بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه سیستان و بلوچستان
تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی و گرایش آنالیز

عنوان:

نامساوی های نرمی وزن دار

استاد راهنما :

دکتر رحمت ا...لشکری پور

تحقیق و نگارش:

پروین نکوفرد

بهمن ۱۳۸۶

بسمه تعالی

این پایان نامه با عنوان نامساوی های نرمی وزن دار قسمتی از برنامه آموزشی دوره کارشناسی ارشد ریاضی توسط دانشجو پروین نکوفرد تحت راهنمایی استاد پایان نامه دکتر رحمت ا...لشکری پور تهیه شده است. استفاده از مطالب آن به منظور اهداف آموزشی با ذکر مرجع و اطلاع کتبی به حوزه تحصیلات تکمیلی دانشگاه سیستان و بلوچستان مجاز می باشد.

پروین نکوفرد

این پایان نامه ...... واحد درسی شناخته می شود و در تاریخ ۸۶/۱۱/۶ .. توسط هیئت داوران بررسی و درجه عالی ... به آن تعلق گرفت.

	نام و نام خانوادگی	امضاء	تاریخ
استاد راهنما:	دکتررحمت ا... لشکری پور		
استاد راهنما:			
استاد مشاور:			
داور ۱:	دکتر علیرضا سهیلی		
داور ۲:	دکتر غلامرضا رضایی		
نماینده تحصیلات تکمیلی:	دکتر اکبر گلچین		

دانشگاه سیستان و بلوچستان

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب پروین نکوفرد تأیید می کنم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و به دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این نوشته از آن استفاده شده است مطابق مقررات ارجاع گردیده است. این پایان نامه پیش از این برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه سیستان و بلوچستان می باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو: پروین نکوفرد

امضاء

تقدیم به

پسر خوبم

امیر رضا

سپاسگزاری

منت و سپاس شایسته پروردگاری است که بشر را قدرت تفکر و تحصیل علم بخشید. خداوندی که در سایه رحمت بی پایانش توانستم گامی دیگر در عرصه زندگی بردارم و وجود خویش را به زینت علم بیارایم. باشد که شاکر باشم، و ستایش هم او را که، تجلی وجودش در سه گوهر تابان زندگیم براستی ستودنی است، پدر و مادر و همسری که دستانشان جایگاه هزاران بوسه است و با تشکر از سایر اعضا خانواده که هر کدام به نحوی مشوق و زمینه ساز تحصیل من بوده اند. امیدوارم با یاری حق تعالی آنچه را فرا گرفته ام، در راه رضای او و پیشرفت جامعه به کار گیرم .

پیمودن این راه میسر نمی شد مگر با یاد خدا و راهنمایی های استاد گرامی، جناب آقای دکتر رحمت الله لشکری پور که با متانت و خلق و خوی نیکو مرا یاری نمودند.

بر خود لازم می دانم از زحمات بی دریغ استاد عالی قدر زنده یاد پرفسور پرویز عظیمی به خاطر آنچه به من آموخت تشکر و قدردانی کنم، روحش قرین رحمت حق باد. همچنین از اساتید گرامی جناب آقایان دکتر غلامرضا رضایی و دکتر علیرضا سهیلی که به عنوان داور زحمات فراوانی را متحمل شدند و همینطور از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر اکبر گلچین تشکر و قدردانی می نمایم و از خداوند متعال برای این عزیزان، آرزوی طول عمر با عزت و توفیق روز افزون دارم.

چکیده:

در این پایان نامه، نامساوی های نرمی وزن دار اکید روی فضاهای ML^p_ω برای عملگرهای لیتلوود – پالی و کالدرون – زیگموند بر حسب $\|\omega\|_{A_p}$ برای $1<p<\infty$، ارائه شده است.

کلمات کلیدی: تخمین های وزن دار اکید – تابع ماکسیمال اکیداً موضعی – عملگرهای لیتلوود – پالی و کالدرون – زیگموند.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱ — ۱ مقدمه

در این فصل تعاریف و مفاهیم اساسی مورد نیاز جبر خطی و آنالیز را بیان می‌کنیم. بخش دوم را به تعریف فضاهای اندازه و سپس توابع اندازه‌پذیر و انتگرال‌پذیر اختصاص داده‌ایم. در بخش سوم، ابتدا یک تابع موضعاً انتگرال‌پذیر و به دنبال آن وزن‌ها را تعریف می‌کنیم. سپس فضاهای نرم‌دار L^p و L^p_w را برای $1 < p < \infty$ و L^∞ را معرفی می‌کنیم و چند نامساوی مفید را یادآوری می‌نماییم. در بخش چهارم، توجه خود را به ردهٔ خاص و مهمی از وزن‌ها معطوف می‌کنیم که آن را با نماد A_p نمایش خواهیم داد و دلیل اهمیت این فضا را بیان خواهیم کرد. پس از آن به معرفی عملگر ماکسیمال هاردی ـ لیتلوود[1] می‌پردازیم، که در تعریف فضای نرم‌دار ML^p_w نقش اساسی‌ای را ایفا می‌کند.

۱ — ۲ اندازه‌ها، توابع اندازه‌پذیر و انتگرال‌پذیر

در ابتدا در مورد خانواده‌هایی از مجموعه‌ها بحث می‌کنیم که به عنوان دامنهٔ اندازه‌ها به کار می‌روند.

تعریف ۱.۲.۱: فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد. یک جبر از مجموعه‌ها روی X، گردایه‌ای ناتهی چون $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های X است که تحت اجتماع متناهی و متمم‌گیری بسته است. به عبارت دیگر، اگر $E_1, ..., E_n \in \mathcal{A}$، آنگاه $\cup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{A}$ و اگر $E \in \mathcal{A}$، آنگاه $E^c \in \mathcal{A}$.

تعریف ۲.۲.۱: یک σ ـ جبر، جبری است که تحت اجتماع شمارش‌پذیر بسته است.

چنانچه X مجموعه‌ای دلخواه باشد، $\{\phi, X\}$ و $P(X)$ جبرهایی روی X هستند.

تعریف ۳.۲.۱: گردایهٔ $\mathcal{C}$ از زیر مجموعه‌های X را یک خانوادهٔ مقدماتی گوییم، هر گاه

(۱) $\phi \in \mathcal{C}$؛

(۲) اگر $E, F \in \mathcal{C}$، آنگاه $E \cap F \in \mathcal{C}$؛

(۳) اگر $E \in \mathcal{C}$، آنگاه E^c اجتماع متناهی مجزایی از اعضای $\mathcal{C}$ باشد.

---

[1] $Hardy - Littlewood$

آنگاه $\mathcal{M}^*$ یک σ ـ جبر است و اگر $\bar{\mu}$ روی $\mathcal{M}^*$ با ضابطه $\bar{\mu}(E) = \mu(A)$ تعریف شود، $\bar{\mu}$ یک اندازه روی $\mathcal{M}^*$ است.

فضای اندازه $(X, \mathcal{M}^*, \bar{\mu})$ را تکمیل شده $(X, \mathcal{M}, \mu)$ می‌نامند.

برهان: چون $X \in \mathcal{M}$، پس $X \in \mathcal{M}^*$. اگر $A \subseteq E \subseteq B$ و $\mu(B \setminus A) = 0$، آنگاه $B^c \subseteq E^c \subseteq A^c$، $A^c \setminus B^c = B \setminus A$ و $\mu(A^c \setminus B^c) = 0$.

اگر $A_i \subseteq E_i \subseteq B_i$، $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$، $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ و $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$، آنگاه

$$B \setminus A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i \setminus A_i), \qquad \mu(B \setminus A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i \setminus A_i).$$

پس $\mu(B \setminus A) = 0$. حال نشان می‌دهیم $\bar{\mu}$ خوش تعریف است. فرض کنید $A \subseteq E \subseteq B$ و $A_1 \subseteq E \subseteq B_1$ به طوری که $\mu(B \setminus A) = 0$ و $\mu(B_1 \setminus A_1) = 0$. آنگاه

$$A \setminus A_1 \subseteq E \setminus A_1 \subseteq B \setminus A_1, \qquad A_1 \setminus A \subseteq E \setminus A \subseteq B_1 \setminus A.$$

بنابراین $\mu(A \setminus A_1) = \mu(A_1 \setminus A) = 0$. لذا $\mu(A) = \mu(A_1)$.

بررسی سایر خواص $\bar{\mu}$ بدیهی است.$\square$

تعریف ۹.۲.۱: فرض کنید $\mathcal{E} = \{[a, b) \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}$ و $\mathcal{B}$، σ ـ جبر تولید شده به وسیله $\mathcal{E}$ باشد. اعضای $\mathcal{B}$ را مجموعه برل می‌نامند.

تابع m را روی $\mathcal{E}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$m([a, b)) = b - a.$$

فضای $(\mathbb{R}, \ \mathcal{L}, \bar{m})$ را که تکمیل شده $(\mathbb{R}, \ \mathcal{B}, m)$ است، فضای اندازه لبگ و هر عضو $\mathcal{L}$ را یک مجموعه اندازه‌پذیر(لبگ) می‌نامیم. معمولاً به جای $\bar{m}$ همان m را به کار می‌بریم.

تعریف ۱۰.۲.۱: اگر $(X, \ \mathcal{S})$ یک فضای اندازه‌پذیر و f تابع حقیقی توسعه‌یافته باشد، آنگاه تابع f اندازه‌پذیر است هرگاه برای هر α داشته باشیم $\{x : \ f(x) \leq \alpha\} \in \ \mathcal{S}$.

تعریف ۱۱.۲.۱: تابع f را ساده می‌نامیم، در صورتی که تعداد متناهی از مجموعه‌های دو به دو مجزا و اندازه‌پذیر مانند $E_1, ..., E_n$ و تعداد متناهی اعداد حقیقی مانند $\alpha_1, ..., \alpha_n$ موجود باشد، به قسمی که

$$(1 \leq i \leq n \ , \ x \in E_i) \ f(x) = \alpha_i \quad , \quad X = \bigcup_{i=1}^{n} E_i.$$

به عبارت دیگر

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x).$$

تعریف ۱۲.۲.۱: اگر $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ یک تابع ساده باشد، آنگاه انتگرال f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i).$$

قضیه ۱۳.۲.۱: اگر f یک تابع غیر منفی و اندازه‌پذیر باشد، آنگاه دنباله‌ای صعودی از توابع نامنفی ساده مانند $\{f_n\}$ موجود است به طوری که برای هر $x \in X$ ؛ $f_n(x) \longrightarrow f(x)$.

برهان: به [۳۲] مراجعه شود.□

تعریف ۱۴.۲.۱: اگر f تابعی اندازه‌پذیر و غیرمنفی و $\{f_n\}$ دنباله‌ای صعودی از توابع نامنفی ساده باشد به قسمی که به ازای هر x

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

آنگاه $\int_X f d\mu$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

تعریف ۱۵.۲.۱: اگر f یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی باشد، f را انتگرال‌پذیر گوییم هرگاه $\int_X f d\mu < \infty$.

تعریف ۱۶.۲.۱: فرض کنید f یک تابع اندازه‌پذیر دلخواه باشد. تعریف می‌کنیم

$$f^+ = \max(f, 0),$$

$$f^- = \max(-f, 0).$$

در این صورت داریم

$$|f| = f^+ + f^-,$$

$$f = f^+ - f^-.$$

به سادگی دیده می‌شود که f^+ و f^- توابعی نامنفی و اندازه‌پذیرند.

تعریف ۱۷.۲.۱: فرض کنید f یک تابع اندازه‌پذیر باشد. تابع f انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر f^+ و f^- انتگرال‌پذیر باشند و

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

اکنون مقدماتی فراهم می‌کنیم تا بتوانیم فضاهای اندازهٔ ضربی را تعریف کنیم. سپس با مورد توجه قرار دادن انتگرال لبگ روی $\mathbb{R}$ و تعمیم آن به $\mathbb{R}^n$، انتگرال‌گیری روی فضاهای n بعدی را تعریف خواهیم کرد.

تعریف ۱۸.۲.۱: یک اندازه خارجی روی مجموعه‌ای ناتهی مانند X تابعی مانند $\mu^* : P(X) \to [0, \infty]$ است که در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $\mu^*(\phi) = 0$،

(۲) اگر $A \subseteq B$، آنگاه $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$،

(۳) $\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j)$.

رایج‌ترین روش برای به دست آوردن اندازه‌های خارجی، شروع با خانواده‌ای چون $\mathcal{E}$ از مجموعه‌های مقدماتی است که مفهومی از اندازه روی آنها تعریف شود و سپس تقریب زدن مجموعه‌های دلخواه از بیرون با اجتماع شمارش‌پذیری از اعضای $\mathcal{E}$ است.

گزاره ۱۹.۲.۱: فرض کنید $\mathcal{E} \subseteq P(X)$ و $\rho : \mathcal{E} \longrightarrow [0, \infty]$ به گونه‌ای باشد که $\phi \in \mathcal{E}$، $X \in \mathcal{E}$ و $\rho(\phi) = 0$. به ازای هر $A \subseteq X$ تعریف کنید:

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{1}^{\infty} \rho(E_j) \ : \ E_j \in \mathcal{E}, A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\}.$$

در این صورت μ^* یک اندازه خارجی است.

برهان: برای هر $A \subseteq X$ دنباله‌ای چون $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}$ وجود دارد به طوری که $A \subseteq \bigcup_{1}^{\infty} Ej$ (به ازای هر j فرض کنید $E_j = X$). لذا تعریف μ^* با معنی است. به وضوح $\mu^*(\phi) = 0$ (به ازای هر j فرض کنید $E_j = \phi$.)، و به ازای هر $A \subseteq B$ داریم $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$، زیرا در تعریف $\mu^*(A)$ مجموعه‌ای که روی آن اینفیمم گرفته می‌شود شامل مجموعهٔ متناظر در تعریف $\mu^*(B)$ است. برای اثبات زیرجمعی شمارش‌پذیر بودن، فرض کنید $\{A_j\}_{1}^{\infty} \subseteq P(X)$ و $\varepsilon > 0$. برای هر j دنباله‌ای مانند $\{E_j^k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}$ وجود دارد به طوری که $A_j \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} E_j^k$ و

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho(E_j^k) \leq \mu^*(A_j) + 2^{-j}\varepsilon.$$

اگر $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$، داریم $A \subseteq \bigcup_{j,k=1}^{\infty} E_j^k$ و

$$\sum_{j,k}^{\infty} \rho(E_j^k) \leq \sum_{j} \mu^*(A_j) + \varepsilon.$$

لذا

$$\mu^*(A) \le \sum_j \mu^*(A_j) + \varepsilon.$$

چون ε دلخواه است، حکم برقرار است.$\square$

مرحلهٔ اساسی که منجر به رسیدن به اندازه از اندازهٔ خارجی می‌شود به صورت زیر است: چنانچه μ^* یک اندازهٔ خارجی روی X باشد، مجموعه‌ای چون $A \subseteq X$، μ^* ـ اندازه‌پذیر نامیده می‌شود هر گاه به ازای هر $E \subseteq X$ داشته باشیم:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

البته، نامساوی

$$\mu^*(E) \le \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

برای هر A و E برقرار است، لذا برای اثبات μ^* ـ اندازه‌پذیری A، کافی است عکس نامساوی را ثابت کنیم.

قضیه ۲۰.۲.۱ (کاراتئودری[۲]): اگر μ^* یک اندازهٔ خارجی روی X باشد، گردایهٔ $\mathcal{M}$ مرکب از مجموعه‌های μ^* ـ اندازه‌پذیر یک σ ـ جبر است و تحدید μ^* به $\mathcal{M}$ یک اندازهٔ کامل است.

برهان: نخست ملاحظه می‌کنیم که $\mathcal{M}$ تحت متمم‌گیری بسته است، زیرا تعریف μ^* ـ اندازه‌پذیری A نسبت به A و A^c متقارن است. اکنون اگر $A, B \in \mathcal{M}$ و $E \subseteq X$، آنگاه

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \\
&= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c).
\end{aligned}$$

اما $(A \cup B) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$، لذا بنابر زیر جمعی بودن

$$\mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) \ge \mu^*(E \cap (A \cup B)).$$

در نتیجه

$$\mu^*(E) \ge \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c).$$

لذا $A \cup B \in \mathcal{M}$. پس $\mathcal{M}$ یک جبر است. به‌علاوه، اگر $A, B \in \mathcal{M}$ و $A \cap B = \phi$، آنگاه

$$\begin{aligned}
\mu^*(A \cup B) &= \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A^c) \\
&= \mu^*(A) + \mu^*(B).
\end{aligned}$$

بنابراین μ^* روی $\mathcal{M}$ جمعی متناهی است.

برای نشان دادن اینکه $\mathcal{M}$ یک σ ـ جبر است، کافی است نشان دهیم $\mathcal{M}$ تحت اجتماع مجزای شمارا

---

[۲] Caratheodory

بسته است. اگر $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزای واقع در $\mathcal{M}$ باشد، قرار دهید $B_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ و $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. در این صورت به ازای هر $E \subseteq X$ داریم

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap B_n) &= \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) \\ &= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}), \end{aligned}$$

یک استقرای ساده نشان می‌دهد که $\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E \cap A_j)$. بنابراین

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geq \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B^c),$$

و با فرض $n \longrightarrow \infty$ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B^c) \\ &\geq \mu^*(\bigcup_{1}^{\infty}(E \cap A_j)) + \mu^*(E \cap B^c). \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*(E).$$

بنابراین، در آخرین استنتاج همهٔ نامساوی‌ها تساوی هستند. در نتیجه $B \in \mathcal{M}$ و با گرفتن $E = B$، $\mu^*(B) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A_j)$، لذا μ^* روی $\mathcal{M}$ شمارش‌پذیر جمعی است. بالاخره، چنانچه به ازای هر $E \subseteq X$ داشته باشیم $\mu^*(A) = 0$، آنگاه

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E),$$

و لذا $A \in \mathcal{M}$. بنابراین $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ یک اندازه کامل است.□

تعریف ۲۱.۲.۱: اگر $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ یک جبر باشد، تابعی چون $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ را یک پیش‌اندازه خواهیم نامید، در صورتی که

(۱) $\mu_0(\phi) = 0$،

(۲) اگر $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزا در $\mathcal{A}$ باشدکه $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$، آنگاه

$$\mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j).$$

چنانچه μ_0 پیش‌اندازه‌ای روی $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ باشد از گزارهٔ ۱۹.۲.۱ معلوم می‌شود که μ_0 یک اندازهٔ خارجی

روی X القا می‌کند که عبارت است از:

$$\mu^*(E)=\inf\{\sum_{1}^{\infty}\mu_0(A_j)\ :\ A_j\in \mathcal{A}\ ,\ E\subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\}. \qquad (2-1)$$

گزاره ۲۲.۲.۱: اگر μ_0 یک پیش‌اندازه روی $\mathcal{A}$ باشد و μ^* با (۱−۲) تعریف شود، آنگاه

الف) $\mu^*|_{\mathcal{A}}=\mu_0$؛

ب) هر مجموعه در $\mathcal{A}$، μ^* − اندازه‌پذیر است.

برهان: به [۳۲] مراجعه شود.□

قضیه ۲۳.۲.۱: فرض کنید $\mathcal{A}\subseteq P(X)$ یک جبر، μ_0 یک پیش‌اندازه روی $\mathcal{A}$ و $\mathcal{M}$، σ ـ جبر تولید شده به وسیلهٔ $\mathcal{A}$ باشد. اندازه‌ای چون μ روی $\mathcal{M}$ موجود است که تحدیدش به $\mathcal{A}$، μ_0 می‌باشد، یعنی $\mu=\mu^*|_{\mathcal{M}}$ که در آن μ^* به وسیلهٔ (۱−۲) تعریف می‌شود. اگر ν اندازهٔ دیگری روی $\mathcal{M}$ باشد که μ_0 را توسیع دهد، آنگاه به ازای هر $E\in\mathcal{M}$، $\nu(E)\leq\mu(E)$، و مساوی است وقتی $\mu(E)<\infty$. اگر μ_0، σ ـ متناهی باشد، آنگاه اندازه μ توسیع یکتایی از μ_0 روی $\mathcal{M}$ است.

برهان: حکم نخست از قضیهٔ کاراتئودری و گزارهٔ ۲۲.۲.۱ حاصل می‌شود، زیرا σ ـ جبر مجموعه‌های μ^* ـ اندازه‌پذیر شامل $\mathcal{A}$ و در نتیجه شامل $\mathcal{M}$ است. در مورد حکم دوم، اگر $E\in\mathcal{M}$ و $E\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j$ که در آن $A_j\in\mathcal{A}$، آنگاه

$$\nu(E)\leq\sum_{j=1}^{\infty}\nu(A_j)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu_0(A_j),$$

که از آنجا $\nu(E)\leq\mu(E)$ به دست می‌آید. همچنین اگر قرار دهید $A=\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j$، آنگاه

$$\nu(A)=\lim_{n\to\infty}\nu(\bigcup_{j=1}^{n}A_j)=\lim_{n\to\infty}\mu(\bigcup_{j=1}^{n}A_j)=\mu(A).$$

چنانچه $\mu(E)<\infty$، می‌توانیم A_j ها را طوری انتخاب کنیم که $\mu(A)<\mu(E)+\varepsilon$ و بنابراین $\mu(A\setminus E)<\varepsilon$ و

$$\mu(E)\leq\mu(A)=\nu(A)=\nu(E)+\nu(A\setminus E)\leq\nu(E)+\mu(A\setminus E)\nu(E)+\varepsilon.$$

چون ε دلخواه است، $\mu(E)=\nu(E)$. بالاخره، فرض کنید $X=\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j$ و $\mu_0(A_j)<\infty$ که در آن می‌توان A_j ها را مجزا فرض کرد. در این صورت به ازای هر $E\in\mathcal{M}$ داریم

$$\mu(E)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(E\cap A_j)=\sum_{j=1}^{\infty}\nu(E\cap A_j)=\nu(E).$$

پس $\nu=\mu$.□

۲۴.۲.۱ اندازه‌های حاصلضربی

فرض کنید $(X, \mathcal{M}, \mu)$ و $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ دو فضای اندازه باشند. σ ـ جبر حاصلضربی $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ روی $X \times Y$ را در نظر می‌گیریم. اکنون یک اندازه روی $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ می‌سازیم، یعنی به مفهومی روشن، حاصلضرب μ و ν را می‌سازیم.

برای آغاز کار، یک مستطیل (اندازه‌پذیر) را مجموعه‌ای به شکل $A \times B$ تعریف می‌کنیم که در آن $A \in \mathcal{M}$ و $B \in \mathcal{N}$. به وضوح

$$(A \times B) \cap (E \times F) = (A \cap E) \times (B \cap F) \quad , \quad (A \times B)^c = (X \times B^c) \cup (A^c \times B).$$

از این رو، طبق گزارهٔ ۴.۲.۱، گردایهٔ Λ مرکب از اجتماع‌های متناهی از مستطیل‌ها، یک σ ـ جبر است، و مسلماً این σ ـ جبری که Λ تولید می‌کند $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ است. فرض کنید $A \times B$ مستطیلی باشد که اجتماع (شمارش‌پذیر یا متناهی) مجزایی از مستطیل‌هایی چون $A_j \times B_j$ است. در این صورت به ازای هر $x \in X$ و $y \in Y$،

$$\begin{aligned}\chi_A(x)\chi_B(y) &= \chi_{A\times B}(x,y) = \sum \chi_{A_j \times B_j}(x,y) \\ &= \sum \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y).\end{aligned}$$

چنانچه نسبت به x انتگرال بگیریم به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\mu(A)\chi_B(y) &= \int \chi_A(x)\chi_B(y)d\mu(x) = \sum \int \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y)d\mu(x) \\ &= \sum \mu(A_j)\chi_{B_j}(y).\end{aligned}$$

به همین روش از انتگرال‌گیری نسبت به y داریم

$$\mu(A)\nu(B) = \sum \mu(A_j)\nu(B_j).$$

پس اگر $E \in \Lambda$ اجتماعی مجزا از مستطیل‌هایی چون $A_n \times B_n, ..., A_1 \times B_1$ باشد و قرار دهیم:

$$\pi(E) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)\nu(E_j).$$

آنگاه π پیش‌اندازه‌ای روی Λ است. بنابراین، بنابه قضیهٔ ۲۳.۲.۱، π یک اندازهٔ خارجی روی $X \times Y$ تولید می‌کند که تحدید آن به $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ اندازه‌ای است که π را توسیع می‌دهد. این اندازه را ضرب μ و ν نامیده و آن را با $\mu \times \nu$ نشان می‌دهیم. به‌علاوه، اگر μ و ν هر دو σ ـ متناهی باشند؛ مثلاً $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ و $Y = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_k$ که در آن $\mu(A_j) < \infty$ و $\nu(B_k) < \infty$، آنگاه $X \times Y = \bigcup_{j,k} A_j \times B_k$ و $(\mu \times \nu)(A_j \times B_k) < \infty$، لذا $\mu \times \nu$ نیز σ ـ متناهی است. در این حالت، بنابر قضیهٔ ۲۳.۲.۱، $\mu \times \nu$ اندازه‌ای یکتا روی $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ است که برای هر مستطیل مانند $A \times B$، $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$. همین ساختار در مورد تعدادی متناهی از

عوامل کار می‌کند، یعنی فرض کنید به ازای $j = 1, ..., n$، $(X_j, \mathcal{M}_j, \mu_j)$ تعدادی فضای اندازه باشند. اگر یک مستطیل را مجموعه‌ای به شکل $A_1 \times ... \times A_n$ با $A_j \in \mathcal{M}_j$ تعریف کنیم، آنگاه گردایهٔ $\mathbb{A}$ مرکب از اجتماع‌های مجزا از مستطیل‌ها یک σ ـ جبر است، و ضرب نظیر ضربِ فوق اندازه‌ای چون $\mu_1 \times ... \times \mu_n$ روی $\mathcal{M}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{M}_n$ است به طوری که

$$(\mu_1 \times ... \times \mu_n)(A_1 \times ... \times A_n) = \prod_{1}^{n} \mu(A_j).$$

تعریف ۲۵.۲.۱ (انتگرال لبگ n ـ بعدی): اندازهٔ لبگ m^n روی $\mathbb{R}^n$ کامل شدهٔ n ـ بار ضرب اندازهٔ لبگ روی $\mathbb{R}$ با خودش است، یعنی کامل شدهٔ $m \times ... \times m$ روی $\mathcal{L} \otimes ... \otimes \mathcal{L}$ است. دامنهٔ $\mathcal{L}^n$ از m^n ردهٔ مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ در $\mathbb{R}^n$ است. معمولاً اندیس فوقانی m^n را حذف کرده m را به جای m^n خواهیم نوشت.

۱ــ۳ فضاهای نرم‌دار L^p و L^p_ω

تعریف ۱.۳.۱: یک تابع موضعاً انتگرال‌پذیر، تابعی است که روی هر مجموعهٔ فشرده انتگرال‌پذیر باشد.

فرض کنید U یک مجموعهٔ باز در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ باشد و $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ یک تابع اندازه‌پذیر لبگ باشد. اگر انتگرال لبگ $\int_K |f|dx$ برای تمام زیرمجموعه‌های فشردهٔ K در U متناهی باشد، آنگاه f موضعاً انتگرال‌پذیر نامیده می‌شود.

مجموعه تمام چنین توابعی را با $L^1_{loc}(U)$ نشان می‌دهیم.

مثال‌ها:

(۱) به طور کلی تمام توابع انتگرال‌پذیر روی U موضعاً انتگرال‌پذیرند، یعنی $L^1(U) \subset L^1_{loc}(U)$ ($L^1(U)$ مجموعه تمام توابع انتگرال‌پذیر است.).

(۲) تابع ثابت یک تعریف شده روی خط حقیقی موضعاً انتگرال‌پذیراست، اما انتگرال‌پذیر نیست.

به طور کلی‌تر، تمام توابع پیوسته موضعاً انتگرال‌پذیرند.

(۳) تابع

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

موضعاً انتگرال‌پذیر نمی‌باشد، زیرا

$$\int_\varepsilon^1 f(x)dx = \int_\varepsilon^1 1/xdx = \ln x - \ln\varepsilon.$$

در نتیجه

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}(-\ln\varepsilon) = \infty.\square$$

فضاهای L^p که در ادامه معرفی خواهند شد، رسته‌ای مهم از فضاهای باناخ هستند که از توابع تشکیل شده و نرم آنها بر حسب انتگرال‌ها تعریف می‌شود. این فضاها نقشی اساسی در آنالیز نوین ایفا می‌کنند.

تعریف ۱.۳.۲: فرض کنید $(X,\ \mathcal{S},\mu)$ یک فضای اندازه باشد. در این صورت $L^p(X,\mu)$، که به اختصار با L^p نمایش داده می‌شود تمام توابع اندازه‌پذیر f روی X است که درشرط $\int_X |f(x)|^p d\mu < \infty$ صدق می‌کنند. دراین فضا

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{1/p}, \quad \forall f \in L^p.$$

تعریف ۱.۳.۳: زیر مجموعه‌ای مانند E از فضای متری X کامل نامیده می‌شود، هرگاه هر دنبالهٔ کشی در E همگرا بوده و حدش در E واقع باشد.

تعریف ۱.۳.۴: اگر X یک فضای برداری نرم‌دار باشد، تابع $d(x,y) = \|x-y\|$ یک متر روی X تعریف می‌کند. این متر را متر نرمی می‌نامیم.

تعریف ۱.۳.۵: هر فضای برداری نرم‌دار مانند X که نسبت به متر نرمی کامل باشد فضای باناخ نامیده می‌شود.

قضیه ۱.۳.٦: فضای L^p، $1 \le p < \infty$، یک فضای باناخ است.

برهان: به [۳۲] مراجعه شود.$\square$

تعریف ۱.۳.۷: فضای L^p_ω فضای تمام توابع اندازه پذیر f روی $\mathbb{R}^n$ است که درشرط $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\omega(x)dx < \infty$ صدق می‌کنند. دراین فضا

$$\|f\|_{L^p_\omega} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\omega(x)dx\right)^{1/p}, \quad \forall f \in L^p_\omega,$$

که وزن ω، یک تابع موضعاً انتگرال‌پذیر غیرمنفی فرض شده است.