

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی مکانیک

## طراحی بهینه هندسه پروفیل دندانه پمپ‌های ژیروتوری

پایان‌نامه کارشناسی ارشد طراحی کاربردی

محمد رضا کارآموز راوری

استاد راهنما

دکتر محمدرضا فروزان



دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی مکانیک

پایان نامه کارشناسی ارشد طراحی کاربردی تحت عنوان

طراحی بهینه هندسه پروفیل دندانه پمپ‌های ژئروتوری

در تاریخ ۱۳۸۹/۹/۲۸ توسط کمیته زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

- |                     |                               |
|---------------------|-------------------------------|
| دکتر محمدرضا فروزان | ۱- استاد راهنمای پایان نامه   |
| دکتر حسن موسوی      | ۲- استاد مشاور پایان نامه     |
| دکتر محمود کدخدایی  | ۳- استاد داور                 |
| دکتر صالح اکبرزاده  | ۴- استاد داور                 |
| دکتر مهدی کشمیری    | سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده |

## تشکر و قدردانی

با سپاس از پروردگار مهربان که به من توفیق کسب علم و دانش عطا فرمود، بر خود لازم می‌دانم از استاد راهنمای خود، آقای دکتر محمدرضا فروزان که با زحمات بی‌دریغ و راهنمایی‌های ارزنده‌شان روند انجام این پایان‌نامه را بر من هموار نمودند، کمال تشکر و قدردانی را داشته‌باشم. همچنین از استاد مشاور خود آقای دکتر حسن موسوی که از راهنمایی‌های ارزشمند ایشان در طی انجام پایان‌نامه بهره‌مند شدم، بسیار سپاس گزارم.

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات،  
ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع  
این پایان‌نامه (رساله) متعلق به دانشگاه صنعتی  
اصفهان است.

تقدیم به مادر و پدر عزیز و مهربانم

## فهرست مطالب

<u>عنوان</u>	<u>صفحه</u>
فهرست مطالب .....	هشت
چکیده .....	۱
فصل اول: مقدمه	
فصل دوم: پمپ‌های ژیروتوری	
۱-۲- پروفیل دندان .....	۷
۱-۱-۲- تبدیل دستگاه‌های مختصات .....	۷
۲-۱-۲- منحنی‌های صفحه‌ای .....	۱۰
۳-۱-۲- تولید یک مکان هندسی از منحنی‌های صفحه‌ای .....	۱۵
۴-۱-۲- شرط عدم وجود زیر برش .....	۲۰
۵-۱-۲- پروفیل‌های سیکلوئیدی .....	۲۱
۲-۲- انواع پروفیل دندان .....	۲۸
۱-۲-۲- پروفیل اپی تروکاید .....	۲۸
۲-۲-۲- پروفیل هایپوتروکاید .....	۲۸
۳-۲-۲- پروفیل‌های ترکیبی .....	۲۸
۴-۲-۲- پروفیل دوستریک .....	۲۹
۵-۲-۲- مقایسه انواع پروفیل .....	۲۹
۳-۲- مشخصات حجمی پمپ‌های اپی تروکاید .....	۳۰
۴-۲- سایش در پمپ‌های اپی تروکاید .....	۳۲
۱-۴-۲- سرعت لغزش .....	۳۲

۲-۴-۲- تنش تماسی هرتز.....	۳۳
۲-۴-۳- فاکتور نسبی نرخ سایش.....	۳۶
۲-۵-۵- کارآیی پمپ.....	۳۶
۲-۵-۱- بازده سطحی.....	۳۷
۲-۵-۲- آب‌بندی.....	۳۸
۲-۶-۶- محدودیت‌های عملی و ساخت.....	۳۸
۲-۶-۱- کاویتاسیون.....	۳۸
۲-۶-۲- بازده حجمی.....	۳۹

فصل سوم: تعریف مسئله

۳-۱- پارامترهای طراحی.....	۴۱
۳-۲- توابع هزینه.....	۴۲
۳-۲-۱- تابع هزینه نوسانات جریان پمپ.....	۴۲
۳-۲-۲- تابع هزینه فاکتور نسبی نرخ سایش.....	۴۳
۳-۲-۳- تابع هزینه بازده سطحی پمپ.....	۴۳
۳-۲-۴- تابع هزینه سطح موثر.....	۴۴
۳-۳- قیود.....	۴۴

فصل چهارم: مروری بر روش‌های بهینه‌یابی

۴-۱- بهینه‌یابی تک‌هدفه.....	۴۸
۴-۱-۱- مقدمه.....	۴۸
۴-۱-۲- بیان یک مسئله بهینه‌یابی با اعداد صحیح آمیخته.....	۴۹
۴-۱-۳- روش‌های بهینه‌یابی با اعداد صحیح آمیخته.....	۴۹



۴-۱-۴- نحوه اعمال قیود .....	۶۲
۴-۲- بهینه یابی چندهدفه .....	۶۲
۴-۲-۱- نقاط بهینه پارتو .....	۶۲
۴-۲-۲- روش های کلاسیک حل مسائل بهینه یابی چند هدفه .....	۶۴

## فصل پنجم: ارائه و تحلیل نتایج حل

۵-۱- مقدمه .....	۶۹
۵-۲- بهینه سازی عمومی توابع هدف .....	۷۰
۵-۲-۱- نوسانات جریان .....	۷۴
۵-۲-۲- فاکتور نسبی نرخ سایش .....	۷۷
۵-۲-۳- بازده سطحی .....	۸۱
۵-۲-۴- سطح موثر .....	۸۳
۵-۲-۵- بهینه سازی چندهدفه توابع هزینه نوسانات جریان و فاکتور نسبی نرخ سایش .....	۸۵
۵-۲-۶- بهینه سازی چندهدفه توابع هزینه بازده سطحی و سطح موثر .....	۸۷
۵-۲-۶- بهینه سازی چندهدفه با در نظر گرفتن کلیه توابع هدف .....	۸۸
۵-۳- بهینه سازی چندین پمپ نمونه .....	۹۱
۵-۳-۱- بهینه سازی با فرض تعداد دندانان ثابت .....	۹۲
۵-۳-۲- بهینه سازی با فرض تعداد دندانان قابل تغییر .....	۱۰۰

## فصل ششم: نتیجه گیری

۶-۱- جمع بندی کلی نتایج .....	۱۰۸
۶-۲- ارزیابی نتایج به دست آمده .....	۱۱۰
۶-۳- ارائه پیشنهادات .....	۱۱۰

عنوان

صفحه

منابع و مراجع ..... ۱۱۲

## چکیده:

پمپ‌های ژیروتوری یکی از پرکاربردترین انواع پمپ‌های جابجایی ثابت هستند که به‌طور گسترده در صنایع مختلف به‌خصوص در موتورهای احتراق داخلی کاربرد دارند. با توجه به کاربرد روزافزون این گونه پمپ‌ها نیاز به بهینه‌سازی آن‌ها بیش از پیش احساس می‌شود. در این پروژه ابتدا معادلات حاکم بر پروفیل روتور یک پمپ اپی‌تروکاید با استفاده از تئوری پوش استخراج شده‌است، سپس با توجه به مشخصات حجمی، دینامیکی و هندسی پمپ توابع هزینه و قیود حاکم بر مسئله بهینه‌سازی به‌دست آمده‌است. برای عمومیت بخشیدن به حل بهینه و نیز کاهش تعداد متغیرهای طراحی تمامی متغیرها به‌جز متغیر تعداد دندانان، با استفاده از شعاع دایره مراکز دندانان روتور خارجی بی‌بعد شده‌اند که این امر به توابع هزینه بی‌بعد نیز می‌انجامد. در ادامه با توجه به وجود متغیرهای صحیح و توابع گسسته، نوعی الگوریتم ترکیبی بر مبنای رقابت و جستجوی مستقیم و روش الگوریتم رقابتی ترتیبی برای حل مسئله بهینه با یک تابع هزینه مورد استفاده قرار گرفته‌اند. برای حل مسئله بهینه‌سازی چندهدفه نیاز به تبدیل مسئله بهینه‌سازی چندهدفه به یک مسئله بهینه‌سازی تک هدفه می‌باشد برای این منظور از روش معیار سراسری استفاده شده‌است. عملیات بهینه‌سازی با استفاده مقادیر مختلف جابجایی بی‌بعد شده صورت گرفته و در هر حالت نقطه، مقدار و پروفیل بهینه برای هر یک از توابع هزینه به‌دست آمده و منحنی‌های مربوط به نرخ جریان و فاکتور نسبی نرخ سایش ترسیم شده‌اند، از طرفی تاثیر پارامترهای مختلف مانند تعداد دندانان و میزان جابجایی بی‌بعد شده بر هر یک از توابع هزینه مورد بررسی قرار گرفته‌است. در پایان به‌منظور مقایسه بهتر، چندین پمپ نمونه با استفاده از ترکیب‌های مختلف توابع هزینه، بهینه‌سازی شده‌اند. نتایج حاصل بهبود قابل توجهی را در اکثر پمپ‌ها نشان می‌دهد.

**لغات کلیدی:** پمپ ژیروتوری، پمپ اپی‌تروکاید، نوسانات جریان، نرخ سایش دندانان، بازده سطحی، بهینه‌سازی با اعداد صحیح آمیخته

## فصل اول:

### مقدمه

نیاز به روانکاری و انتقال سیال از نقطه‌ای به نقطه دیگر در اکثر سیستم‌های مکانیکی دیده می‌شود. این وظیفه مهم توسط پمپ‌ها انجام می‌گردد، در این میان پمپ‌های ژیروتوری به دلیل کارآیی بالا، سر و صدای کم، تعداد اجزای اندک، عمر طولانی و ... از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. این پمپ‌ها به‌طور گسترده در صنایع خودروسازی، تراکتورها، سیستم‌های هیدرولیکی انتقال قدرت، سیستم‌های سرمایش و گرمایش و ... به کار می‌روند.

پمپ‌های ژیروتوری در شمار چرخنده‌های خورشیدی قرار می‌گیرند و سینماتیک آن‌ها بر اساس مکانیزم‌های خورشیدی با چرخ داخلی استوار است. این نوع پمپ شامل یک چرخنده داخلی و یک چرخنده خارجی است، به طوری که چرخ داخلی یک دندانه کمتر از چرخ خارجی دارد. اصول اولیه کار این نوع پمپ‌ها بسیار ساده است، سیال مورد نظر به داخل یک مجموعه کشیده شده و تحت تاثیر دوران دو عضو گردان به فضای خارجی با فشار تخلیه می‌شود.

با توجه به اهمیت و کاربرد روزافزون این گونه پمپ‌ها در صنایع مختلف نیاز به بهینه‌سازی هندسه مورد استفاده برای دندانه این گونه پمپ‌ها بیش از پیش آشکار می‌گردد. هدف از پروژه حاضر بهینه‌سازی پروفیل دندانه پمپ‌های ژیروتوری می‌باشد. برای نیل به هدف فوق مطالعات لازم به دو بخش تقسیم گردیده‌است، ابتدا اصول حاکم بر رفتار پمپ‌های ژیروتوری مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد و توابع هزینه‌ای که لازم است بهینه گردند به همراه قیود

حاکم بر آن‌ها شناسایی و با توجه به تئوری‌های حاکم بر هندسه روتورهای داخلی و خارجی فرمول‌بندی می‌گردند. در ادامه روش‌های بهینه‌یابی موجود برای رسیدن به بهترین نقطه کارکرد مورد بررسی قرار گرفته و با توجه به شرایط مسئله بهترین روش انتخاب می‌گردد.

### مرور پژوهش‌های گذشته:

دنیل وکیاتو و همکارانش [۱]، هندسه روتورهای داخلی و خارجی یک پمپ ژیروتوری را با استفاده از تئوری پوش<sup>۱</sup> مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها با استفاده از اصول ریاضی حاکم بر هندسه این نوع پروفیل‌ها شرایط لازم و کافی جهت وجود و یا عدم وجود پروفیل هندسی را با چندین بیان مجزا ارائه نمودند. چنگ‌بینگ کوی و همکارانش [۲]، هندسه چرخنده‌های سیکلوئیدی را با استفاده از معادله مش‌بندی مورد بررسی قرار داده و معادلاتی کلی برای هندسه روتورهای داخلی و خارجی و نیز نقاط تماس به‌دست آوردند. آن‌ها هر دو نوع پروفیل اپی‌تروکاید<sup>۲</sup> و هایپوتروکاید<sup>۳</sup> را مورد بررسی قرار دادند. یی‌ون‌وانگ و چیوفان‌سیه [۳]، با استفاده از مدل ریاضی پروفیل دندانه روتورهای داخلی و خارجی توانستند فرمول‌بندی برای مقادیر نیروی تماس و نیز قید عدم وجود نقطه منفرد بر روی پروفیل دندانه ابداع نمایند. آن‌ها همچنین اثرات شعاع هم‌فاصلگی بر وجود نقطه منفرد را نیز در حل مسئله وارد نمودند. یی‌ون‌وانگ و چیوفان‌سیه در تحقیقی دیگر [۴]، وجود نقطه منفرد بر روی پروفیل داخلی یک چرخ اپی‌تروکاید را مورد بررسی قرار دادند، آن‌ها توانستند یک ناحیه قابل قبول برای جلوگیری از ایجاد نقطه منفرد بر روی پروفیل مذکور بیابند. لوزیکا ایوانوویچ و دانیکا جوسیفوویچ [۵]، پارامترهای سینماتیکی پروفیل تروکاید را مورد مطالعه قرار دادند، آن‌ها اثرات پارامترهای هندسی بر میزان سرعت لغزش بر روی پروفیل دندانه را با رهیافت ترسیمی بررسی نمودند. آن‌ها همچنین نشان دادند که لغزش یک پارامتر تعیین‌کننده بر میزان سایش چرخ‌های پمپ می‌باشد. چانگ و همکاران [۶]، موفق شدند که یک برنامه کامپیوتری برای طراحی پروفیل پمپ و نیز محاسبه مشخصات حجمی پمپ از جمله جابجایی پمپ و نوسانات جریان ابداع نمایند. پدروجاویر و استوه [۷]، رفتار دینامیکی سیال در یک پمپ ژیروتوری را با استفاده از روش‌های تئوریک و اجزا محدود مورد مطالعه قرار دادند. سون‌مان‌وون و همکارانش [۸]، مدلی تئوری از سایش روتورهای پمپ ژیروتوری بدون در نظر گرفتن اثرات دینامیک سیال ابداع نمودند، آن‌ها معیار فاکتور نسبی نرخ سایش<sup>۴</sup> را برای وارد ساختن اثرات توام سرعت لغزش و تنش تماسی هرگز بر میزان سایش دندانه مورد استفاده قرار دادند. یی‌ون‌وانگ و چیوفان‌سیه [۹]، هندسه پروفیل هایپوتروکاید و شرایط عدم وجود نقطه

<sup>1</sup> Envelope Theory

<sup>2</sup> Epitrochoid

<sup>3</sup> Hypotrochoid

<sup>4</sup> WRPF "Wear Rate Proportional Factor"

منفرد را برای این پروفیل مورد مطالعه قرار دادند، آن‌ها موفق شدند که محدوده‌ای برای پارامترهای هندسی بیابند که در آن محدوده نقطه منفرد بر روی پروفیل وجود نخواهد داشت. آن‌ها در کاری دیگر [۱۰]، توانستند با استفاده از ترکیب پروفیل‌های اپی‌تروکاید و هایپوتروکاید پروفیل جدیدی تولید نمایند که بیشترین بازده سطحی را نسبت به دو پروفیل سازنده خود دارا باشد. جیایان و همکارانش [۱۱]، روشی جدید برای تولید پروفیل‌های ژروتوری با استفاده از تعریف یک تابع خطای فرضی ابداع نمودند. آن‌ها تمامی شرایط هندسی و سینماتیکی لازم برای یک پروفیل ژروتوری را از طریق تابع خطای مورد نظر بر مسئله تحمیل کرده و پروفیل‌های هندسی متعددی را مورد بررسی قرار دادند. جیمز مونتر و همکارانش [۱۲]، بسته نرم‌افزاری ابداع نمودند که به کاربر امکان طراحی پروفیل پمپ را به صورت کاملاً اتوماتیک می‌داد، همچنین پارامترهای حجمی و سینماتیکی پمپ نیز به صورت نمودارهای هندسی قابل ترسیم می‌بود. نیکولا نروگنا و سالواتور مانکو [۱۳]، پروفیل پمپ‌های سیکلوئیدی را به گونه‌ای تغییر دادند که در هر بار دوران کامل روتور خارجی تنها دو دندانه در تماس با روتور دیگر می‌باشد این امر باعث کاهش میزان سایش در دندانه‌های پمپ می‌شود. جیمز مونتر و کاستیلا [۱۴]، نیروهای تماسی، تنش تماسی هرتز و مشخصات حجمی پمپ را مورد بررسی قرار داده و تاثیر هر یک از پارامترهای هندسی و نیز تعداد دندانه را بر آن‌ها مورد مطالعه قرار دادند. شیخ هسی تنگ و همکارانش [۱۵]، الگوریتمی بر مبنای روش تابع خطا برای تولید روتورهای داخلی و خارجی ارائه نمودند. چیوفان‌سیه [۱۶]، تاثیر پارامترهای هندسی بر کارایی پمپ را مورد بررسی قرار داده‌است، در این تحقیق بازده سطحی و نیز اختلاف انحنا بین دو روتور در نقطه تماس، به عنوان دو پارامتر تعیین کننده میزان کارایی بیان شده‌اند، وی همچنین تاثیر پارامترهای هندسی بر تنش تماسی هرتز را نیز با استفاده از تحلیل اجزا محدود مورد بررسی قرار داده‌است. چونگ هو شین [۱۷]، روش جدیدی را برای طراحی پروفیل‌های سیکلوئیدی ابداع نمود، در این روش از تئوری مراکز آنی سرعت استفاده شده‌بود. چول کیم و همکارانش [۱۸]، موفق شدند که پارامترهای هندسی پمپ را با استفاده از توابع هزینه نوسانات جریان و جابجایی پمپ و تحت محدودیت زاویه فشار بهینه کنند. ایناگوما [۱۹]، توانست با استفاده از موقعیت نقاط مش‌بندی و آب‌بندی، فرمول‌های تئوری برای گشتاور و جابجایی پمپ به دست آورد، وی فرمولاسیون خود را برای پمپ‌های با آب‌بند نیز به دست آورد. ولادیمیر باسونوک و همکارانش [۲۰]، نحوه توزیع نیروی تماسی بین دندانه‌ها را در دو حالت تئوری و آزمایش مورد مطالعه قرار دادند. پیتر میر [۲۱]، میزان لغزش خاص به عنوان یک پارامتر اثر گذار بر سایش را برای پروفیل‌های مختلف مورد مطالعه قرار داد، وی دریافت که در نقاط با شعاع انحنا کمتر میزان لغزش خاص افزایش ناگهانی دارد. ج.ر. کلبرن [۲۲]، معادلات حاکم بر منحنی‌های تروکاید را بر مبنای تئوری حاکم بر مکانیزم‌های چند لینیکی مورد بررسی قرار داد، وی کاربردهای متنوعی از این منحنی‌ها را در پمپ‌های مختلف مورد مطالعه قرار داد. مایتی و سینها [۲۳]، سینماتیک

حرکت چرخ‌ها را برای پروفیل‌های تروکاید مورد بررسی قرار دادند، آن‌ها با استفاده از برآیند سرعت لغزش و سرعت غلتش در نقطه تماس معیاری از خستگی پوسته‌کننده به‌دست آوردند. شونگ و پنگ [۲۴]، نیروهای تماسی را تحت تاثیر فشار داخلی پمپ فرمول‌بندی نمودند، آن‌ها برای ساده‌سازی محل‌های تماس را به‌صورت نقطه در نظر گرفته و از تغییر شکل‌های الاستیک دندان‌ها صرف‌نظر نمودند. آن‌ها در تحقیقی دیگر [۲۵]، توانستند با استفاده از تئوری double-generation تمامی پروفیل‌های تروکاید را فرمول‌بندی نمایند. بیرد و همکارانش [۲۶]، پروفیل‌های اپی‌تروکاید و هایپوتروکاید را از نقطه‌نظر جابه‌جایی پمپ مورد مقایسه قرار دادند. آن‌ها دریافتند که پروفیل هایپوتروکاید نسبت به اپی‌تروکاید کارآیی کمتری دارد. بوناندیرینی و همکارانش [۲۷]، پروفیل دایره‌ای کاهش یافته را برای پروفیل روتور خارجی ابداع کرده و توانستند مشخصات حجمی این نوع پمپ‌ها را نیز محاسبه نمایند. بیرد و یانیتل [۲۸]، اثر شعاع دایره روتور خارجی را بر میزان جابجایی پمپ بررسی کرده و دریافتند که افزایش آن باعث کاهش جابجایی پمپ می‌گردد. میمی و پناچی [۲۹]، پروفیل‌های بیضوی و سینوسی را برای روتور خارجی پیشنهاد دادند و توانستند نشان دهند که این پروفیل‌ها می‌توانند نوسانات جریان و لغزش خاص کمتری را از خود نشان دهند. این دو در تحقیقی دیگر [۳۰]، پروفیل اینولوت و تروکاید را از نقطه‌نظر نوسانات جریان و نیز جابجایی پمپ با یکدیگر مقایسه نمودند. گیوانی میامی و پائولو پناچی [۳۱]، شرایط زیربرش در چرخ‌دنده‌های سیکلوئیدی را با استفاده از منحنی‌های محدود‌کننده فرمول‌بندی نمودند. ف.ج. روبینسون و همکارش [۳۲]، تغییرات فضای خالی بین دو روتور را بر اساس زاویه چرخش روتور داخلی فرمول‌بندی نمودند، آن‌ها با استفاده از فرمول‌بندی خود موفق به محاسبه جابجایی پمپ گردیدند. سونگ یین جونگ و همکارانش [۳۳]، برنامه کامپیوتری ارائه کردند که توانایی ترسیم هندسه پروفیل‌های دندان بیضی و نیز مشخصات دینامیکی و سینماتیکی آن‌ها را دارا بود. سوون‌مان‌وون و همکارانش [۳۴]، روش جدیدی برای تولید پروفیل هایپوتروکاید با استفاده از مفهوم مراکز آبی دوران ابداع نمودند. آن‌ها همچنین مشخصات حجمی و شرط زیر برش را برای پروفیل هایپوتروکاید با استفاده از روش ابداعی خود بررسی نمودند. ژانگ و همکارانش [۳۵]، فرمول ساده‌ای را برای دوری جستن از پدیده زیربرش در پروفیل دندان پمپ ابداع نمودند.

بهینه‌سازی پروفیل یک پمپ ژیروتوری با توجه به توابع هزینه آن، در شمار مسائل بهینه‌یابی چندهدفه قرار می‌گیرد، از سوی دیگر متغیر تعداد دندان‌های روتورهای پمپ تنها می‌تواند اعداد صحیحی را اختیار نماید لذا بهینه‌سازی پروفیل یک پمپ ژیروتوری با توجه به وجود توابع هزینه و قيود غیرخطی یک مسئله بهینه‌سازی چند هدفه با اعداد صحیح آمیخته غیرخطی می‌باشد. در زمینه بهینه‌سازی با اعداد صحیح آمیخته غیرخطی مطالعات کمی صورت گرفته‌است. لکزینگ یانگ و همکارانش [۳۶]، الگوریتمی بر مبنای رقابت با نام الگوریتم رقابتی ترتیبی ابداع

نمودند، این الگوریتم با استفاده از نقاط تصادفی تولید شده در فضای جستجو و کاهش دادن منطقه قابل قبول به دنبال مینیمم سراسری می‌گردد. پونسیچ و همکارش [۳۷]، با استفاده از الگوریتم تکاملی دیفرانسیلی روشی ابداع نمودند که امکان بهینه‌سازی مسائل برنامه‌ریزی با اعداد صحیح آمیخته را فراهم می‌آورد. پنگ‌تیان و همکارانش [۳۸]، با استفاده از استراتژی آمیخته داروین و بولتزمن<sup>۱</sup> روشی را برای بهینه‌سازی با اعداد صحیح ابداع نمودند. لینو کاستا و همکارش [۳۹]، الگوریتم ژنتیک و استراتژی‌های تکاملی را برای حل مسائل بهینه‌یابی با اعداد صحیح آمیخته به کار گرفتند آن‌ها کارآیی دو روش را طی مثال‌های متنوعی با یکدیگر مقایسه نمودند. کاسام دیپ و همکارانش [۴۰]، الگوریتم ژنتیک کد حقیقی را برای حل مسائل بهینه‌سازی با اعداد صحیح آمیخته مورد استفاده قرار دادند. وی.ک. اسریواستاوا و همکارانش [۴۱]، رهیافت بهینه‌سازی دو فازی را برای حل مسائل بهینه‌سازی با اعداد صحیح بکار گرفتند، آن‌ها با تخمین گرادیان توابع هدف و قیود جهت حرکت به سمت نقطه بهینه را پیش‌بینی نمودند.

در فصل سوم کلیات مربوط به یک پمپ ژبروتوری از نقطه‌نظر هندسه، مشخصات حجمی، مشخصات دینامیکی و محدودیت‌های ساخت مورد بررسی قرار می‌گیرد. در فصل چهارم مسئله بهینه‌سازی مرتبط با مشخصات تعریف شده در فصل سوم تعریف شده و متغیرهای طراحی، توابع هزینه و قیود حاکم بر مسئله تعریف می‌گردند. فصل چهارم به بررسی روش‌های مختلف بهینه‌سازی می‌پردازد که در آن معایب و مزایای هر یک از این روش‌ها با توجه به مشخصات مسئله مورد بررسی بیان گردیده و نهایتاً بهترین روش برای حل مسئله بهینه‌سازی مورد استفاده قرار می‌گیرد. فصل پنجم به ارائه نتایج حل بهینه مربوط به مسئله معرفی شده در فصل سوم اختصاص دارد و در پایان نتایج کلی و پیشنهاداتی جهت ادامه کار در فصل ششم بیان می‌گردند.

---

<sup>1</sup> Darwin and Boltzmann



## فصل دوم: پمپ‌های ژیروتوری

### ۲-۱- پروفیل دندانه

#### ۲-۱-۱- تبدیل دستگاه‌های مختصات

دستگاه‌های مختصات  $S_1(x_1, y_1, z_1)$  تا  $S_n(x_n, y_n, z_n)$  و نقطه  $M$  با مختصات  $M(x_1, y_1, z_1)$  تا  $M(x_n, y_n, z_n)$  را در این دستگاه‌های مختصات در نظر می‌گیریم. منظور از انتقال دستگاه‌های مختصات بیان ارتباط بین مختصات نقطه  $M$  در دو دستگاه متفاوت می‌باشد. در تئوری چرخنده‌ها انتقال دستگاه‌های مختصات کاربردهای زیر را داراست:

برای تعیین معادلات الف) مسیر طی شده توسط یک نقطه از یک جسم متحرک، ب) سطح طی شده توسط یک خط که به صورت صلب به یک جسم متحرک متصل است، ج) مکان هندسی سطوحی که به صورت صلب به یک جسم متحرک متصل اند، د) برای بیان معادلات یک سطح یا خط داده شده در چندین دستگاه مختصات مجزا و بیان آن‌ها در یک دستگاه صلب واحد. [۴۲]

#### تبدیل دستگاه‌های مختصات هم‌مرکز:

دستگاه‌های مختصات دکارتی  $S_n$  و  $S_m$  را مطابق شکل (۲-۱) در نظر می‌گیریم، بیان نقطه  $M$  در این دو دستگاه با رابطه (۲-۱) بیان شده‌است.

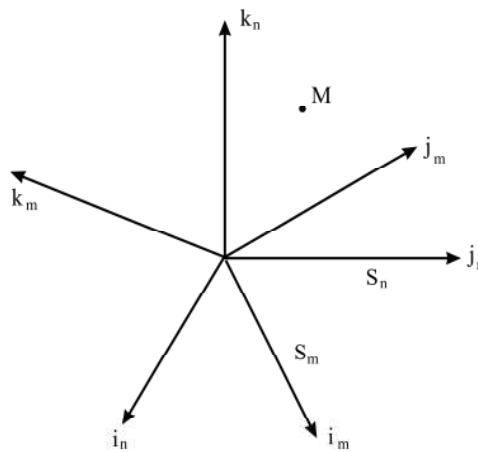
$$\mathbf{M} = x_n \mathbf{i}_n + y_n \mathbf{j}_n + z_n \mathbf{k}_n = x_m \mathbf{i}_m + y_m \mathbf{j}_m + z_m \mathbf{k}_m \quad (۱-۲)$$

با ضرب داخلی رابطه فوق در بردارهای یکه دستگاه  $S_n$  ارتباط بین مولفه‌های دستگاه‌های  $S_m$  و  $S_n$  به راحتی قابل بیان خواهد بود لذا داریم:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{i}_n = x_n = x_m (\mathbf{i}_m \cdot \mathbf{i}_n) + y_m (\mathbf{j}_m \cdot \mathbf{i}_n) + z_m (\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{i}_n) \quad (۲-۲)$$

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{j}_n = y_n = x_m (\mathbf{i}_m \cdot \mathbf{j}_n) + y_m (\mathbf{j}_m \cdot \mathbf{j}_n) + z_m (\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{j}_n) \quad (۳-۲)$$

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{k}_n = z_n = x_m (\mathbf{i}_m \cdot \mathbf{k}_n) + y_m (\mathbf{j}_m \cdot \mathbf{k}_n) + z_m (\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{k}_n) \quad (۴-۲)$$



شکل ۱-۲: دستگاه‌های مختصات هم‌مرکز دکارتی  $S_m$  و  $S_n$

بیان ماتریسی رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{L}_{nm} \mathbf{x}_m \quad (۵-۲)$$

که در آن ماتریس دوران نام داشته و به صورت زیر قابل بیان است:

$$\mathbf{L}_{nm} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_m \cdot \mathbf{i}_n & \mathbf{j}_m \cdot \mathbf{i}_n & \mathbf{k}_m \cdot \mathbf{i}_n \\ \mathbf{i}_m \cdot \mathbf{j}_n & \mathbf{j}_m \cdot \mathbf{j}_n & \mathbf{k}_m \cdot \mathbf{j}_n \\ \mathbf{i}_m \cdot \mathbf{k}_n & \mathbf{j}_m \cdot \mathbf{k}_n & \mathbf{k}_m \cdot \mathbf{k}_n \end{bmatrix} \quad (۶-۲)$$

**انتقال دستگاه‌های مختصات غیر هم‌مرکز:**

جسم صلبی که در فضا در حال حرکت است را به همراه دستگاه مختصات  $S_m$  متصل به آن و  $S_n$  دستگاه مختصات ثابت در نظر می‌گیریم. محل نقطه  $M$  با بردارهای  $\mathbf{r}_m(x_m, y_m, z_m)$  و  $\mathbf{r}_n(x_n, y_n, z_n)$  در دستگاه‌های  $S_m$  و  $S_n$  مشخص می‌گردد. شکل (۲-۲)

اگر پارامتر  $\varphi$  را به عنوان پارامتر حرکت تعریف نماییم آنگاه بردار  $\mathbf{r}_n$  که معرف مسیر طی شده توسط نقطه  $M$  در دستگاه  $S_n$  است را می توان با استفاده از مولفه های دستگاه  $S_m$  و پارامتر حرکت  $\varphi$  به صورت زیر تعریف نمود:

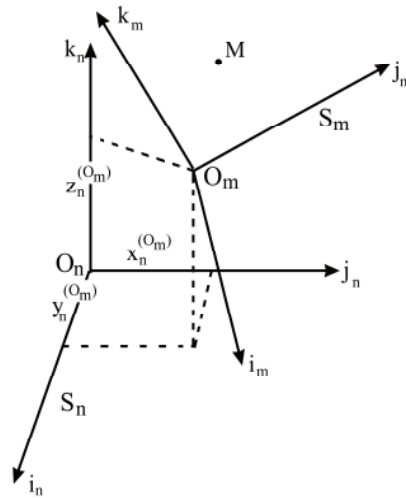
$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n(x_n(x_m, y_m, z_m, \varphi), y_n(x_m, y_m, z_m, \varphi), z_n(x_m, y_m, z_m, \varphi)) \quad (7-2)$$

از طرف دیگر می توان ارتباط بین بردارهای  $\mathbf{r}_n$  و  $\mathbf{r}_m$  را با توجه به قوانین جمع برداری به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_m + \overline{(O_n O_m)} \quad (8-2)$$

با توجه به رابطه (۸-۲) داریم:

$$x_n \mathbf{i}_n + y_n \mathbf{j}_n + z_n \mathbf{k}_n = x_n^{(O_m)} \mathbf{i}_n + y_n^{(O_m)} \mathbf{j}_n + z_n^{(O_m)} \mathbf{k}_n + x_m \mathbf{i}_m + y_m \mathbf{j}_m + z_m \mathbf{k}_m \quad (9-2)$$



شکل ۲-۲: دستگاه های مختصات غیرمترکز دکارتی  $S_m$  و  $S_n$

که در آن  $x_n^{(O_m)}, y_n^{(O_m)}, z_n^{(O_m)}$  مشخص کننده محل نقطه  $O_m$  مرکز دستگاه مختصات  $S_m$  و  $(\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_n, \mathbf{k}_n)$  بردارهای یک دستگاه مختصات  $S_n$  و  $(\mathbf{i}_m, \mathbf{j}_m, \mathbf{k}_m)$  بردارهای یک دستگاه مختصات  $S_m$  می باشند. با ضرب داخلی طرفین رابطه بالا در بردارهای یک دستگاه  $S_n$  می توان مولفه های بردار  $\mathbf{r}_n$  را با استفاده از مولفه های دستگاه مختصات  $S_m$  به دست آورد.

$$x_n = x_n^{(O_m)} + x_m (\mathbf{i}_m \cdot \mathbf{i}_n) + y_m (\mathbf{j}_m \cdot \mathbf{i}_n) + z_m (\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{i}_n) \quad (10-2)$$

$$y_n = y_n^{(O_m)} + x_m (\mathbf{i}_m \cdot \mathbf{j}_n) + y_m (\mathbf{j}_m \cdot \mathbf{j}_n) + z_m (\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{j}_n) \quad (11-2)$$

$$z_n = z_n^{(O_m)} + x_m (\mathbf{i}_m \cdot \mathbf{k}_n) + y_m (\mathbf{j}_m \cdot \mathbf{k}_n) + z_m (\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{k}_n) \quad (12-2)$$

روابط (۱۰-۲) تا (۱۲-۲) را می توان به فرم ماتریسی زیر نیز بیان نمود:

$$[\mathbf{x}_n] = \mathbf{M}_{nm} [\mathbf{x}_m] \quad (13-2)$$

که در آن:

$$M_{nm} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_m \bullet i_n & j_m \bullet i_n & k_m \bullet i_n & x_n^{(O_m)} \\ i_m \bullet j_n & j_m \bullet j_n & k_m \bullet j_n & y_n^{(O_m)} \\ i_m \bullet k_n & j_m \bullet k_n & k_m \bullet k_n & z_n^{(O_m)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۱۴-۲)$$

$$[x_n] = [x_n \quad y_n \quad z_n \quad 1]^T \quad (۱۵-۲)$$

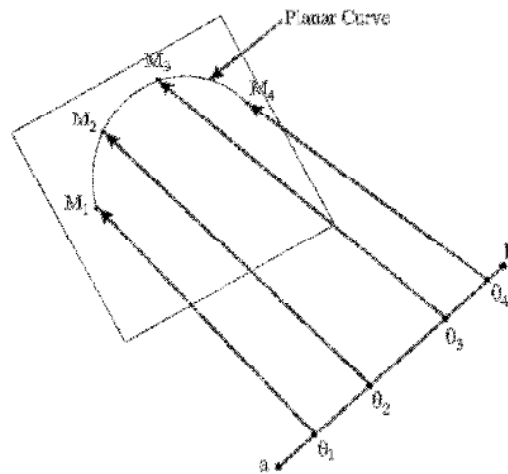
$$[x_m] = [x_m \quad y_m \quad z_m \quad 1]^T \quad (۱۶-۲)$$

### ۲-۱-۲- منحنی‌های صفحه‌ای

ایده اصلی تولید منحنی‌های صفحه‌ای بر مبنای درک شهودی می‌باشد اما می‌توان مبانی حاکم بر اینگونه منحنی‌ها را با استفاده از استدلال‌های هندسی محکم نیز بیان نمود [۴۲]. عمدتاً معادله یک منحنی صفحه‌ای با استفاده از معادلات پارامتری بیان می‌گردد که خود معرف یک انتقال پیوسته از بازه باز  $a < \theta < b$  (در اینجا  $\theta$  به عنوان پارامتر در نظر گرفته شده است) به یک فضای دو بعدی است. این انتقال می‌تواند به صورت زیر بیان گردد:

$$r(\theta) \in C^0 \quad \ni r(\theta) = x(\theta)\mathbf{i} + y(\theta)\mathbf{j}, \quad \theta \in G \quad (۱۷-۲)$$

که در آن  $\mathbf{i}$ ،  $\mathbf{j}$  بردارهای یکه و  $G$  معرف بازه  $(a, b)$  می‌باشد. نماد  $C^0$  به این معناست که  $x(\theta)$  و  $y(\theta)$  در بازه  $G$  توابعی پیوسته‌اند. در عین حال فرض می‌کنیم که نگاشت فوق یک نگاشت یک‌به‌یک است به این معنا که برای هر مقدار  $r(\theta)$  تنها یک  $\theta$  از بازه  $G$  وجود دارد. شکل (۳-۲) به صورت شماتیک این نگاشت را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۲: نگاشت یک‌به‌یک از بازه باز  $G$  به فضای دو بعدی