دانشگاه بیرجند

دانشکده علوم ریاضی و آمار

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

بررسی انواع کمان‌ها و تحلیل همبندی در گراف‌های فازی

استاد راهنما

دکتر مسعود امان

استاد مشاور

دکتر مهدی پناهی

نگارنده

فاطمه عاقلی گوکی

شهریور ۱۳۹۲

چکیده

نظریه گراف به بررسی وجود یا عدم وجود یک کمان و تأثیر آن بر سایر ویژگی‌های یک گراف خلاصه می‌شود، اما در گراف‌های فازی با توجه به اینکه شدت هر کمان یک عدد در بازه $[0,1]$ است، لذا تحلیل کمان‌ها و تأثیر آن بر سایر ویژگی‌های گراف فازی مفصل‌تر و پیچیده‌تر است. در این تحقیق با استفاده از مفهوم شدت همبندی کمان‌ها در گراف‌های فازی، کمان‌ها را به سه نوع α-قوی، β-قوی و δ-کمان دسته‌بندی می‌کنیم. با استفاده از این دسته‌بندی مشخص‌سازی‌هایی برای پل‌های فازی، درخت‌های فازی و دورهای فازی بدست می‌آوریم، همچنین خواص این دسته‌بندی را در گراف فازی کامل، درخت فازی و متمم یک گراف فازی به طور خاص مورد بررسی قرار می‌دهیم. این دسته‌بندی در فهم ساختار اساسی گراف‌های فازی، کمینه کردن هزینه و بهبود کارایی سیستم تأثیر بسزایی دارد. با توجه به اینکه مفهوم همبندی وابسته به شدت یک کمان، نقش مهمی در کاربرد گراف‌های فازی در علوم مختلف ایفاء می‌کند، در این تحقیق همبندی در گراف‌های فازی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. چون ناهمبند کردن یا ایجاد یک گسستگی در یک گراف فازی بر اساس حذف بعضی از رئوس یا کمان‌ها حاصل می‌شود، لذا در ادامه‌ی این تحقیق، دو پارامتر همبندی جدید برای یک گراف فازی با عنوان‌های همبندی رأس فازی و همبندی کمان فازی تعریف می‌کنیم. سپس ارتباط این دو نوع همبندی و مینیمم درجه‌ی قوی یک گراف فازی را در قضیه‌ای مشابه قضیه ویتنی که در نظریه‌ی گراف مطرح شده است، مورد بررسی قرار می‌دهیم. نشان می‌دهیم در یک گراف فازی کامل این پارامترها با هم برابرند.

واژگان کلیدی: روابط فازی، پل فازی، رأس برش فازی، متمم گراف فازی، زنجیر فازی، همبندی رأس فازی، همبندی کمان فازی.

تعداد صفحات پایان نامه: ۱۱۵

تقدیم به پدر و مادر عزیزم:

مقدس ترین واژه ها در لغت نامه دلم که زندگیم را مدیون مهر و عطوفت آنها می دانم.

تقدیم به همسرم:

که سایه مهربانیش سایه سار زندگیم می باشد، او که اسوه صبر و تحمل بوده و مشکلات مسیر را برایم تسهیل نمود.

سپاس گزاری

حمد و سپاس خدای حکیم که به انسان استعداد و فکرت آموخت تا حقایق جهان هستی را کاوش و کشف نماید و از این حقایق در جهت حل مشکلات جامعه بهره جوید. ضروری است که مراتب سپاس و قدردانی خود را نسبت به همه عزیزان و بزرگانی که در تکمیل این پایان‌نامه مرا یاری داده‌اند ابراز نمایم. بدین وسیله از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر مسعود امان، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم که بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. همچنین از استاد محترم جناب آقای دکتر مهدی پناهی که مشاوره این پایان نامه را بر عهده گرفتند و اساتید محترم سرکار خانم دکتر نسیم نصرآبادی و جناب آقای دکتر اسدا... محمودزاده وزیری برای قبول داوری این پایان نامه کمال تشکر را دارم.

فاطمه عاقلی کوکی

شهریور ۱۳۹۲

فهرست مطالب

لیست تصاویر **پ**

۱ مفاهیم و مقدمات اولیه **۴**

۱.۱ زیرمجموعه‌های فازی ۵

۱.۱.۱ روابط هم ارزی فازی ۱۴

۲ گراف فازی **۲۰**

۱.۲ مقدمه‌ای بر گراف ۲۱

۲.۲ مقدمه‌ای بر گراف فازی ۲۳

۳.۲ مسیرها و همبندی ۲۸

۱.۳.۲ پل‌های فازی و رئوس برش فازی ۳۰

۲.۳.۲ جنگل‌ها و درختان ۳۲

۴.۲ گراف فازی کامل ۴۴

۳ مشخص‌سازی نوع کمان‌ها در ساختار یک گراف فازی **۵۴**

۱.۳ انواع کمان‌ها در یک گراف فازی ۵۵

۲.۳ انواع کمان‌ها در یک قوی‌ترین مسیر ۵۸

۳.۳ مشخص‌سازی پل‌های فازی در یک گراف فازی ۶۱

۴.۳ انواع کمان‌ها در یک درخت فازی ۶۳

۵.۳ انواع کمان‌ها در یک دور فازی ۷۰

۶.۳ انواع کمان‌ها در یک گراف فازی کامل ۷۱

۷.۳ انواع کمان‌ها در متمم یک گراف فازی ۷۶

۴ همبندی در گراف‌های فازی **۸۲**
۱.۴ درجه‌ی قوی یک رأس ۸۳
۲.۴ دنباله شدت رأس ۸۹
۳.۴ همبندی رأس فازی ۹۳
۴.۴ همبندی کمان فازی ۹۵
۵.۴ قضیه ویتنی در حالت فازی ۹۷
۶.۴ روابط بین همبندی رأس، همبندی کمان، همبندی رأس فازی و همبندی کمان فازی ۱۰۲
۷.۴ همبندی در متمم یک گراف فازی ۱۰۴
۱.۷.۴ متمم دورهای فازی ۱۰۷

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی **۱۰۹**

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی **۱۱۱**

مراجع **۱۱۳**

لیست تصاویر

۱.۲ شکل (a) گراف $G^* = (N, A)$ و شکل (b) گراف فازی $G = (V, \mu, \rho)$ ۲۷

۲.۲ شکل (c) یک زیرگراف فازی جزئی از G و شکل (d) زیرگراف $G^t = (\mu^t, \nu^t)$ به ازای $t = 0.5$ ۲۸

۳.۲ شکل (e) یک زیرگراف فازی القاشده به وسیله‌ی P که $P = \{u_2, u_3, u_4, u_5\}$ و شکل (f) یک زیرگراف فازی القاشده به وسیله‌ی ν که $\nu(u_2) = 1$،$\nu(u_3) = 0.7$، $\nu(u_4) = 0.8$، $\nu(u_5) = 0.6$ ۲۸

۴.۲ یک زیرگراف فازی جزئی فراگیر از G ۲۹

۵.۲ جنگل‌های فازی ۳۴

۶.۲ گراف‌های فازی که جنگل فازی نیستند ۳۴

۷.۲ جنگل فازی ۳۷

۸.۲ گراف فازی که نه دور فازی و نه درخت فازی است ۳۸

۹.۲ گراف فازی G درخت فازی و گراف فازی G' دور فازی است ۳۹

۱۰.۲ گراف فازی G درخت فازی است ولی $(supp(\mu), \rho^q)$ درخت نیست ۴۲

۱۱.۲ رأس برش فازی در گراف فازی لزوماً رأس مشترک دو پل فازی نیست ۴۳

۱۲.۲ رأس برش فازی در گراف فازی لزوماً رأس مشترک دو پل فازی نیست ۴۴

۱۳.۲ گراف فازی که شدت هر کمان آن با شدت همبندی بین هر دو رأس آن کمان برابر است ولی کامل نیست ۴۵

۱۴.۲ گراف فازی که رأس برش فازی ندارد و کامل نیست ۴۶

۱۵.۲ گراف فازی کامل که پل فازی دارد ۴۷

۱.۳ مثالی از انواع کمان‌ها و مسیرهای α–قوی و β–قوی ۵۷

۲.۳ مثالی که نشان می‌دهد شدت یک δ-کمان از شدت یک کمان α-قوی بیشتر است . . . ۵۷
۳.۳ مثالی که نشان می‌دهد شدت کمان β-قوی از شدت کمان α-قوی بیشتر است ۵۸
۴.۳ یک مسیر قوی که قوی‌ترین مسیر نیست . . . ۶۰
۵.۳ یک کمان قوی که پل فازی نیست . . . ۶۱
۶.۳ یک رأس برش فازی که رأس مشترک از حداقل دو کمان α-قوی نیست . . . ۶۳
۷.۳ یک رأس برش فازی که هیچ کمان α-قوی به آن مجاور نیست . . . ۶۳
۸.۳ یک درخت فازی که δ^*-کمان دارد . . . ۶۸
۹.۳ مثالی از ماکزیمم درخت فراگیر . . . ۶۹
۱۰.۳ گراف فازی که هیچ رأس برش فازی ندارد و شامل بیشتر از یک کمان α-قوی است . . . ۷۲
۱۱.۳ گراف فازی که کامل نیست و هر مسیر قوی در آن قوی‌ترین مسیر است . . . ۷۵
۱۲.۳ مثالی از انواع کمان‌ها . . . ۷۶
۱۳.۳ مثالی از زنجیرهای فازی . . . ۷۷
۱۴.۳ کمان (a,b) یک پل فازی در G است ولی یک پل فازی در G^c نیست . . . ۷۸
۱۵.۳ مثال‌هایی از درخت‌های فازی . . . ۸۰

۱.۴ درجه قوی یک رأس در گراف فازی . . . ۸۴
۲.۴ مینیمم و ماکزیمم درجه قوی یک گراف فازی . . . ۸۵
۳.۴ دنباله شدت رأس در یک گراف فازی . . . ۸۹
۴.۴ مثالی از برش رأس فازی . . . ۹۴
۵.۴ مثالی از برش رأس فازی . . . ۹۴
۶.۴ مثالی از همبندی رأس فازی . . . ۹۵
۷.۴ مثالی از برش کمان فازی . . . ۹۶
۸.۴ گراف فازی که در آن هر پل فازی یک زنجیر فازی است . . . ۹۷
۹.۴ مثالی از همبندی کمان فازی . . . ۹۸
۱۰.۴ گراف فازی که در آن $k(G) \neq k'(G)$ . . . ۹۹
۱۱.۴ گراف فازی که کامل نیست . . . ۱۰۲
۱۲.۴ G و G^c هر دو همبند می‌باشند . . . ۱۰۶

۱۳.۴ یک دور فازی و متممش ۱۰۷
۱۴.۴ یک دور فازی و متممش ۱۰۸
۱۵.۴ یک دور فازی و متممش ۱۰۸

پیش گفتار

روش‌های کلاسیک در نظریه‌ی گراف مبتنی بر مفروضاتی از قبیل وجود رئوس و ارتباط بین آنها که توسط کمان‌ها بیان می‌شود، بنا شده است، ولی در جهان واقعی گاهی این مفروضات دقیق نیستند و در چنین شرایطی لازم است از نظریه‌های دیگر برای توصیف یک گراف و عناصر وابسته به آن استفاده کرد. نظریه مجموعه‌های فازی ارائه شده توسط پروفسور لطفی عسگرزاده [۱] [۱۳] یک نظریه مناسب در چنین شرایطی است. نظریه گراف فازی توسط روزنفلد [۲] در سال 1975 معرفی شد[۹]. این نظریه توسط نویسندگان مختلفی مورد بررسی قرار گرفته است، برای بررسی برخی ایده‌ها در این زمینه می‌توان به افراد بسیاری از جمله بهاتاچاریا [۳] [۲]، بوتانی [۴] و روزنفلد [۴]، موردسن [۵] [۷] و... اشاره کرد. گراف‌های فازی کاربردهای بسیاری در علم مدرن، تکنولوژی، شبکه‌های عصبی، آنالیز خوشه‌بندی، پزشکی، مهندسی، مدارهای الکتریکی و... دارند. با توجه به اینکه نظریه گراف فازی ترکیبی از دو نظریه مجموعه‌های فازی و نظریه گراف است، در فصل اول مفاهیم زیرمجموعه‌های فازی و روابط بین آنها را بیان می‌کنیم و در فصل دوم به معرفی یک گراف و مفاهیم اولیه در آن می‌پردازیم. در ادامه‌ی فصل دوم با معرفی گراف‌های فازی مفاهیمی مانند شدت همبندی، پل فازی، درخت فازی، دور فازی، جنگل فازی و ... در این نوع از گراف‌ها را بیان می‌کنیم. در این فصل با ارائه الگوریتمی نشان می‌دهیم که شدت مسیر منحصر به فردی که در ماکزیمم درخت فراگیر از یک گراف فازی وجود دارد همان شدت همبندی بین دو رأس انتهایی آن مسیر در گراف فازی است.

در فصل سوم با استفاده از شدت همبندی یک کمان، کمان‌ها در گراف فازی را به سه نوع α-قوی، β-قوی و δ-کمان دسته‌بندی می‌کنیم و با ارائه مثال‌هایی نشان می‌دهیم که نوع کمان‌ها با بررسی شدتشان به راحتی مشخص نمی‌شوند. در ادامه ارتباط بین مسیرهای قوی و قوی‌ترین مسیرها را بیان می‌کنیم. سپس نوع کمان‌ها را در یک درخت فازی، دور فازی، گراف فازی کامل و متمم یک گراف فازی مشخص می‌کنیم. در این فصل با استفاده از الگوریتم ارائه شده در فصل دوم، الگوریتمی برای مشخص کردن نوع کمان‌ها در گراف‌های فازی بیان می‌کنیم.

در فصل چهارم مفهوم درجه‌ی قوی یک رأس را در گراف فازی بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که

---

[۱] Lotfi Asgar Zadeh
[۲] Rosenfeld
[۳] Bhattacharya
[۴] Bhutani
[۵] Mordeson

یک رأس با مینیمم شدت در یک گراف فازی کامل، مینیمم درجه‌ی قوی و یک رأس با ماکزیمم شدت در آن ماکزیمم درجه‌ی قوی دارد. سپس با معرفی یک زنجیر فازی نشان می‌دهیم که تنها یکی از رئوس انتهایی یک زنجیر فازی یک رأس برش فازی است. همچنین در این فصل دو پارامتر جدید برای بررسی همبندی در گراف‌های فازی، یعنی همبندی رأس فازی و همبندی کمان فازی را معرفی می‌کنیم. ارتباط این دو نوع همبندی و مینیمم درجه‌ی قوی گراف‌های فازی را در قضیه‌ای مشابه قضیه ویتنی[۶] که در نظریه‌ی گراف مطرح شده است، مورد بررسی قرار می‌دهیم. در انتهای این فصل ارتباط بین همبندی گراف فازی و متممش را در حالت خاص بیان می‌کنیم.

[۶] Whitney

فصل ۱
مفاهیم و مقدمات اولیه

.

در این فصل ابتدا مفاهیم و تعاریف مربوط به نظریه‌ی زیرمجموعه‌های فازی را ارائه می‌کنیم. سپس به بیان روابط فازی و بررسی ویژگی‌های آن‌ها می‌پردازیم. در بیان این مفاهیم از کتاب‌های گراف‌های فازی و ابرگراف‌های فازی [۸] و نظریه‌ی مجموعه‌های فازی [۱۵] استفاده شده است.

۱.۱ زیرمجموعه‌های فازی

هر مجموعه با یک ویژگی خوش‌تعریف، مشخص می‌شود. اگر یک شیء مفروض دارای آن ویژگی باشد، عضو مجموعه‌ی متناظر است و اگر نباشد، عضو آن نیست. مثلاً اگر مجموعه‌ی مرجع X، مجموعه‌ی اعداد حقیقی فرض شود و P ویژگی «بزرگ تر از 5 بودن» باشد، آنگاه P یک ویژگی خوش‌تعریف است که یک مجموعه مانند A با آن متناظر می‌شود. زیرا برای هر عدد از مجموعه‌ی اعداد حقیقی می‌توان با قاطعیت گفت که آیا آن عدد بزرگتر از 5 است یا خیر و بنابراین عضو A است یا خیر.

حال فرض کنید بخواهیم درباره‌ی آن دسته از اعداد صحبت کنیم که «بزرگ» هستند. در اینجا با ویژگی بزرگ بودن که یک ویژگی ناخوش‌تعریف و مبهم است، سروکار داریم. اینکه چه اعدادی بزرگ هستند و چه اعدادی بزرگ نیستند، بسته به نظر افراد مختلف فرق می‌کند. به عبارت دیگر عضویت یا عدم عضویت اعداد مختلف در خانواده ای با ویژگی «بزرگ بودن» قطعی نیست. مثلاً آیا 100 عددی «بزرگ» است؟ 1000 چطور؟ می‌بینیم که ویژگی بزرگ بودن برای اعداد حقیقی یک ویژگی دقیق و معین نیست و بنابراین نظریه‌ی مجموعه‌های کلاسیک از بیان این مفاهیم و ویژگی‌ها ناتوان است. در قلمرو ریاضیات و نظریه مجموعه‌های کلاسیک جایی برای این مفاهیم نیست

و قالبی برای صورت‌بندی این مفاهیم و ابزاری برای تجزیه و تحلیل آن‌ها وجود ندارد. در واقع نظریه مجموعه‌های فازی یک قالب جدید ریاضی برای صورت‌بندی و تجزیه و تحلیل این مفاهیم و ویژگی‌هاست. این نظریه، یک تعمیم و گسترش طبیعی نظریه مجموعه‌های کلاسیک است، که موافق با زبان و فهم طبیعی انسان‌ها می‌باشد. نظریه‌ی فازی در سال 1965 توسط یک دانشمند ایرانی به نام پروفسور لطفی عسگرزاده در مقاله‌ای تحت عنوان $Fuzzy\ sets$ معرفی گردید. این نظریه از زمان ارائه آن تاکنون، گسترش و تعمیق زیادی یافته به طوری که امروزه تقریباً در تمامی شاخه‌های علمی اعم از علوم مهندسی، علوم انسانی، پزشکی، کشاورزی و ... وارد شده و کاربردهای فراوانی پیدا کرده است. در این بخش قسمتی از تعاریف و مفاهیم اولیه نظریه زیرمجموعه‌های فازی را بیان می‌کنیم.

فرض کنید S یک مجموعه‌ی مرجع دلخواه باشد. تابع مشخصه زیرمجموعه‌ی غیرفازی (قطعی) A از S، یک نگاشت از S به $\{0,1\}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in S \setminus A. \end{cases}$$

حال اگر برد χ_A را از مجموعه‌ی دو عضوی $\{0,1\}$ به بازه‌ی $[0,1]$ گسترش دهیم، اصطلاحاً یک **زیرمجموعه‌ی فازی**[۱] از مجموعه‌ی S (یا به اختصار زیرمجموعه‌ی فازی از S و یا مجموعه‌ی فازی از S) خواهیم داشت که آن را با μ نمایش می‌دهیم. تابع $\mu(x)$ به هر $x \in S$، عددی از بازه‌ی $[0,1]$ نسبت می‌دهد. این تابع را تابع عضویت μ می‌نامند. بنابراین یک زیرمجموعه‌ی فازی از S یک نگاشت $\mu : S \longrightarrow [0,1]$ است، که برای هر $x \in S$، $0 \leq \mu(x) \leq 1$. نزدیکی مقدار $\mu(x)$ به عدد یک نشان دهنده‌ی تعلق بیشتر x به زیرمجموعه‌ی فازی μ است و برعکس، نزدیکی آن به صفر نشان دهنده‌ی تعلق کمتر x به زیرمجموعه‌ی فازی μ می‌باشد. از نظر شهودی $\mu(x)$ را می‌توان درجه‌ی پذیرش ما در قبول x به عنوان عضوی از μ در نظر گرفت. چنانچه x کاملاً عضو μ باشد، $\mu(x) = 1$ و چنانچه x عضو μ نباشد، $\mu(x) = 0$. پس مجموعه‌های غیرفازی (قطعی) و تابع مشخصه آن‌ها، حالت خاصی از مجموعه‌های فازی و تابع عضویت آن‌ها هستند.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید μ یک زیرمجموعه‌ی فازی از مجموعه‌ی S باشد. **محمل** μ[۲]، مجموعه ای غیرفازی (قطعی) است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$supp(\mu) = \{x \in S | \mu(x) > 0\} = S - \{x \in S | \mu(x) = 0\}.$$

[۱] Fuzzy subset
[۲] Support

مثال ۲.۱.۱. فرض کنید $U=\{x\in\mathbb{N}, x\in[65,82]\}$ و A زیرمجموعه‌ای فازی روی U به صورت

$$A=\frac{0}{65}+\frac{0.1}{66}+\frac{0.2}{67}+\frac{0.3}{68}+\frac{0.5}{69}+\frac{0.7}{70}+\frac{0.8}{71}+\frac{0.9}{72}+\frac{1}{73}+\frac{1}{74}+\frac{0.9}{75}+\frac{0.7}{76}+\frac{0.1}{80}+\frac{0}{81}+\frac{0}{82}$$

باشد، بنابراین

$$supp\,(A)=\{66,67,...,80\}=\{x\in U, x\in[66,80]\}.$$

تعریف ۳.۱.۱. اگر محمل زیرمجموعه‌ی فازی μ شامل تنها یک عضو باشد، آنگاه μ را **تک عضوی فازی** [۳]می‌گویند.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید μ یک زیرمجموعه‌ی فازی از S باشد. t-**برش** [۴] زیرمجموعه‌ی فازی μ، برای هر $t\in[0,1]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu^t=\{x\in S|\mu(x)\geq t\}.$$

تعریف ۵.۱.۱. مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های فازی از S، **مجموعه‌ی توانی فازی**[۵] S نامیده و با $\wp(S)$ نشان داده می‌شود.

در سراسر این تحقیق، ما از نماد $\vee$ برای نمایش سوپریمم و از نماد $\wedge$ برای نمایش اینفیمم استفاده می‌کنیم.

تعریف ۶.۱.۱. تابع **ارتفاع** h[۶]، نگاشتی است از $\wp(S)$ به $[0,1]$، به طوری که برای هر زیرمجموعه‌ی فازی $\mu\in\wp(S)$،

$$h(\mu)=\vee\{\mu(x)|x\in S\}.$$

تعریف ۷.۱.۱. زیرمجموعه‌ی فازی μ از S را **نرمال**[۷]گویند، هرگاه ارتفاع زیرمجموعه‌ی فازی μ برابر یک باشد. در غیر این صورت زیرمجموعه‌ی فازی μ را **زیرنرمال**[۸]می‌گویند.

تعریف ۸.۱.۱. اگر برای هر $x\in S$، $\mu(x)=0$، آنگاه زیرمجموعه فازی μ از S را **تهی** می‌گویند.

[۳] Fuzzy singelton
[۴] t-cut
[۵] Fuzzy power set
[۶] Height
[۷] Normal
[۸] Subnormal

تعریف ۹.۱.۱. زیرمجموعه‌ی فازی μ از S را **محدب** گویند، هرگاه μ^t به ازای هر $0 \leq t \leq 1$، محدب باشد. یا به طور معادل می‌توان گفت، μ یک زیرمجموعه‌ی فازی محدب از S است هرگاه

$$\forall x, y \in S,\ \mu(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y), \lambda \in (0,1].$$

در حالت خاص اگر $S = \mathbb{R}$، زیرمجموعه‌ی فازی A از $\mathbb{R}$ را محدب گویند، هرگاه برای هر زوج $a, b \in \mathbb{R}$ که $a < b$ و هر $x \in [a,b]$،

$$A(x) \geq A(a) \wedge A(b).$$

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید μ و ν دو زیرمجموعه‌ی فازی از S باشند. μ زیرمجموعه‌ی ν نامیده می‌شود هرگاه $\forall x \in S, \mu(x) \leq \nu(x)$.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید μ و ν دو زیرمجموعه‌ی فازی از S باشند. μ زیرمجموعه‌ی اکید ν نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x \in S$، $\mu(x) \leq \nu(x)$ و حداقل یک $x \in S$ وجود داشته باشد به طوری که $\mu(x) < \nu(x)$.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنید μ و ν دو زیرمجموعه‌ی فازی از S باشند. μ مساوی ν نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in S$، $\forall x \in S, \mu(x) = \nu(x)$.

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنید μ و ν دو زیرمجموعه‌ی فازی از S باشند، اجتماع این دو زیرمجموعه‌ی فازی، یک زیرمجموعه‌ی فازی از S است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall x \in S,\ (\mu \cup \nu)(x) = \mu(x) \vee \nu(x).$$

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنید μ و ν دو زیرمجموعه‌ی فازی از S باشند، اشتراک این دو زیرمجموعه-ی فازی، یک زیرمجموعه‌ی فازی از S است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall x \in S,\ (\mu \cap \nu)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x).$$

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنید μ یک زیرمجموعه‌ی فازی از S باشد، متمم این زیرمجموعه‌ی فازی، یک زیرمجموعه‌ی فازی از S است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall x \in S,\ \mu^c(x) = 1 - \mu(x).$$

تعریف ۱۶.۱.۱. اگر $\Re$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های فازی S باشد، در این صورت اشتراک این خانواده از زیرمجموعه‌های فازی، یک زیرمجموعه‌ی فازی از S است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall x \in S, (\bigcap_{\zeta \in \Re} \zeta)(x) = \wedge\{\zeta(x) | \zeta \in \Re\}.$$

تعریف ۱۷.۱.۱. اگر $\Re$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های فازی S باشد، اجتماع این خانواده از زیرمجموعه‌های فازی، یک زیرمجموعه‌ی فازی از S است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall x \in S, (\bigcup_{\zeta \in \Re} \zeta)(x) = \vee\{\zeta(x) | \zeta \in \Re\}.$$

قضیه ۱۸.۱.۱. *فرض کنیم μ و ν و ξ زیرمجموعه‌های فازی از S باشند. در این صورت ویژگی‌های زیر برقرارند:*

1. $\mu \cup \nu = \nu \cup \mu$	2. $\mu \cap \nu = \nu \cap \mu$
3. $\mu \cup \chi_\emptyset = \mu$	4. $\mu \cap \chi_\emptyset = \chi_\emptyset$
5. $\mu \cup \chi_s = \chi_s$	6. $\mu \cap \chi_s = \mu$
7. $\mu \cup \mu = \mu$	8. $\mu \cap \mu = \mu$
9. $\mu \cup (\nu \cup \xi) = (\mu \cup \nu) \cup \xi$	10. $\mu \cap (\nu \cap \xi) = (\mu \cap \nu) \cap \xi$
11.$\mu \cap (\nu \cup \xi) = (\mu \cap \nu) \cup (\mu \cap \xi)$	12. $\mu \cup (\nu \cap \xi) = (\mu \cup \nu) \cap (\mu \cup \xi)$
13. $(\mu \cup \nu)^c = \mu^c \cap \nu^c$	14.$(\mu \cap \nu)^c = \mu^c \cup \nu^c$
15. $(\mu^c)^c = \mu$	

برهان. 9. طبق تعریف اجتماع زیرمجموعه‌های فازی، برای هر $x \in S$،

$$\begin{aligned}(\mu \cup (\nu \cup \xi))(x) &= \mu(x) \vee (\nu(x) \vee \xi(x)) \\ &= (\mu(x) \vee \nu(x)) \vee \xi(x) \\ &= ((\mu \cup \nu) \cup \xi)(x).\end{aligned}$$

11. شش حالت ممکن است رخ دهد:

$a.\ \mu(x) \leq \nu(x) \leq \xi(x)$

$b.\ \mu(x) \leq \xi(x) \leq \nu(x)$

$c.\ \nu(x) \leq \mu(x) \leq \xi(x)$

$d.\ \nu(x) \leq \xi(x) \leq \mu(x)$

$e.\ \xi(x) \leq \mu(x) \leq \nu(x)$

$f.\ \xi(x) \leq \nu(x) \leq \mu(x)$

در همه‌ی حالت‌های بالا تساوی $\mu \cap (\nu \cup \xi) = (\mu \cap \nu) \cup (\mu \cap \xi)$ برقرار است.

13. با استفاده از تعریف مکمل و اجتماع زیرمجموعه‌ی فازی برای هر $x \in S$،

$$\begin{aligned}(\mu \cup \nu)^c(x) &= 1 - (\mu(x) \vee \nu(x)) \\ &= (1 - \mu(x)) \wedge (1 - \nu(x)) \\ &= \mu^c(x) \wedge \nu^c(x) \\ &= (\mu^c \cap \nu^c)(x).\end{aligned}$$

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنید S و T دو مجموعه‌ی غیرفازی و μ و ν به ترتیب زیرمجموعه‌های فازی از S و T باشند. **رابطه‌ی فازی**[۹] ρ از زیرمجموعه‌ی فازی μ به زیرمجموعه‌ی فازی ν، یک زیرمجموعه‌ی فازی از $S \times T$ است به طوری که برای هر $x \in S$ و هر $y \in T$ داریم: $\rho(x,y) \leq \mu(x) \wedge \nu(y)$.

سه حالت خاص روابط فازی که در این تحقیق بیشتر استفاده می‌شود به صورت زیر است:

1. اگر $S = T$ و $\mu = \nu$، در این حالت ρ را یک رابطه‌ی فازی روی زیرمجموعه‌ی فازی μ می‌نامند.
2. اگر برای هر $x \in S$، $\mu(x) = 1$ و برای هر $y \in T$، $\nu(y) = 1$، در این حالت ρ یک رابطه‌ی فازی از S به T نامیده می‌شود.
3. اگر $S = T$ و برای هر $x \in S$، $\mu(x) = 1$ و برای هر $y \in T$، $\nu(y) = 1$، در این حالت ρ را یک رابطه‌ی فازی روی S می‌نامند.

تعریف ۲۰.۱.۱. فرض کنید ρ یک رابطه‌ی فازی روی زیرمجموعه‌فازی μ از S باشد، در این صورت ρ را **قوی‌ترین رابطه‌ی فازی**[۱۰] روی زیرمجموعه‌ی فازی μ می‌نامند، هرگاه برای هر رابطه‌ی فازی ϖ روی زیرمجموعه‌ی فازی μ و به ازای هر $x, y \in S$، $\varpi(x,y) \leq \rho(x,y)$.

تعریف ۲۱.۱.۱. برای یک زیرمجموعه‌ی فازی ρ از $S \times S$، **ضعیف‌ترین زیرمجموعه‌ی فازی**[۱۱] μ از S برای هر $x \in S$ به صورت $\mu_\rho^w(x) = \vee\{\rho(x,y) \vee \rho(y,x) | y \in S\}$ تعریف می‌شود، یعنی اگر ν یک زیرمجموعه‌ی فازی از S و ρ یک رابطه‌ی فازی روی ν باشد، آنگاه $\mu_\rho^w \subseteq \nu$.

در تعریف فوق واضح است که ρ یک رابطه‌ی فازی روی μ است.

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنید $\rho : S \times T \longrightarrow [0,1]$ یک رابطه‌ی فازی از زیرمجموعه‌ی فازی μ از S به زیرمجموعه‌ی فازی ν از T و $\varpi : T \times U \longrightarrow [0,1]$ یک رابطه‌ی فازی از زیرمجموعه‌ی

[۹] Fuzzy relation
[۱۰] Strongest fuzzy relation
[۱۱] Weakest fuzzy relation

فازی ν از T به زیرمجموعه‌ی فازی ξ از U باشد، در این صورت برای هر $x \in S$ و $z \in U$، ترکیب ρ و ϖ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho \circ \varpi : S \times U \longrightarrow [0,1]$$

$$\rho \circ \varpi(x,z) = \vee\{\rho(x,y) \wedge \varpi(y,z) | y \in T\}.$$

گزاره ۲۳.۱.۱. *با مفروض بودن ρ، μ، ϖ و ν به صورت تعریف ۲۲.۱.۱، $\rho \circ \varpi$ یک رابطه فازی از μ به ξ است.*

برهان. فرض کنید $x \in S$، $y \in T$ و $z \in U$. باتوجه به اینکه ρ و ϖ روابط فازی هستند لذا $\rho(x,y) \leq \mu(x) \wedge \nu(y)$ و $\varpi(y,z) \leq \nu(y) \wedge \xi(z)$. بنابراین

$$\rho(x,y) \wedge \varpi(y,z) \leq \mu(x) \wedge \nu(y) \wedge \xi(z)$$

و این ثابت می‌کند که $\rho \circ \varpi(x,z) = \vee\{\rho(x,y) \wedge \varpi(y,z) | y \in T\} \leq \mu(x) \wedge \xi(z)$. □

یک رابطه‌ی فازی را می‌توان به صورت یک ماتریس نمایش داد و به وسیله‌ی آن ویژگی‌های یک رابطه‌ی فازی را شرح داد. از دیدگاه دیگر اگر $\vee$ را با جمع و $\wedge$ را با ضرب جایگزین کنیم، عمل ترکیب دو رابطه‌ی فازی به ضرب ماتریس‌ها تبدیل خواهد شد.
در سراسر این تحقیق از نماد $\rho^{(2)}$ برای نمایش $\rho \circ \rho$ و از نماد $\rho^{(k)}$ به طور استقرایی برای نمایش $\rho^{(k-1)} \circ \rho$ که $k > 1$، استفاده می‌کنیم.
همچنین برای هر $x, y \in S$ تعریف می‌کنیم:

$$\rho^{\infty}(x,y) = \vee\{\rho^{(k)}(x,y) | k = 1, 2, ...\}$$

و

$$\rho^{(0)}(x,y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ \mu(x) & x = y. \end{cases}$$

تعریف ۲۴.۱.۱. متمم رابطه‌ی فازی ρ روی زیرمجموعه‌ی فازی μ از S، یک رابطه‌ی فازی روی μ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall x, y \in S, \rho^{c}(x,y) = 1 - \rho(x,y).$$

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنید $\rho : S \times T \longrightarrow [0,1]$ یک رابطه‌ی فازی روی زیرمجموعه‌ی فازی μ از S به زیرمجموعه‌ی فازی ν از T باشد. معکوس این رابطه‌ی فازی از زیرمجموعه‌ی فازی ν به زیرمجموعه‌ی فازی μ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho^{-1} : T \times S \longrightarrow [0,1]$$

$$\forall (y,x) \in T \times S, \rho^{-1}(y,x) = \rho(x,y).$$

قضیه ۲۶.۱.۱. *فرض کنید τ، π، ρ و ϖ روابط فازی روی زیرمجموعه‌ی فازی μ از مجموعه‌ی S باشند. ویژگی‌های زیر برقرارند:*

1. $\rho \cup \varpi = \varpi \cup \rho$
2. $\rho \cap \varpi = \varpi \cap \rho$
3. $\rho = (\rho^c)^c$
4. $\pi \cup (\rho \cup \varpi) = (\pi \cup \rho) \cup \varpi$
5. $\pi \cap (\rho \cap \varpi) = (\pi \cap \rho) \cap \varpi$
6. $\pi \circ (\rho \circ \varpi) = (\pi \circ \rho) \circ \varpi$
7. $\pi \cap (\rho \cup \varpi) = (\pi \cap \rho) \cup (\pi \cap \varpi)$
8. $\pi \cup (\rho \cap \varpi) = (\pi \cup \rho) \cap (\pi \cup \varpi)$
9. $(\rho \cup \varpi)^c = \varpi^c \cap \rho^c$
10. $(\rho \cap \varpi)^c = \varpi^c \cup \rho^c$
11. $\forall t \in [0,1], (\rho \cup \varpi)^t = \rho^t \cup \varpi^t$
12. $\forall t \in [0,1], (\rho \cap \varpi)^t = \rho^t \cap \varpi^t$
13. $\forall t \in [0,1], \rho^t \circ \varpi^t \subseteq (\rho \circ \varpi)^t$.
14. *اگر $\rho \subseteq \tau$ و $\varpi \subseteq \pi$، آنگاه $\rho \cup \varpi \subseteq \tau \cup \pi$.*
15. *اگر $\rho \subseteq \tau$ و $\varpi \subseteq \pi$، آنگاه $\rho \cap \varpi \subseteq \tau \cap \pi$.*
16. *اگر $\rho \subseteq \tau$ و $\varpi \subseteq \pi$، آنگاه $\rho \circ \varpi \subseteq \tau \circ \pi$.*

برهان. 1.

$$(\rho \cup \varpi)(x,y) = \rho(x,y) \vee \varpi(x,y) = \varpi(x,y) \vee \rho(x,y) = (\varpi \cup \rho)(x,y).$$

4. طبق تعریف اجتماع زیرمجموعه‌های فازی برای هر $x, y \in S$،

$$\begin{aligned}(\pi \cup (\rho \cup \varpi))(x,y) &= \pi(x,y) \vee (\rho \cup \varpi)(x,y) \\ &= \pi(x,y) \vee (\rho(x,y) \vee \varpi(x,y)) \\ &= (\pi(x,y) \vee \rho(x,y)) \vee \varpi(x,y) \\ &= ((\pi \cup \rho) \cup \varpi)(x,y).\end{aligned}$$

7. شش حالت ممکن است رخ دهد:

$a.\ \pi(x,y) \leq \rho(x,y) \leq \varpi(x,y)$

$b.\ \pi(x,y) \leq \varpi(x,y) \leq \rho(x,y)$

$c.\ \rho(x,y) \leq \pi(x,y) \leq \varpi(x,y)$

$d.\ \rho(x,y) \leq \varpi(x,y) \leq \pi(x,y)$

$e.\ \varpi(x,y) \leq \pi(x,y) \leq \rho(x,y)$

$f.\ \varpi(x,y) \leq \rho(x,y) \leq \pi(x,y)$

در همه‌ی حالت‌های بالا تساوی $\pi \cap (\rho \cup \varpi) = (\pi \cap \rho) \cup (\pi \cap \varpi)$ برقرار است.

9. فرض کنید $(x,y) \in (\rho \cup \varpi)^c$ در این صورت طبق تعریف اجتماع و متمم زیرمجموعه‌های