دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضیات و کاربردها

قضایای نقطه ثابت باناخ در فضاهای متری جزئی

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا مطلبی

استاد مشاور:

دکتر عباس نجاتی

پژوهشگر:

محمد حسین زاده یاسوری

دانشگاه محقق اردبیلی

مهر ۱۳۹۱

فهرست مندرجات

فصل اول

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱. ۱. فرض کنید X مجموعه ای ناتهی باشد. تابع $d:X\times X\to IR^{+}$ را یک تابع فاصله یا یک **متر** بر X می نامیم هرگاه به ازای هر $d,x,y,z\in X$ در شرایط زیر صدق کند

الف) $d(x,y)=0$ و $d(x,y)=0$ اگر و فقط اگر $x=y$،

ب) $d(y,x)=d(x,y)$،

پ) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ (نامساوی مثلثی).

در این حالت، زوج (X,d) را یک فضای متری می نامیم و هر $x\in X$ را یک نقطه فضای متری می نامند.

مثال ۱. ۲. تابع $(x,y)\to|x-y|$ یک متریک بر IR است که به آن متر معمولی یا اقلیدسی گویند.

تعریف ۱. ۳. فضای متری (X,d)، نقطه $x \in X$ و عدد $r > 0$ مفروض اند. در این صورت **گوی باز** به مرکز x و شعاع r عبارت است از

$$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}.$$

تعریف ۱. ۴. فضای متری (X,d) ، نقطه ی $x \in X$ و عدد $r > 0$ مفروض اند. در این صورت **گوی بسته** به مرکز x و شعاع r عبارت است از

$$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \le r\}.$$

مثال ۱. ۵. فرض کنید $B(x,y)$ گوی بازی در فضای متری (X,d) باشد و $y \in B(x,r)$. قرار می دهیم $r' = r - d(x,y)$. به آسانی دیده می شود که $B(y,r') \subseteq B(x,r)$.

تعریف ۱. ۶. فضای متری (X,d) و زیر مجموعه $A \subseteq X$ مفروض اند. می گوییم A مجموعه ای **باز** است هرگاه $A \ne \phi$ یا $A = \phi$ و به ازای هر $x \in A$، اسکالر $r > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$B(x,r) \subseteq A.$$

به عبارت دیگر A باز است اگر و فقط اگر اجتماعی از گوی های باز باشد. به عنوان مثال در مجموعه اعداد حقیقی هر بازه باز مجموعه ای باز است.

تعریف ۱. ۷. فضای متری (X,d) و زیر مجموعه $A \subseteq X$ مفروض اند. می گوییم A مجموعه ای **بسته** است هرگاه A^c مجموعه ای باز باشد.

به عنوان مثال هر بازه بسته دو مجموعه اعداد حقیقی، مجموعه ای بسته است.

تعریف ۱. ۸ . فضای متری (X,d) و زیر مجموعه $A\subseteq X$ مفروض اند. A در X **چگال** است هرگاه $\overline{A}=X$؛ به عبارت دیگر A در X چگال است اگر و فقط اگر به ازای هر مجموعه باز ناتهی مانند u داشته باشیم $A\cap u\neq\phi$.

مثال ۱. ۹. در مجموعه اعداد حقیقی Q و Q^c چگال اند.

تعریف ۱. ۳. فضای متری (X,d) و زیر مجموعه ناتهی $A\subseteq X$ مفروض اند. در این صورت **قطر** A عبارت است از

$$\delta(A)=\sup\{d(x,y):x,y\in A\}\ .$$

واضح است که $0\leq\delta(A)\leq\infty$.

$\delta(A)=0$ اگر و فقط اگر A مجموعه ای تک عضوی باشد. همچنین واضح است که $\delta(A)=\delta(\overline{A})$.

تعریف ۱. ۱۱. فضای متری (X,d) و زیر مجموعه ناتهی $A\subseteq X$ مفروض اند. در این صورت A **کراندار** است هرگاه $\delta(A)<\infty$.

تعریف ۱. ۱۲. فضای متری (X,d)، زیر مجموعه $K\subseteq X$ و خانواده $(u_i)_{i\in I}$ از زیر مجموعه های X مفروض اند. $(u_i)_{i\in I}$ یک **پوشش باز** برای K است هرگاه هر u_i باز باشد و $K\subseteq\bigcup_{i\in I}u_i$.

تعریف ۱. ۱۳. فضای متری (X,d) و زیر مجموعه $K \subseteq X$ مفروض اند. K را **مجموعه فشرده** گویند هرگاه بتوان برای هر پوشش باز K حداقل یک زیر پوشش متناهی پیدا کرد. می گوییم X یک فضای متری فشرده است هرگاه X مجموعه ای فشرده باشد.

مثال ۱. ۱۴. در مجموعه اعداد حقیقی $(-n,n)$ یک پوشش باز برای Q می باشد. همچنین $\left(-1,\frac{2}{n}\right)$ نیز یک پوشش باز برای $[0,1]$ می باشد.

مثال ۱. ۱۵. هر زیر مجموعه متناهی فضای متری X مجموعه ای فشرده است. به طور کلی هر اجتماع متناهی از مجموعه های فشرده، مجموعه ای فشرده است.

تعریف ۱. ۱۶. مجموعه ناتهی X مفروض است در این صورت هر تابعی مانند $f: IN \to X$ را یک **دنباله** در X می نامیم. هرگاه به ازای هر $n \in IN$ قرار دهیم $f(n)=x_n$ ، آنگاه دنباله f را معمولاً با نماد (x_n) یا $\{x_n\}$ نشان می دهیم.

تعریف ۱. ۴. فضای متری (X,d)، نقطه $x \in X$ و دنباله (x_n) در X مفروض اند. گوییم دنباله (x_n) به x **همگراست** هرگاه به ازای هر همسایگی x مانند u، وجود داشته باشد $N \in IN$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $n \geq N$، آنگاه $x_n \in u$.

به عبارت دیگر به ازای هر $\varepsilon > 0$، عضو $N \in IN$ وجود داشته باشد به طوری که هرگاه $n \geq N$، آنگاه

$$d(x_n, x) < \varepsilon .$$

قضیه ۱. ۵. (یکتایی حد) هر دنباله حداکثر به یک نقطه همگراست

اثبات. رجوع شود به [۳. ۱. ۲۰] .

تعریف ۱. ۶. فضای متری (X,d) و دنباله (x_n) در X مفروض است. گوییم (x_n) یک **دنباله کشی** است هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، $N \in IN$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $m,n \geq N$، آنگاه

$$(x_m, x_n) < \varepsilon \,.$$

و می نویسیم $\lim_{n,m\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$ یا $d(x_m, x_n) = 0$.

مثال ۱. ۷. با فرض $E_N = \{x_n : n \geq N\}$، مشاهده می شود که (x_n) دنباله ای کشی است اگر و فقط اگر $\delta(E_N) \to 0$.

مثال ۱. ۲۱. اگر دنباله کشی (x_n) در فضای متری (X,d) زیر دنباله ای همگرا مانند (x_{K_n}) داشته باشد، آنگاه $(x_n)_n$ همگراست.

حل. فرض کنید $x_{k_n} \to x$ و $\varepsilon > 0$. در این صورت عددی طبیعی مانند N یافت می شود به طوری که هرگاه $m,n \geq N$، آنگاه داریم

$$d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} \quad ,$$

همچنین اگر $n \geq N$، خواهیم داشت $d(x_{k_n}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. بنابراین اگر $n \geq N$، خواهیم داشت

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x) < (x_{k_n}, x) = \varepsilon \,.$$

و این یعنی $x_n \to x$.

تعریف ۱. ۸. فضای متری (X,d) **کامل** است هرگاه هر دنباله کشی در X به نقطه ای از X همگرا باشد.

به این ترتیب، در فضای متری (X,d)، دنباله (x_n) همگراست اگر و فقط اگر (x_n) دنباله ای کشی باشد.

تبصره ۱. ۲۳. به ازای هر عدد $K \geq 1$ فضای اقلیدسی IR^K کامل است.

تعریف ۱. ۲۴. فضاهای متری y,x، زیر مجموعه $A \subseteq X$، نقاط $a \in A'$ و $l \in y$ و تابع $f : A \to y$ مفروض اند. می نویسیم $\lim_{x\to a} f(x) = l$ و می گوییم **حد تابع** f **در نقطه** a است هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که هر گاه $0 < d(x,a) < \delta$، آنگاه داشته باشیم

$$d(f(x),l) < \varepsilon .$$

قضیه ۱. ۹. با توجه به داده های تعریف ۱. ۲۴ گزاره های زیر معادل اند.

الف) $\lim_{x\to a} f(x) = l$

ب) به ازای هر دنباله (x_n) از نقاط A به طوری که $x_n \neq a$ و $x_n \to a$، دنباله $(f(x_n))$ همگراست.

اثبات. رجوع شود به [۴. ۱. ۲۰].

تعریف ۱. ۱۰. فضاهای متری Y,X ، نقطه $a \in X$ و تابع $f : X \to y$ مفروض اند. گوییم f در a **پیوسته** است هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $d(x,a) < \delta$ ، آنگاه خواهیم داشت

$$d(f(x), f(a)) < \varepsilon .$$

قضیه ۱ .۱۱. (قضیه اشتراک کانتور) فضای متری (X,d) مفروض است. در این صورت گزاره های زیر هم ارزند.

الف) X کامل است

ب) به ازای هر دنباله نزولی از مجموعه های بسته ناتهی مانند $(A_n)_{n\geq 1}$ به طوری که $\delta(A_n)\to 0$.

مجموعه $A=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ دقیقاً از یک نقطه تشکیل شده است.

اثبات. رجوع شود به [۲۰.۴.۲].

تذکر ۱. ۱۲. در قضیه ۱. ۲۷ ، شرط $\delta(A_n)\to 0$ اساسی است و نمی توان آن را حذف کرد.

مثال ۱. ۲۹. فرض کنید در IR به ازای هر $n\geq 1$، $A_n=[n,\infty)$ باشد. در این صورت

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\phi$$

اگر به ازای هر $n\geq 1$ قرار دهیم $B_n=\left[2-\frac{1}{n},3+\frac{1}{n}\right]$ آن گاه $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n=[2,3]$ و در نتیجه این اشتراک بیش از یک نقطه دارد.

تعریف ۱. ۱۳. فرض کنید (X,d) فضای متری بوده و (x_n) دنباله ای در X و α عددی حقیقی با شرط $0<\alpha<1$ باشد به طوری که

$$d(x_{n+2},x_{n+1})\leq \alpha d(x_{n+1},x_n)\ .$$

در این صورت (x_n) دنباله ای **کشی** در X است.

قضیه ۱. ۱۴. (قضیه نقطه ثابت باناخ یا قضیه انقباض)

فرض کنید (X,d) فضای متری کامل بوده و $f:X\to X$ یک تابع انقباض باشد. در این صورت f دقیقاً یک نقطه ثابت دارد.

اثبات. رجوع شود به [۲ .۱ .۱].

تبصره ۱. ۱۵. در قضیه ۱. ۳۱ کامل بودن X شرط اساسی است و نمی توان آن را حذف کرد. بعنوان مثال تابع $f:(0,1]\to(0,1]$ با ضابطه ی $f(x)=\frac{x}{2}$ یک انقباض است، ولی نقطه ثابت ندارد.

تبصره ۱. ۱۶. در قضیه ۱. ۳۱ نمی توان به جای $d(f(x),f(y))\le kd(x,y)$ و $0<k<1$ شرط $d(f(x),f(y))<d(x,y)$ را گذاشت. بعنوان مثال تابع $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ با ضابطه $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ در شرط $d(f(x),f(y))<d(x,y)$ صدق می کند ولی نقطه ثابت ندارد.

تبصره ۱. ۱۷. اگر X یک فضای متری فشرده بوده و تابع $f:X\to X$ به ازای هر $x\neq y$ در شرط $d(f(x),f(y))<d(x,y)$ صدق کند آنگاه f دقیقاً یک نقطه ثابت دارد. در حقیقت تابع $y:X\to IR$ با ضابطه $y(x)=d(x,f(x))$ پیوسته است؛ پس مینیمم مطلق خود را در نقطه ای مانند $p\in X$ اختیار می کند، زیرا X فشرده است.

اگر $g(p)>0$، آنگاه با فرض $f(p)=q$ داریم

$$g(q)=d(q,f(q))=d(f(p),f(q))<d(p,f(p))=g(p).$$

که تناقض است. بنابراین $g(p)=0$ یا $f(p)=p$. بنابراین f نقطه ثابت دارد.

مثال ۱. ۱۸. فضای متری کامل (X,d) و تابع $f:X\to X$ مفروض اند. فرض کنید به ازای عددی طبیعی مانند m، f^m یک تابع انقباض باشد. در این صورت f دقیقاً یک نقطه ثابت دارد، زیرا هرگاه قرار دهیم $g=f^m$ آنگاه بنابر قضیه ۱. ۳۱، y دقیقاً یک نقطه ثابت دارد که آن را p می نامیم. پس $g(p)=p$ و از این رو $f(g(p))=f(p)$.

حال رابطه $g.f=f^{m+1}=f.g$ نشان می دهد که

$$g(f(p))=f(g(p)) \qquad \text{یا} \qquad g(f(p))=f(p)$$

بنابراین $f(p)$ نیز یک نقطه ثابت g است. چون g فقط یک نقطه ثابت دارد پس

$$f(p)=p\ .$$

مثال ۱. ۱۹. تابع $f:[1,\infty)\to[1,\infty)$ با ضابطه $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$ را در نظر می گیریم.

f یک نقطه ثابت با ثابت انقباض $\frac{1}{2}$ و دارای نقطه ثابت $\sqrt{2}$ است، زیرا به ازای هر دو عدد دلخواه $x\geq 1$ و $y\geq 1$ داریم

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|&=\left|\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(y+\frac{2}{y}\right)\right|\\&=\frac{1}{2}|x-y|\ \left|1-\frac{2}{xy}\right|\\&\leq\frac{1}{2}|x-y|\ ,\end{aligned}$$

زیرا $\left|1-\frac{2}{xy}\right|\leq 1$.

برای یافتن تنها نقطه ثابت f باید معادله $f(x)=x$ را حل کنیم، پس $\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)=x$ یا $x^2=2$، بنابراین $x=\sqrt{2}$.

■

تبصره ۱. ۲۰. با استفاده از نمادگزاری قضیه ۱. ۳۱ و با فرض $x_0 = 1$، مشاهده می شود که در مثال ۱. ۳۷ به ازای ... ,۲, ۱, $n = ۰$ خواهیم داشت

$$\left|x_n - \sqrt{2}\right| \le 2^{-n}$$

فرض کنید α و c اسکالرهای دلخواه و بزرگتر صفر و $\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \le c \le \sqrt{2}$. تابع f را بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$f : [c, \infty) \to [c, \infty)$$
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right)$$

در این صورت f یک تابع انقباض با ثابت انقباض $\frac{1}{2}$ و دارای نقطه ثابت $\sqrt{\alpha}$ است.

مثال ۱. ۳۸. فرض کنید بازه $I \subseteq IR$ و تابع پیوسته $f : I \to I$ و نقطه $a \in I$ به گونه ای باشند که

$$f(f(f(a))) = a\,.$$

در این صورت f حداقل یک نقطه ثابت دارد، زیرا فرض کنید f نقطه ثابت نداشته باشد. در این صورت تابع $g : I \to IR$ با ضابطه $g(x) = f(x) - x$ یا همواره مثبت است یا همواره منفی

حال فرض کنید g همواره مثبت باشد. اگر به جای x متوالیاً مقادیر a، $f(a)$ و $f(f(a))$ را جاگذاری کنیم، نابرابری $f(f(f(a))) > a$ به دست می آید و این تناقض است.

■

فصل دوم

انقباض ها در فضاهای متری جزئی دوگان

تعریف ۱. ۲. منظور از **شبه متر** تابعی حقیقی مقدار نامنفی مانند d بر $X \times X$ می باشد به طوری که به ازای هر $x, y, z \in X$ خواص زیر برقرار است.

الف) $x = y$ اگر و فقط اگر $d(x, y) = d(y, x) = 0$،

ب) $d(x, y) \leq (x, z) + d(z, y)$.

فضای شبه متری عبارت است از زوج (X, d) که X یک مجموعه غیرتهی بوده و d یک شبه متر روی X است.

مثال ۲. ۲. مجموعه ناتهی X مفروض است و تابع $d: X \times X \to IR$ در شرایط زیر صدق می کند

الف) $d(x,y)=0$ اگر و فقط اگر $x=y$،

ب) $d(x,y) \le d(x,z)+d(y,z)$.

در این صورت d یک متر در X است

حل. اگر در شرط (ب) قرار دهیم $z=x$، آنگاه خواهیم داشت

$$d(x,y) \le d(y,x) \ . \qquad (۱)$$

با تعویض نقش y,x رابطه زیر بدست می آید

$$d(y,x) \le d(x,y) \qquad (۲)$$

حال از رابطه (۱) و (۲) نتیجه می شود

$$d(x,y)=d(y,x)$$

حال اگر در شرط (ب) قرار دهیم $y=x$، آنگاه به ازای هر x و z خواهیم داشت $0 \le 2d(x,z)$ یا $d(x,z) \ge 0$ و بنابراین d همه ویژگی های یک متر را دارد.

■

تعریف ۲. ۳. گردایه T از زیر مجموعه های مجموعه X را یک **توپولوژی** در X گوییم هرگاه T دارای خاصیت زیر باشد.

الف) $\phi \in T$ و $X \in T$،

ب) هرگاه به ازای $i=۱،۲,...,n$ ، $V_i \in T$ آنگاه

$$V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap ... \cap V_n \in T .$$

پ) هرگاه $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ گردایه دلخواهی از عضوهای T (متناهی، شمارا، ناشمارا) باشد آنگاه

$$\bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha \in T .$$

هرگاه T یک توپولوژی در X باشد، آنگاه X را یک فضای توپولوژی و عضوهای T را مجموعه های باز در X می نامند.

هرگاه Y, X فضاهای توپولوژی بوده و f نگاشتی از X به توی Y باشد، آنگاه گوییم f پیوسته است اگر به ازای هر مجموعه باز V در Y، $f^{-1}(V)$ باز در X باشد.

تعریف ۲. ۴. توپولوژی ایجاد شده توسط شبه متری d را با $T(d)$ نشان می دهیم که دارای پایه ای به صورت $\{B_d(x,\varepsilon): x\in X, \varepsilon>0\}$ (دسته گوی های باز) است، که در آن به ازای هر $x\in X$ و $\varepsilon>0$ تعریف می کنیم.

$$B_d(x,\varepsilon)=\{y\in X : d(x,y)<\varepsilon\}.$$

تعریف ۲. ۵. اگر d یک شبه متر روی X باشد آنگاه تابع d^s روی $X\times X$ بصورت

$$d^s(x,y)=Max\{d(x,y),d(y,x)\}$$

تعریف می شود که یک متر بر X است.

تعریف ۲. ۶. فرض کنید $d: X\times X\to IR$ شبه متر باشد. تابع متقارن $d^s: X\times X\to IR$ به ازای هر $x,y\in X$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$d^s(x,y)=d(x,y)+d(y,x).$$

که در آن d^s یک متر بوده و همچنین $T(d)\subseteq T(d^s)$.

تعریف ۲. ۷. (نگاشت انقباض در فضای شبه متری)فرض کنید (X,d) یک فضای شبه متری باشد و نگاشت $f:(X,d)\to(X,d)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید اسکالر $c\in IR$ با شرط $0\leq c<1$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x,y\in X$ داشته باشیم

$$d\left(f(x), f(y)\right)\leq c\ d(x,y).$$

در اینصورت f یک **انقباض** با پایای انقباض c نامیده می شود.

تعریف ۲. ۸. متر جزئی دوگان تابعی است مانند $P:X\times X\to IR^{+}$ به طوری که به ازای هر $x,y,z\in X$ دارای خواص زیر می باشد

الف) $x=y$ اگر و فقط اگر $P(x,x)=P(x,y)=p(y,y)$،

ب) $p(x,x)\leq p(x,y)$،

پ) $p(x,y)=p(y,x)$،

ت) $p(x,z)\leq p(x,y)+p(y,z)-p(y,y)$.

فضای متری جزئی دوگان عبارت است از زوج (X,p) که در آن X یک مجموعه ناتهی و P یک متر جزئی دوگان بر X است.

تبصره ۲. ۹. هر متر جزئی دوگان P بر X یک توپولوژی مانند $T(P)$ بر X ایجاد می کند به طوری که دارای پایه ای به صورت $\{B_p(x,\varepsilon): x\in X,\varepsilon>0\}$ می باشد که در آن به ازای هر $x\in X$ و $\varepsilon>0$ داریم

$$B_p(x,\varepsilon)=\{y\in X : p(x,y)<p(x,x)+\varepsilon\}\ .$$

قضیه ۲. ۱۰. فرض کنید P متر جزئی دوگان و $B_p(a,\varepsilon)$ یک گوی باز و $x\in B_p(a,\varepsilon)$ باشد.

در این صورت اسکالر $\delta > 0$ موجود است به طوری که

$$x \in B_p(x,\delta) \subseteq B_p(a,\varepsilon).$$

اثبات. فرض کنید $x \in B_p(a,\varepsilon)$ باشد بنابراین خواهیم داشت

$$P(x,a) < \varepsilon \ .$$

حال اسکالر δ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\delta = \varepsilon - P(x,a) + P(x,x) \ . \qquad (۱)$$

چون بنا به فرض $\delta > 0$ و هم چنین $P(x,a) < \varepsilon$ می باشد پس خواهیم داشت

$$P(x,x) < \delta \ .$$

در نتیجه $x \in B_p(x,\delta)$. حال نشان می دهیم $B_p(x,\delta) \subseteq B_p(a,\varepsilon)$. فرض کنید $y \in B_p(x,\delta)$ بنابراین داریم

$$p(y,x) < \delta$$

از رابطه (۱) خواهیم داشت

$$p(y,x) < \varepsilon - p(x,a) + p(x,x) \ .$$

بنابراین

$$p(y,x) + p(x,a) - p(x,x) < \varepsilon \ .$$

در نتیجه از شرط (ت) متر جزئی دوگان خواهیم داشت

$$p(x,a) < \varepsilon \ .$$

بنابراین $y \in B_p(a,\varepsilon)$ و در نتیجه $B_p(x,\delta) \subseteq B_p(a,\varepsilon)$.

تعریف ۲. ۱۱. دنباله $(x_n)_{n\in IN}$ در فضای متری جزئی دوگان (X,P) **دنباله کشی** گفته می شود هرگاه حد دنباله وجود داشته باشد یعنی، اسکالری مانند $\alpha\in IR$ موجود باشد به طوری که

$$\lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)=\alpha.$$

تعریف ۲. ۱۲. فضای متری جزئی دوگان (X,P) **کامل** گفته می شود اگر و فقط اگر دنباله کوشی $(x_n)_{n\in IN}$ در X همگرا باشد.

تعریف ۲. ۱۳. **شبه متر وزن دار (موزون)** بر مجموعه X، زوج مرتبی است مانند $(d,|\,|)$، که در آن d یک شبه متر بر X و $|\,|: X\to IR$ یک تابع وزن است به طوری که به ازای هر $x,y\in X$ داریم

$$d(x,y)+|x|=d(y,x)+|y|\ .$$

قضیه ۲. ۱۴. فرض کنید $(d,|\,|)$ شبه متر وزن دار بر X باشد. تابع $P: X\times X\to IR$ را به ازای هر $x,y\in X$ به صورت زیر تعریف می کنیم

$$P(x,y)=d(x,y)+|x|\ .$$

در این صورت P یک متر جزئی دوگان بر X بوده و $T(p)=T(d)$.

اثبات. در ابتدا نشان می دهیم که P یک متر جزئی دوگان بر X است. برای درستی خاصیت (الف) متر جزئی دوگان فرض کنید $x,y\in X$ باشد چون $P(x,x)=P(x,y)=P(y,y)$، پس بنا بر تعریف P در فرض خواهیم داشت

$$|x| = d(x,y) + |x| = |y| .$$

از تعریف ۲. ۱۳ داریم

$$|x| = d(x,y) + |x| = d(y,x) + |y| = |y| ،$$

در نتیجه

$$d(x,y) = d(y,x) = 0 .$$

بنابراین $x = y$. حال اگر $x = y$، واضح است که $P(x,x) = P(x,y) = P(y,y)$. در نتیجه خاصیت (الف) متر جزئی دوگان برقرار است.

چون به ازای هر $x, y \in X$ ، $d(x,y) \geq 0$ می باشد. پس به ازای هر $x, y \in X$ داریم

$$|x| \leq d(x,y) + |x| .$$

از تعریف ۲. ۱۳ ، به ازای هر $x, y \in X$ نتیجه می شود که

$$P(x,x) \leq P(x,y).$$

بنابراین خاصیت (ب) متر جزئی دوگان نیز برقرار است. حال با توجه به تعریف ۲. ۱۲ چون به ازای هر $x, y \in X$ ، $d(x,y) + |x| = d(y,x) + |y|$ می باشد پس از فرض خواهیم داشت

$$P(x,y) = P(y,x).$$

بنابراین خاصیت (پ) متر جزئی دوگان برقرار می باشد.

از طرفی بنا بر خاصیت (ب) شبه متر چون به ازای هر $x, y, z \in X$ ، $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ می باشد پس خواهیم داشت

$$d(x,z) + |x| \leq \left(d(x,y) + |x|\right) + \left(d(y,z) + |y|\right) - |y| .$$

بنابراین به ازای هر $x,y,z\in X$ داریم

$$P(x,z)\leq P(x,y)+P(y,z)-P(y,y)$$

در نتیجه هر چهار خاصیت متر جزئی دوگان برقرار بوده و P یک متر جزئی دوگان می باشد.

حال نشان می دهیم $T(P)=T(d)$ ، یعنی باید نشان دهیم پایه های دو توپولوژی حاصل از متر جزئی دوگان P و شبه متر d با هم معادل اند. فرض کنید $y\in B_P(x,\varepsilon)$، از تعریف ۲. ۸ داریم

$$P(x,y)<P(x,x)+\varepsilon\,. \qquad (۱)$$

از طرفی بنا به فرض $P(x,y)<d(x,y)+|x|$، پس خواهیم داشت

$$P(x,y)<P(x,x)+d(x,y).$$

در نتیجه از رابطه (۱) خواهیم داشت

$$d(x,y)<\varepsilon\,.$$

بنابراین $y\in B_d(x,\varepsilon)$، و این نشان می دهد $T(P)\subseteq T(d)$.

به طور مشابه می توان نشان داد اگر $y\in B_d(x,\varepsilon)$ باشد آنگاه $y\in B_P(x,\varepsilon)$. پس $T(d)\subseteq T(P)$ و در نتیجه حکم برقرار است.

■

لم۲. ۱۵. فرض کنید (X,P) فضای متری جزئی دوگان باشد. تابع d_p را بر مجموعه غیر تهی X به صورت زیر تعریف می کنیم.