کنیم که

$$Ass_R(M) := \{\mathfrak{p} \in Spec(R) \mid \mathfrak{p} = 0 :_R m \ \text{، } M \text{ از } m \neq 0 \text{ برای برخی}\}$$

و

$$Supp_R(M) := \{\mathfrak{p} \in Spec(R) \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$$

که در آن، برای هر ایده‌آل اوّل $\mathfrak{p}$ از R، $M_{\mathfrak{p}}$ موضعی‌شدهٔ M در مجموعهٔ بستهٔ ضربی $S = R - \mathfrak{p}$ از R می‌باشد. بُعد کرول R—مدول ناصفر M را با $dimM$ نمایش می‌دهیم و آن سوپریموم طول زنجیرهای ایده‌آل‌های اوّل واقع در $Supp_R(M)$ می‌باشد، و چنانچه این

سوپریموم موجود نباشد، $dimM$ را ∞ تعریف می‌کنیم. طبق قرارداد، بُعد مدول صفر را -۱ تعریف می‌کنیم.

اگر M یک R—مدول متناهی مولّد باشد، نمرهٔ M در $\mathfrak{a}$ یا M—نمرهٔ $\mathfrak{a}$ را با نماد $grad(\mathfrak{a}, M)$ یا $(grad_M\mathfrak{a})$ نشان می‌دهیم. در واقع اگر M ناصفر و $M \neq \mathfrak{a}M$ باشد، ثابت می‌شود هر M رشته در $\mathfrak{a}$ را می‌توان به یک رشتهٔ ماکزیمال توسیع داد و طول تمامی M—رشته‌های ماکزیمال در $\mathfrak{a}$ با هم برابرند. طول مشترک همهٔ آنها همان نمرهٔ M در $\mathfrak{a}$ است.

۳.۱ نتایج اوّلیه در کوهمولوژی موضعی

فانکتور کوهمولوژی موضعی نسبت به یک ایده‌آل R، با $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ نشان داده می‌شود که یک فانکتور از $\mathcal{C}(R)$ به $\mathcal{C}(R)$ است که در آن

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \bigcup_{i=0}^{\infty} (0 :_M \mathfrak{a}^i)$$

توجّه کنید که $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ یک زیرمدول از M است. برای هر Rهمریختی $f : M \longrightarrow N$، داریم

$$f(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \subseteq \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$$

و لذا نگاشت $\Gamma_{\mathfrak{a}}(f) : \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$ وجود دارد که در واقع تحدید f روی $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ است. به راحتی دیده می‌شود که $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ یک فانکتور جمعی و هموَرد و خطّی و دقیق‌چپ از $\mathcal{C}(R)$ به $\mathcal{C}(R)$ است. برای هر $i \geq 0$، i—امین فانکتوراست مشتق‌شده $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ با $H^i_{\mathfrak{a}}(-)$

نشان داده می‌شود. لذا $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ و $H^{\circ}_{\mathfrak{a}}(-)$ فانکتورهای به‌طور طبیعی هم‌ارز هستند.

تبصره ۱.۳.۱

(الف) فرض کنید M یک $R-$مدول باشد، برای به دست آوردن $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم: تحلیل انژکتیو زیر از M را در نظر می‌گیریم.

$$E^{\bullet}: \ \circ \xrightarrow{d^{-1}} E^{\circ} \xrightarrow{d^{\circ}} E^{1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^{i} \xrightarrow{d^{i}} E^{i+1} \longrightarrow \cdots$$

که در آن $R-$همریختی $\alpha : M \longrightarrow E^{\circ}$ موجود است بطوری که رشتهٔ

$$\circ \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} E^{\circ} \xrightarrow{d^{\circ}} E^{1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^{i} \xrightarrow{d^{i}} E^{i+1} \longrightarrow \cdots$$

دقیق است. فانکتور $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ را به همبافت $E^{\bullet}$ اثر می‌دهیم تا همبافت

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(E^{\bullet}): \ \circ \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^{-1})} \Gamma_{\mathfrak{a}}(E^{\circ}) \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^{\circ})} \Gamma_{\mathfrak{a}}(E^{1}) \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(E^{i}) \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^{i})} \Gamma_{\mathfrak{a}}(E^{i+1}) \longrightarrow \cdots$$

به دست آید. حال $i-$امین کوهمولوژی مدول این همبافت یعنی

$$Ker(\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^{i}))/Im(\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^{i-1}))$$

که (با تقریب یکریختی) مستقل از انتخاب تحلیل انژکتیو $E^{\bullet}$ از M است، $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ خواهد بود.

(ب) فرض کنید

$$\circ \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow \circ$$

یک رشتهٔ دقیق از R—مدول‌ها و R—همریختی ها باشد. در این صورت برای هر $i \in \mathbb{N}_0$،همریختی اتّصال[۶] $H_{\mathfrak{a}}^{i}(N) \longrightarrow H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(L)$ وجود دارد و این همریختی اتّصال رشتهٔ دقیق و طولانی

$$0 \longrightarrow H_{\mathfrak{a}}^{0}(L) \xrightarrow{H_{\mathfrak{a}}^{0}(f)} H_{\mathfrak{a}}^{0}(M) \xrightarrow{H_{\mathfrak{a}}^{0}(g)} H_{\mathfrak{a}}^{0}(N) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_{\mathfrak{a}}^{1}(L) \xrightarrow{H_{\mathfrak{a}}^{1}(f)} H_{\mathfrak{a}}^{1}(M) \xrightarrow{H_{\mathfrak{a}}^{1}(g)} H_{\mathfrak{a}}^{1}(N) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H_{\mathfrak{a}}^{i}(L) \xrightarrow{H_{\mathfrak{a}}^{i}(f)} H_{\mathfrak{a}}^{i}(M) \xrightarrow{H_{\mathfrak{a}}^{i}(g)} H_{\mathfrak{a}}^{i}(N) \longrightarrow H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(L) \longrightarrow \cdots$$

را می‌سازد.

(ج) اگر E یک R—مدول انژکتیو باشد، آنگاه برای هر i که $i \geq 1$، $H_{\mathfrak{a}}^{i}(E) = 0$.

(د) چون $H_{\mathfrak{a}}^{0}(-) = H_{\sqrt{\mathfrak{a}}}^{0}(-)$، برای هر R—مدول M داریم

$$H_{\mathfrak{a}}^{i}(M) = H_{\sqrt{\mathfrak{a}}}^{i}(M).$$

قضایای زیر را که نتایج اساسی در کوهمولوژی موضعی هستند از منابع [۹] و [۲۵] و [۲۹] می‌آوریم.

قضیه ۲.۳.۱ برای هر $i \geq 0$، فانکتورهای $H_{\mathfrak{a}}^{i}(-)$ و $\varinjlim_{n} Ext_{R}^{i}(\frac{R}{\mathfrak{a}^{n}}, -)$ از $\mathcal{C}(R)$ به $\mathcal{C}(R)$، بطور طبیعی هم‌ارزند.

---

[۶] Connecting Homomorphism

قضیه ۳.۳.۱ اگر M یک $R-$مدول باشد، آنگاه عبارات زیر برقرارند.

(الف) اگر $\mathfrak{a}$ شامل یک غیر مقسوم‌علیه صفر روی M باشد، آنگاه M، $\mathfrak{a}-$ آزاد از تاب[۷] است یعنی $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = 0$.

(ب) فرض کنید M متناهی مولد باشد، آنگاه M، $\mathfrak{a}-$ آزاد از تاب است اگر وتنها اگر $\mathfrak{a}$ شامل یک غیرمقسوم‌علیه صفرروی M باشد.

(ج) مدول $\frac{M}{\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)}$، $\mathfrak{a}-$ آزاد از تاب است.

قضیه ۴.۳.۱

(الف) اگر M یک $R-$مدول $\mathfrak{a}-$تابدار[۸] باشد یعنی $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = M$. آنگاه برای هر i که $i > 0$، $H^i_{\mathfrak{a}}(M) = 0$.

(ب) برای هر $R-$مدول M و برای هر i که $i > 0$ داریم $H^i_{\mathfrak{a}}(M) \cong H^i_{\mathfrak{a}}(\frac{M}{\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)})$.

برای هر $R-$مدول M، $D_{\mathfrak{a}}(M) = \varinjlim_{n} Hom_R(\mathfrak{a}^n, M)$ تبدیل ایده‌آلی[۹] M نسبت به $\mathfrak{a}$ و یا مختصراً $\mathfrak{a}-$تبدیل M نامیده می شود.

به راحتی می‌توان دید که $D_{\mathfrak{a}}(-) = \varinjlim_{n} Hom_R(\mathfrak{a}^n, -)$ یک فانکتور هم‌ورد و $R-$خطّی و دقیق چپ از $\mathcal{C}(R)$ به $\mathcal{C}(R)$ می‌باشد.

---

[۷] $\mathfrak{a}$-torsion free

[۸] $\mathfrak{a}-$torsion

[۹] Ideal transform

قضیه ۵.۳.۱ فانکتور همانی روی $\mathcal{C}(R)$ را با Id نشان می‌دهیم. تبدیل‌های طبیعی فانکتوری (از $\mathcal{C}(R)$ به خودش) $\xi(=\xi_{\mathfrak{a}}) : \Gamma_{\mathfrak{a}} \longrightarrow id$، $\eta(=\eta_{\mathfrak{a}}) : id \longrightarrow D_{\mathfrak{a}}$، $\zeta(=\zeta_{\mathfrak{a}}) : D_{\mathfrak{a}} \longrightarrow H^{1}_{\mathfrak{a}}$ وجود دارند به طوریکه، برای هر $R-$ مدول M،

(الف) $\xi_M : \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow M$ همریختی همانی است.

(ب) برای هر $g \in M$، $\eta_M(g)$ تصویر طبیعی همریختی $f_{n,g} \in Hom(\mathfrak{a}^n, M)$ در $D_{\mathfrak{a}}(M)$ است که اثر آن برای هر $r \in \mathfrak{a}^n$،(برای هر $n \in N$) $f_{n,g}(r) = rg$ است.

(ج) رشتهٔ

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \xrightarrow{\xi_M} M \xrightarrow{\eta_M} D_{\mathfrak{a}}(M) \xrightarrow{\zeta_M} H^{1}_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow 0$$

دقیق است.

(د) فرض کنید M یک $R-$مدول باشد. آنگاه

(۱) $\Gamma_{\mathfrak{a}}(D_{\mathfrak{a}}(M)) = 0 = H^{1}_{\mathfrak{a}}(D_{\mathfrak{a}}(M))$

(۲) $H^{1}_{\mathfrak{a}}(\eta_M) : H^{i}_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow H^{i}_{\mathfrak{a}}(D_{\mathfrak{a}}(M))$ برای هر $i > 1$ یک یکریختی است.

قضیه ۶.۳.۱ (رشتهٔ مایر – ویتوریس)[10]

[10] Mayer vitoris

برای هر R−مدول M، رشتهٔ دقیق و طولانی زیر وجود دارد که معروف به رشتهٔ مایرویتوریس برای M نسبت به $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ می‌باشد.

$$0 \longrightarrow H^0_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}(M) \longrightarrow H^0_{\mathfrak{a}}(M) \oplus H^0_{\mathfrak{b}}(M) \longrightarrow H^0_{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}}(M) \longrightarrow H^1_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}(M) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^1_{\mathfrak{a}}(M) \oplus H^1_{\mathfrak{b}}(M) \longrightarrow H^1_{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}}(M) \longrightarrow \ldots \longrightarrow H^i_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}(M) \longrightarrow H^i_{\mathfrak{a}}(M) \oplus H^i_{\mathfrak{b}}(M)$$

$$\longrightarrow H^i_{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}}(M) \longrightarrow H^{i+1}_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}(M) \longrightarrow \ldots$$

و اگر $f : M \longrightarrow N$ یک همریختی R−مدولی باشد دیاگرام

$$\begin{array}{ccccccc}
H^i_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}(M) & \longrightarrow & H^i_{\mathfrak{a}}(M) \oplus H^i_{\mathfrak{b}}(M) & \longrightarrow & H^i_{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}}(M) & \longrightarrow & H^{i+1}_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}(M) \\
\downarrow H^i_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}(f) & & \downarrow H^i_{\mathfrak{a}}(f) \oplus H^i_{\mathfrak{b}}(f) & & \downarrow H^i_{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}}(f) & & \downarrow H^{i+1}_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}(f) \\
H^i_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}(N) & \longrightarrow & H^i_{\mathfrak{a}}(N) \oplus H^i_{\mathfrak{b}}(N) & \longrightarrow & H^i_{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}}(N) & \longrightarrow & H^{i+1}_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}(N)
\end{array}$$

برای هر i، جابجایی است.

قضیه ۷.۳.۱ فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از R باشد که با t عضو تولید می‌شود. در این صورت، برای هر R−مدول M، و هر i که $i > t$، $H^i_{\mathfrak{a}}(M) = 0$.

قضیه ۸.۳.۱ (قضیه تغییر یکدست پایه) [11]

فرض کنید $f : R \longrightarrow S$ یک همریختی از حلقه‌های جابجایی و یکدار و نوتری یکدست باشد. در این صورت یکریختی یکتای

$$(\varphi^i)_{i\in N_0} : (H^i_{\mathfrak{a}}(-) \otimes_R S)_{i\in N_0} \longrightarrow (H^i_{\mathfrak{a}}((-) \otimes_R S))_{i\in N_0}$$

از دنباله فانکتورهای هم‌ورد و (قویاً) متّصل منفی از $\mathcal{C}(R)$ به $\mathcal{C}(R)$ موجود است.

---

[11] Flat base change theorem

قضیه ۹.۳.۱ فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از R و M یک $R-$مدول متناهی مولّد باشد. در این صورت $H^i_{\mathfrak{a}}(M) = 0$ برای هر i که $i < grade(\mathfrak{a}, M)$ یا $i > dim(M)$. به علاوه $H^t_{\mathfrak{a}}(M) \neq 0$ وقتی که $t = grade(\mathfrak{a}, M)$.

قضیه ۱۰.۳.۱ (ملکرسون)[۱۲]

فرض کنید M یک $R-$مدول $\mathfrak{a}-$تابدار باشد بطوری که $Hom_R(\frac{R}{\mathfrak{a}}, M)$ آرتینی باشد. در این صورت M آرتینی است.

قضیه ۱۱.۳.۱ فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی و M یک $R-$مدول متناهی مولّد از بعد n باشد، در این صورت عبارات زیر برقرارند:

(الف) $H^n_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$ ، به ویژه اگر $n > 0$، $H^n_{\mathfrak{m}}(M)$ متناهی مولّد نیست.

(ب) برای هر i، $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ یک $R-$مدول آرتینی است.

(ج) فرض کنید R یک حلقهٔ نه لزوماً موضعی باشد. در این صورت $H^n_{\mathfrak{a}}(M)$ برای هر ایده‌آل $\mathfrak{a}$ از R یک $R-$مدول آرتینی است.

---

[۱۲] Melkersson

قضیه ۱.۳.۱۲ فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی و M یک R–مدول ناصفر و متناهی مولّد از بعد n باشد. در این صورت

$$Ass_R(D(H^n_{\mathfrak{m}}(M))) = \{\mathfrak{p} \in Ass_R(M) \mid dim\frac{R}{\mathfrak{p}} = n\}$$

که در آن $D(-) = Hom_R(-, E(\frac{R}{\mathfrak{m}}))$.

قضیه ۱.۳.۱۳ (قضیهٔ صفر شدن لیختن‌بام–هارتشورن)[۱۳]
فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی از بعد n و $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل محض از R باشد. در این صورت عبارات زیر معادلند:

(الف) $H^n_{\mathfrak{a}}(R) = 0$؛

(ب) برای هر ایده‌آل اوّل مینیمال β از $\hat{R}$ ($\mathfrak{m}$–ادیک کمال R) که در شرط $dim\frac{R}{\beta} = n$ صدق کند، داریم $dim\frac{R}{(aR+\beta)} > 0$.

تبصره ۱.۳.۱۴ اگر $\mathfrak{a} = (x_1, \cdots, x_n)$، آنگاه $H^i_{\mathfrak{a}}(R)$ با i–امین کوهمولوژی مدول همبافت چک [۱۴]

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} R_{x_i} \longrightarrow \bigoplus_{i<j} R_{x_i x_j} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R_{x_1 x_2 \cdots x_n} \longrightarrow 0$$

---

[۱۳] Lichtenbaum Hratshorn theorem

[۱۴] Čech complex

یکریخت است. برای هر $f \in R$ و عدد صحیح مثبت m، $[f + (x_1 \cdots, x_n)^m]$ را برای نشان‌دادن کلاس کوهمولوژی

$$[f/(x_1 \cdots, x_n)^m] \in R_{x_1 x_2 \cdots x_n} / \sum_i R_{x_1 \cdots \hat{x}_i \cdots x_n}$$

به‌کار می‌بریم به‌راحتی می‌توان دید که $[f + (x_1 \cdots, x_n)^m] = 0$ در $H^n_{\mathfrak{a}}(R)$ اگروتنهااگر عدد صحیح $k > 0$ موجود باشد بطوری که $f x_1^k \cdots x_n^k \in (x_1^{m+k}, \cdots, x_n^{m+k})R$.

در نتیجه می‌توان $H^n_{\mathfrak{a}}(R)$ را با $\varinjlim_m \frac{R}{(x_1^m, \cdots, x_n^m)R}$ توصیف کرد که در آن نگاشت

$$\frac{R}{(x_1^m, \cdots, x_n^m)R} \longrightarrow \frac{R}{(x_1^{m+1}, \cdots, x_n^{m+1})R}$$

در واقع ضرب توسط تصاویر عضو $x_1 x_2 \cdots x_n$ می‌باشد.

تبصره ۱.۳.۱۵ فرض کنید $\mathfrak{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ ایده‌آلی از حلقهٔ R باشد، همبافت کوزول[15]

$$0 \longrightarrow \bigwedge^n (R^n) \longrightarrow \bigwedge^{n-1} (R^n) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigwedge^1 (R^n) \longrightarrow \bigwedge^0 (R^n) \longrightarrow 0$$

را نسبت به $a_1, \cdots, a_n$ تشکیل می‌دهیم. برای هر R−مدول M، i−امین کوهمولوژی مدول همبافت

$$\cdots \longrightarrow Hom_R(\bigwedge^{i-1} (R^n), M) \longrightarrow Hom_R(\bigwedge^{i} (R^n), M) \longrightarrow Hom_R(\bigwedge^{i+1} (R^n), M) \longrightarrow \cdots$$

---

[15] KoszuL complex

با $H^i(a_1, \cdots, a_n; M)$ نشان می‌دهیم و به آن کوهمولوژی مدول کوزول نسبت به $a_1, \cdots, a_n$ می‌نامیم.

خواص اساسی آن عبارتند از:

(الف) برای هر i، $\mathfrak{a}H^i(a_1, \cdots, a_n; M) = 0$.

(ب) به ازای هر رشتهٔ دقیق $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ رشتهٔ دقیق و طولانی زیر را خواهیم داشت

$$\cdots \longrightarrow H^i(a_1, \cdots, a_n; M') \longrightarrow H^i(a_1, \cdots, a_n; M) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^i(a_1, \cdots, a_n; M'') \longrightarrow H^{i+1}(a_1, \cdots, a_n; M') \longrightarrow \cdots$$

(ج) برای هر R–مدول M رشتهٔ دقیق زیر وجود دارد.

$$\cdots \longrightarrow H^{i-1}(a_1, \cdots, a_n; M) \longrightarrow H^i(a_1, \cdots, a_{n-1}; M) \xrightarrow{a_n} H^i(a_1, \cdots, a_{n-1}; M) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^i(a_1, \cdots, a_n; M) \longrightarrow H^{i+1}(a_1, \cdots, a_{n-1}; M) \longrightarrow \cdots$$

(د) فرض کنید $\varphi : R \longrightarrow S$ یک همریختی حلقه‌ای و N یک S–مدول و لذا یک R–مدول توسط φ باشد. در این صورت برای هر i یکریختی زیر را داریم:

$$H^i(a_1, \cdots, a_n; M) \cong H^i(\varphi(a_1), \cdots, \varphi(a_n); N)$$