بسم الله الرحمن الرحيم

قال رسول الله (ص):

ليس العلم بكثرة التعلّم وانّما هو نور يقذفه الله في قلب من يشاء

114361

دانشگاه شهید باهنر کرمان

بخش ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

موضوع :

"معادله ژاکوبی روی فضاهای فشرده بطور طبیعی تحویلی"

استاد راهنما :

دکتر اسدا .... رضوی

هیئت داوران :

دکتر یوسف بهرامپور

دکتر مهدی رجبعلی پور

نگارش از :

سیامک یاسمی

۱۱۴۳۷

بسمه‌تعالی

" معادله ژاکوبی روی فضاهای فشرده بطور طبیعی تحویلی "

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است وهیچ گونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

دانشجو: سیامک یاسمی

استاد راهنما: دکتر اسدالله رضوی

داور ۱: دکتر یوسف بهرامپور

داور ۲: دکتر مهدی رجبعلی پور

حق چاپ محفوظ ومخصوص به مؤلف است.

بنام خدا

این پایان نامه درسال ۱۳۶۶ توسط اینجانب سیامک یاسمی ازروی ـ مقاله‌ای باعنوان "The Jacobi equation on naturally reductive compact Riemannian homogeneous spaces" تهیه‌شده‌است که‌این مقاله توسط Wolfgang - Ziller در سال ۱۹۷۷ درمجله Comment. Math .Helvetici 52 (1977) 573-590. بچاپ رسیده‌بودونویسنده‌آنرا دردانشگاه بن کامل کرده‌است .

انتخاب این مقاله بعنوان پایان نامه دوره کارشناسی ارشد بدین ترتیب بودکه ابتداء علاقمندبه کارروی نقاط مزدوج درفضاهای مختلف شدم وبنا به‌توصیه استاد راهنمایم جناب دکتررضوی کلرا روی نقاط مزدوج در S-Manifold آغازکردم ودرضمن کاربه‌این نتیجه رسیدم که‌باید این نقاطدرفضاهای خارج قسمتی G/H بطورکامل مشخص‌شود تا بتوان کار راادامه دادوبدین ترتیب بودکه‌مقاله Ziller را برای شروع کار انتخاب کردم.و امیدوارم که‌بتوانم درآینده‌این کاررا روی ـ S-Manifold انجام دهم .

بدینوسیله ازاستادان گروه ریاضی دانشگاه کرمان وکتابدارا ن کتابخانه‌ها وکلیه‌کسانی که‌به‌نحوی درتهیه این پایان نامه مرایاری

نمودند تشکرمی نمایم .

ازجناب دکتراسدا .... رضوی که نه فقط بعنوان یک استاد راهنما بلکه درحد یک پدردلسوزمرا درتمامی قسمتهای مقاله وبطورکلی دردروس هندسه راهنمائی نمودند کمال تشکررا دارم وامیدوارم که درآینده بتوانم نشان دهم که شاگرد ایشان بوده‌ام.

ازاستادعزیزم دکترمهدی رجبعلی پورکه بعنوان یکی ازداورهای اینجانب راهنمائیهای زیادی درمورد این پایان نامه ایراد فرمودند وزحمت مطالعه آنرا متقبل شدند تشکرمی نمایم .

ودرخاتمه ازاستاد گرامیم دکتریوسف بهرامپورکه ایشان نیزبا قبول زحمت مطالعه پایان نامه مطالب زیادی را برای درک بیشتراینجانب بمن آموختند تشکرفراوان می نمایم .

سیامک یاسمی

بهمن ۱۳۶۶

تقـدیـم بـــه :

پدروما در گـرا میـم که سهـم بزرگـی درپیشـــرفـــت

تحصیـــلاتـــم دا رنـــــد .

تقدیم به :

همسر و دو فرزندم که در طول تحصیلاتم

سختیهای زیادی متحمل شدند .

فهرست مطالب

۱- پیشنیاز :

در این بخش تعاریف وقضایائی راکه درطول مقاله با آنها سروکار داریم بطورفهرست وارودرصورت نیاز با اثبات کامل ارائه خواهیم کرد .

۱.۱- نگاشت نمائی :

در این قسمت تابع نمائی روی گروههای لی را درنظرمی گیریم وتعدادی ازخواص آنرا بیان می داریم .

قضیه ۱- فرض‌کنیم G یک‌گروه لی و $\underline{g}$ جبرلی وابسته به‌آن باشد وهمچنین فرض‌کنیم x متعلق به $\underline{g}$ باشد آنگاه یک همسانی θ ازاعدادحقیقی R به G موجوداست .

بطوریکه $\dot{\theta}(0)=X$

(صفحه ۱۰۳ نتیجه ۵-۱ مرجع [۴])

تعریف : فرض‌کنیم x متعلق به $\underline{g}$ باشد آنگاه نگاشت نمائی را بدین ترتیب تعریف می کنیم .

$$\exp:\ \underline{g} \longrightarrow G$$

$$X \longmapsto \theta(1)$$

که درآن θ همسانی قضیه قبل است‌که متناظربا x بدست می آید .

نکته : با استفاده از تعریف فوق براحتی نتیجه می شودکه

$\exp(t+s)x = \exp tx \exp sx \qquad s,t\in R \quad , \quad x\in \underline{g}$

چون $\exp tx = \theta(t)$ و $\dot{\theta}(0) = x$ بنابراین

$(dL_g x)f = x(f o L_g) = \frac{d}{dt}\Big|_0 f(g \ \exp tx)$

(صفحه ۱۰۴) مرجع ۴)

قضیه ۲ : فرض کنیم H و k دوگروه لی با جبرهای وابسته $\underline{h}$ و $\underline{k}$ باشد فرض کنیم ϕ یک همسانی تحلیلی از H به k باشد آنگاه $d\phi_e$ یک همسانی از $\underline{h}$ به $\underline{k}$ خواهدبودو $\phi(\exp tx) = \exp\ d\phi_e(x)$

(صفحه ۱۱۰ لم ۱۲-۱ مرجع [۴])

قضیه ۳ : فرض کنیم G یک گروه لی و H یک زیرگروه G باشد وهمچنین فرض کنیم $\underline{g}$ و $\underline{h}$ بترتیب جبرهای لی آنها باشدوفرض کنیم که گروه لی H دارای تعداد شمارا مولفه باشد آنگاه خواهیم‌داشت

$h = \{x\in \underline{g} \mid \exp tx \in H$ برای هر t متعلق به $R\}$

(صفحه ۱۱۸ قضیه ۷-۲ مرجع [۴])

قضیه ۴ : فرض کنیم G یک گروه لی و H یک زیرگروه بسته G باشد آنگاه فضای خارج قسمتی G/H دارای یک ساختمان بسلائی مشتق ـ پذیرخواهدشدکه این عمل عبارت است از

. برای هر a و b متعلق به G ومخصوصا " نگاشت طبیعی

$$G \times G/H \longrightarrow G/H$$
$$(a,bH) \longmapsto abH$$
$$\pi : G \longrightarrow G/H$$
$$a \longmapsto aH$$

یکنگاشت مشتق پذیرخواهدشد .

(صفحه ۱۲۳ قضیه ۲-۴ مرجع [۴])

<u>لـم ۵ :</u> فرض کنیم G و H دوگروه لی با جبرهای لی $\underline{g}$ و $\underline{h}$ باشد وفرض کنیم H زیرگروه بسته G باشد درنتیجه طبق قضیه قبلی G/H یکبسلا می شود حال می خواهیم ثابت کنیم که اگرنگاشت زیررا درنظر بگیریم .

$$\pi : G \longrightarrow G/H$$
$$g \longmapsto gH$$

آنگاه $\ker d\pi_e = \underline{h}$ میشود

<u>اثبات :</u> فرض کنیم x متعلق به $\ker d\pi_e$ باشد درنتیجه

$0 = d\pi_e x$

وبنابراین اگر f متعلق به $C^\infty(G/H)$ باشد(بعبارت دیگر

$f \in F(\bar{e}, G/H)$ که درآن $(\bar{e} = \pi(e)$ آنگاه

$$0=(d\pi_e x)f=x(f0\pi)=\frac{d}{dt}\Big|_0 f(\exp tx.\,\pi(e))$$

$$=\frac{d}{dt}\Big|_0 f(\exp tx.\bar{e})$$

وبنا براین اگرفرض کنیم $s \in R$ وتعریف کنیم

$$f^*(q)=f(\exp sx.q) \qquad q \in G/H$$

آنگاه $0=\frac{d}{dt}\Big|_0 f^*(\exp tx.\bar{e}) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=s} f(\exp tx.\bar{e})$

وبنا براین $f(\exp tx.\bar{e})$ در s ثابت است وچون f یک تابـــع

دلخواه بوددرنتیجه برای هر $t \in R$ $\exp tx.\bar{e}=\bar{e}$

وبنا براین $\exp sx \in H$ ودرنتیجه $x \in \underline{h}$ وبنا براین

$$\ker d\pi_e \subseteq \underline{h}$$

ازطرف دیگراگر x متعلق به $\underline{h}$ باشدآنگاه $d\pi_e\ x=0$ وبنا براین

x متعلق به $\ker d\pi_e$ ودرنتیجه $\underline{h} \subset \ker d\pi_e$ وبنا برایـــــــــــن

$$\ker d\pi_e=\underline{h}$$

<u>تعـــریف :</u> بسلای $M=G/H$ راکه درقضیه قبل داشتیم یک فضای همگن می نامیم .

<u>تعـریـــف :</u> دونمایش Ad و ad را چنین تعریف می کنیم .

$$Ad: G \longrightarrow GL(\underline{g})$$

$$g \longmapsto dj_g^{-1}$$

که درآن

$$j_g: G \longrightarrow G$$

$$h \longmapsto g^{-1}hg$$

وهمچنین

$$ad: \underline{g} \longrightarrow gl(g)$$

$$ad = dAd$$

<u>لـــم ۶ :</u> خواص زیــربرقرا راست .

$$\exp t \,.\, Ad_g(x) = g(\exp t\, x)g^{-1} \qquad x \in \underline{g} \qquad g \in G \qquad t \in R$$

$$ad_x Y = \left(\frac{d}{dt}\Big|_0 Ad(\exp t\, x)\right)(Y) \qquad x, Y \in \underline{g} \qquad t \in R$$

<u>تعـــریـــف :</u> یک متررا روی G/H ازچپ پا یا می‌گویندا گربرا ی هر u و v که متعلق به جبرلی G/H باشد داشته باشیم .

$$<u,v> = <dL_g(u) \;,\; dL_g(v)>$$

وا زراست پا یا گوئیم اگر

$$<u,v> = <dR_g(u) \;,\; dR_g(v)>$$

که درآن R_g و L_g بترتیب عمل ضرب ا زراست وضرب ا زچپ اســـــت

<u>تعـریـــف :</u> متر g را روی G/H بطورکلی پا یا گوئیم اگرا زچپ وا زراست پا یا باشد .

قضیــــه ۷ : یک متر ریمانی چپ پایا روی G راست پایا است اگروفقط اگرضرب داخلی القاء شده روی $\underline{g}$ تحت Ad_g برای هــــر g متعلق به G پایا باشد

اثبـــات : می دانیم $Ad_g = dj_g^{-1}$ وبنابراین

$$Ad_g = d(L_g 0 R_{g-1})\,|_e$$

$$<dR_g X \; , \; dR_g Y> = <dL_{g-1} 0 dR_g X \; , \; dL_{g-1} 0 dR_g Y>$$

$$= <Ad_{g-1} X \; , \; Ad_{g-1} Y>$$

وبنابراین قضیه اثبات می شود

لــم ۸ : ad_X نسبت به < و > پاد متقارن است

$$<ad_X Y \; , \; Z> = \frac{d}{dt}\Big|_0 <Ad_{\exp(tX)} Y \; , Z>$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_0 <Y, Ad_{\exp(-tX)} Z>$$

$$= -<Y, ad_X Z>$$

فرض کنیم G یک گروه لی با جبرلی $\underline{g}$ باشد وفرض کنیم H زیرگـــروه بسته G باشد ونگاشت تصویری

$$\pi : G \longrightarrow G/H$$

$$a \longmapsto aH$$

را درنظرمی گیریم ازروی این نگاشت میتوان نگاشت زیررا تعریف کرد .

$$*:\underline{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(G/H)$$

$$x \longmapsto x^*$$

که درآن $\quad p\in G/H \quad x^*_p = \frac{d}{dt}\Big|_0 (\exp t\, x).p$

بعبارت دیگر $\quad x^*_p = \dot{\gamma}(0)$ که درآن $\quad \gamma(t) = (\exp t\, x).p$

<u>نکتـــه :</u> در [۸] ثابت شده است که برای هر g متعلق به G داریم

$$g_* x^* = (Ad_g x)^* 0 g$$

<u>لم ۹ :</u> برای هر x و Y متعلق به $\underline{g}$ داریم $\left[x^*, Y^*\right] = -\left[x, Y\right]^*$

<u>اثبـات :</u> $\left[x,Y\right]^*_p = \frac{d}{dt}\Big|_0 \exp(t\left[x,Y\right]).p$

$$\exp(t\left[x,Y\right]) = \exp ad_{tx} Y.$$

$$= \frac{d}{ds}\Big|_0 \exp(tx)\ \exp(SY)\exp(-tx)$$

که تساوی فوق از <u>لم ۶</u> بدست آمده است .

$$\frac{d}{dt}\Big|_0 \exp(t\left[x,Y\right]).p = \frac{d^2}{dt\,ds}\Big|_0 \exp(tx)\exp(SY)\exp(-t\,x).p$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_0 d\ \exp(t\,x)(Y^*{}_{\exp(tx).p})$$

$$= -\,(L_{x^*} Y^*) = -\left[x^*, Y^*\right]_p$$