



دانشگاه هرمزگان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

عنوان:

دینامیک یک مدل اپیدمی SIR

استاد راهنما:

دکتر محبوبه محمد حسنی

نگارش:

الهام سلطانی

خرداد ماه ۱۳۹۲





تأییدیه هیأت داوران جلسه دفاع از پایان نامه

با عنایت به آئین نامه آموزشی دوره کارشناسی ارشد، جلسه دفاعیه پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد الهام سلطانی به شماره دانشجویی ۹۰۴۱۱۰۱۵۱ رشته ریاضی محض گرایش سیستم دینامیکی در تاریخ ۹۲/۰۳/۲۰ در محل دانشگاه هرمزگان تحت عنوان دینامیک یک مدل اپیدمی SIR با حضور هیئت داوران برگزار گردید و براساس کیفیت پایان نامه، ارائه دفاعیه و نحوه پاسخ به سئوالات، پایان نامه مورد قبول هیئت داوران قرار گرفت.

نمره پایان نامه به عدد (.....) و به حروف (.....) اعلام گردید.

ردیف	سمت	نام و نام خانوادگی	دانشگاه	امضاء
۱	استاد راهنما	دکتر محبوبه محمد حسنی	دانشگاه هرمزگان	
۲	استاد مشاور		دانشگاه هرمزگان	
۳	داور داخلی	دکتر قاسم میرحسین خانی	دانشگاه هرمزگان	
۴	داور خارجی	دکتر محمدرضا فرهنگ دوست	دانشگاه شیراز	
۵	نماینده تحصیلات تکمیلی	علیداد عسکری	دانشگاه هرمزگان	

مدیرکل تحصیلات تکمیلی:

دکتر شرام گلزاری

مالکیت معنوی

باسمه تعالی

اینجانب الهام سلطانی به شماره دانشجویی ۹۰۴۱۱۰۱۵۱ دانشجوی رشته ریاضی محض گرایش سیستم دینامیکی مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد متعهد می‌شوم چنانچه براساس پایان‌نامه خود اقدام به انتشار مقاله، کتاب و ... نمایم ضمن مطلع کردن از استاد راهنما، با نظر ایشان نسبت به نشر، کتاب و مقاله و ... به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مقدم بر نام خود مبادرت کنم.

نام و نام خانوادگی: الهام سلطانی

تاریخ و امضا:

باسمه تعالی

اینجانب الهام سلطانی به شماره دانشجویی ۹۰۴۱۱۰۱۵۱ دانشجوی رشته ریاضی محض گرایش سیستم دینامیکی مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد گواهی می‌کنم چنانچه در پایان‌نامه خود از فکر، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته‌ام، با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و مأخذ را نیز در جای مناسب ذکر کرده‌ام. بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می‌دانم و جوابگوی آن خواهم بود.

نام و نام خانوادگی: الهام سلطانی

تاریخ و امضا:

تقدیم به همه آنهایی که

می خوانند بیشتر بدانند

چکیده

در این پایان نامه به بررسی مدل های زیستی دینامیکی دو بیماری واگیردار می پردازیم. پایداری تعادل عاری از بیماری و تعادل بیماری واگیردار را مورد بررسی قرار می دهیم. یکی از مهمترین راه حل ها برای دستیابی به این هدف، تابع لیاپونوف است. همچنین به ارائه بحثی به نام شبیه سازی عددی که در قالب مثال و نمودار تغییرات بیماری و برخی از پارامترهای کاربردی می باشد، می پردازیم.

واژگان کلیدی: مدل SIR ، پایداری، نقاط تعادل، به طور سرتاسری جاذب، تابع لیاپونوف.

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

چه جهل مقدسی، آنگاه که انسان بعد از سال هارنج و تکاپوی فهمد که هنوز هیچ نمی فهمد

و چه جهل نامقدسی وقتی خداوند در متن آگاهیهایت نباشد...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

تقدیر و سپاس پدری مهربان را که حامی من شدند تا در محضر اساتیدی بزرگوار هم کلاس با دوستانی

شوم که تا ابد خاطرشان در دلم باقی بماند.

استاد ارجمندم سرکار خانم دکتر محمدحسینی را که استاد راهنمای من در این پایان نامه بودند سپاس

می گویم. از دیگر اساتید بزرگوار آقای دکتر سبزواری، آقای دکتر احمدی و آقای دکتر مقدری و آقای دکتر

محمدی که در محضرشان کسب علم و تجربه کردم قدردانی می کنم.

در پایان، بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و نامزد مهربانم طه، بعد

از خدا ستایش می کنم وجود مقدس شان را و تشکر می کنم از خانواده عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای

امیدبخش وجودشان، که بهترین پشتیبان من بودند.

الهام سلطانی

خردادماه ۱۳۹۲

فهرست مطالب

۱	پیشگفتار
۷	فصل ۱: تعاریف و مفاهیم اولیه
۸	۱.۱ سیستم دینامیکی
۹	۱.۱.۱ مسیر
۱۰	۲.۱.۱ نقطه تعادل
۱۰	۳.۱.۱ نقطه تناوبی
۱۱	۴.۱.۱ نقطه زینی
۱۲	۵.۱.۱ هذلولوی
۱۳	۶.۱.۱ جذاب
۱۳	۷.۱.۱ به طور سرتاسری جذاب
۱۴	۸.۱.۱ مجاناً پایدار
۱۴	۹.۱.۱ پایداری در مفهوم لیاپونوف

۱۵	تعریف یک نقطه تعادل در یک سیستم
۱۵	خودگردان و غیر خودگردان
۱۶	به طور سرتاسری مجاناً پایدار
۱۶	تابع لیاپونوف
۱۷	تعریف تابع کاندید لیاپونوف
۱۷	تعریف تابع کاندید لیاپونوف محوراً بی کران
۱۸	قضایای اساسی لیاپونوف برای سیستم های خودگردان
۱۸	نقطه تعادل پایدار
۱۹	نقطه تعادل به طور موضعی مجاناً پایدار
۱۹	نقطه تعادل به طور سرتاسری مجاناً پایدار
۱۹	قضیه دولاک- بندینکسون
۲۲	فصل ۲: تحلیل دینامیکی یک بیماری با مدل SIR
۲۳	۱.۲ تحلیل و بررسی مدل بیماری
۵۱	۲.۲ شبیه سازی عددی
۵۴	۳.۲ نتیجه گیری
۵۶	فصل ۳: تابع لیاپونوف: یک ابزار کاربردی
۵۷	۱.۳ تحلیل و بررسی مدل ریاضی گونه یک اپیدمی

۶۵ تابع لیاپونوف و پایداری ۲.۳

۷۳ واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

۷۶ مراجع

پیشگفتار

از هزاران سال پیش، از ریاضیات برای فهمیدن و پیش بینی گسترش بیماری و سؤالات مهم سلامت عمومی با پارامتر اصلی انتقال مورد استفاده بوده است. از ما قبل تاریخ تا به امروز بیماری منبع ترس و خرافات شده است. یک تصویر جامع از دینامیک های بیماری نیازمند ابزارهای مختلف ریاضی برای ایجاد مدل با حل معادلات دیفرانسیل و آنالیز آماری مدل است. اگر چه ریاضیات برای تصمیم گیری در مورد بیماری واگیردار نسبتاً خیلی خوب به کار گرفته شده است اما هیچ انکاری نیست که عامل های خاصی وجود دارد که هنوز مناسب ریاضیات نیستند. به عبارتی توصیف آنها با ابزار ریاضی مشکل می نماید. اکثر مدل های ریاضی از بیماری از تعدادی قضیه ثابت شده شروع می شود که جمعیت می تواند در مجموعه از رده بالاتر با توجه به تجربه و رابطه بیماری، به قسمت های جزئی تقسیم شود. معمولاً رده های مورد تحقیق؛ اشخاص مستعد " S "، اشخاص آلوده " I " و یا اشخاص ایمن شده " R " هستند. چنین مدل به عنوان مدل SIR است، بدین صورت است که افراد یک جمعیت خاص در مرحله اول و قبل از ورود بیماری، مستعد ابتلا به بیماری هستند. با ورود اولین مورد بیماری به جمعیت، در مرحله دوم ابتلا به بیماری وجود دارد و در مرحله سوم مبتلایان به بیماری بعد از بهبودی وارد مرحله ایمن شدگی از بیماری می شوند؛ بدین معنی که تا پایان عمر هرگز به بیماری دچار نمی شوند و یا حداقل یک دوره ایمن شدگی از بیماری خواهند داشت. از این نوع

می توان به بیماری های سرخک، سرخجه، آبله مرغان و ... اشاره کرد. این مدل می تواند گسترش پیدا کند به طوری که نمایش دهنده حالت ایمنی موقت باشد. هنگامی که افراد گروه ایمن شده ایمنی خود را در طول زمان از دست دهند، به گروه افراد مستعد باز می گردند. این توسعه مدل *SIRS* نامیده می شود؛ مثل بیماری سرماخوردگی. مدل *SIS* مدلی است که بیماران پس از بهبودی از بیماری، هیچ ایمنی در برابر بیماری نخواهند داشت و باز هم مستعد ابتلا به بیماری هستند. همچون بیماری های سل، ذات الریه، مننژیت و ...

البته در بعضی از مدل ها مراحلی همچون دوره نهفتگی بیماری، وجود دارد که در آن، بیماری پس از انتقال به شخص وارد مرحله نهفتگی بیماری می شود که از این نوع می توان بیماری ایدز را نام برد. اولین مدل *SIR* که محاسبه تعداد اشخاص آلوده به بیماری واگیردار در یک جمعیت (فضای) بسته بود، توسط کرمک و مک کندریچ^۱ در سال ۱۹۲۷، پیشنهاد شده بود. مدل مذکور برای بررسی بیماری طاعون سیاه ابداع و به کار گرفته شد. اگر چه این مدل بسیار ساده و به ظاهر پیش پا افتاده بود، اما کلید گشایش درهای بسیاری برای ریاضیات زیستی^۲ به شمار می رود. این مدل برای جامعه ای به کار گرفته می شود که کاملاً بسته است یا به عبارتی افزایش و کاهش جمعیت ندارد. همچنین فرد بعد از رهایی از طاعون سیاه برای همیشه ایمن می شود.

^۱ Kermack and McKendrick

^۲ Biological Mathematics

مدل مذکور به صورت زیر می باشد.

$$\frac{dS}{dt} = -rSI$$

$$\frac{dI}{dt} = rSI - \lambda I$$

$$\frac{dR}{dt} = \lambda I$$

$S(t)$ ، $I(t)$ ، $R(t)$ به ترتیب نشانه تعداد افراد مستعد، تعداد افراد آلوده و تعداد افراد ایمن شده (و احیاناً فوت شده) در زمان t است. پارامترهای r و λ به ترتیب سرعت انتقال بیماری و سرعت بهبود هستند. تفسیر این مدل آسان است. جمعیت افراد مستعد به واسطه فعل و انفعال آنها کم می شود و به همان نسبت تعداد افراد آلوده به واسطه مکانیزم افزایش می یابد. از طرف دیگر چون تعدادی از افراد آلوده معالجه می شوند از جمعیت افراد آلوده کاسته شده و در رده افراد ایمن شده قرار می گیرند.

شناخت ریاضیاتی اپیدمی با سایر دانش ها متفاوت می باشد زیرا خود را به اعتبار بخشی آزمایشات معطوف نمی کند؛ چرا که آزمایش و تجربه، گاه بسیار سخت و گاه هم غیر اخلاقی می باشد. مدل بندی ریاضی به عنوان ابزاریست برای مقایسه استراتژی های مختلف که طرح ریزی یک همه گیری قابل پیش بینی را فراهم می آورد. همچنین هدف دیگر مدل بندی اپیدمیولوژی به وجود آوردن پیش بینی هایی در مورد وقوع و حادث شدن بیماری در آینده می باشد. در واقع می توان گفت مدل بندی ریاضی ابزار مهمی برای آنالیز نحوه شیوع و کنترل بیماری است. فرایند فرمول بندی مدل موجب روشن شدن فرضیات، مقادیر و پارامترها می باشد. پارامترهای به کار برده شده در یک مدل همه گیری باید تفسیر واضحی داشته باشند. در کنار اهداف و مزیت

های فراوان مدل های ریاضی، آنها دارای محدودیت هایی نیز می باشند. اولین و واضح ترین این محدودیت ها این است که تمامی آنها نوعی ساده سازی از واقعیت هستند؛ چرا که همان طور که گفته شد، آزمایش و تجربه برای تخمین داده ها، گاه غیر ممکن و غیر اخلاقی است (البته اگر تحقیق و بررسی فرضیات بصورت درست غیر ممکن باشد، پذیرش فرضیات با یک ماهیت مقداری می تواند با ارزش باشد). هنگام فرمول بندی یک بیماری خاص، لازم است تصمیم گرفته شود که کدام عامل حذف و کدام عامل در نظر گرفته شود. این انتخاب اغلب به سوال های خاصی که پرسیده می شود و باید به آنها جواب داده شود، بستگی دارد. مدل های ساده این مزیت را دارند که دارای پارامترهای کمی می باشند اما این اشکال بر آن وارد است که بسیار خام و غیر واقعی است. مدل های پیچیده ممکن است واقعی تر باشند، اما شامل پارامترهای بسیاری است که در نظر گرفتن تمامی آنها، محاسبات را سخت و پیچیده می کند.

ساده سازی مدل بندی و پذیرش فرضیات، گاه منجر به پیش بینی های نادرستی می شود. مهمترین دلیل تفاوت بین رفتارها و پیش بینی های مدل ریاضی و شیوع حقیقی بیماری، این است که انتقال بیماری در واقعیت بر اساس فعل و انفعالات نوع بشر و رفتارها و عکس العمل های هوشمندانه ی آنها است. در واقع انسان ها هرگز از راه های قابل پیش بینی با دلیل همچون باکتری ها و سلول ها، رفتار نمی کنند. بنابراین باید هم قابلیت ها و هم محدودیت های مدل بندی ریاضی را پذیرفت.

جزئیات تاریخ علم امراض مسری به لحاظ ریاضی و اصول اولیه مدل بیماری های واگیردار *SIR*، ممکن است در کتاب هایی از بایلی^۳، ماری^۴، اندرسن و می^۵ یافت شود. انتقال بیماری واگیردار یک فرایند پویا

^۳ Bailey

^۴ Murray

^۵ Anderson and May

است که توسط تعامل بین افراد مستعد و افراد آلوده پدید می آید. عملکرد مدل های SIR بر اساس روش انتقال از افراد آلوده به مستعد طراحی شده و ساخته می شود. در طول چند دهه اخیر، چنین فرض هایی با تعدادی سؤالات و برآیند آن، تعداد معقول توابع انتقال که از جهات چشم گیری مورد توجه بوده اند مواجه بوده است. معمولاً اگر درجه عفونت افزایش یابد موقعیت جامعه شناسی، روانشناسی و یا دیگر دستگاه ها تحت تأثیر کامل قرار می گیرد. اخیراً برای شیوع بیماری سارس^۶، تأثیر پوشیدن ماسک، قرنطینه، جداسازی و غیره ثابت شده است. (بیماری سارس همان اپیدمی معروف (در شرق آسیا) سال ۲۰۰۱ بود که دنیا را به خود مشغول کرد)

در واقع اگر به واکنش سلامت عمومی رسیدگی نمی شد بیماری واگیردار فرق زیادی با مدل ایده آل نداشت. با جداسازی کودکان بیمار و کارگران از جامعه باقیمانده، شیوع و گسترش بیماری سرخک می تواند کنترل شود. قرنطینه و جداسازی، برنامه ایمنی شناخته شده خیلی خوبی برای بیماری خاص، هستند. اگر آبله کوچکی ظاهر شود، بسیار مفید است. پیشگیری از طاعون بستگی به زمان اجرای برنامه روش جلوگیری از ابتلا دارد که شامل: آموزش عمومی، به کار بردن حشره کش برای کشتن کک ها، استفاده از برنامه مختلف محافظت شخصی (دفع کردن حشره ها) و دوری از حیوانات مرده و بیماری.

یک پارامتر اصلی، گسترش بیماری ها را کنترل می کند و به رفتار طولانی مدت و سطح واکنش زنی ضروری برای ریشه کنی، بستگی دارد. این پارامتر R_0 تعداد تکثیر اساسی است. R_0 توسط محقق بیماری واگیردار به عنوان تعداد متوسط علت موارد ثانویه توسط اشخاص آلوده در یک جمعیت کاملاً مستعد، تعریف می شود. زمانی که $R_0 > 1$ بیماری می تواند وارد جمعیت کاملاً مستعد شود و تعداد موارد آن افزایش خواهد

^۶ SARS

یافت؛ و زمانی که $R_0 < 1$ برای همیشه گسترش بیماری متوقف خواهد شد. بنابراین R_0 به ما می گوید که جمعیت چقدر در خطر ابتلا به بیماری است. امروزه نتایج تعدادی از محققین بیماری واگیردار در دوره تعداد تکثیر اساسی، آماده شده است.

این پایان نامه شامل سه فصل است. در فصل اول بعضی از تعاریف و مفاهیم اولیه که در فصل های بعد مورد استفاده قرار می گیرند را بیان می کنیم.

فصل دوم تحلیل دینامیکی یک بیماری با مدل SIR می باشد که شامل سه بخش است و برگرفته از مرجع [۶] می باشد. در بخش اول به تحلیل و بررسی مدل بیماری می پردازیم. تعادل عاری از بیماری را می شناسیم و همچنین با توجه به تعریف R_0 تعادل بیماری واگیردار را تشخیص می دهیم و با استفاده از تعاریف و قضایای مطرح شده شرایط پایداری برای تعادل عاری از بیماری و تعادل بیماری واگیردار را مورد بررسی قرار می دهیم. در بخش دوم به ارائه شبیه سازی کامپیوتری مختلف سیستم می پردازیم، به طور شهودی به رابطه بین پارامتر β (میزان تأثیر مثبت روی افراد آلوده) و پارامتر α (میزان تأثیر منفی روی افراد مستعد) با پارامتر I^* (تعادل افراد آلوده) پی خواهیم برد. در بخش انتهایی به نتیجه گیری کلی از تحلیل مدل بیماری می پردازیم.

فصل سوم که مشتمل بر دو بخش است؛ برگرفته از مرجع [۵] است. در این فصل تابع لیاپونوفی را برای مدل SIR و $SIRS$ مطرح می کنیم. در بخش نخست به تحلیل و بررسی مدل SIR و $SIRS$ می پردازیم و تعادل های آن را بدست می آوریم و در بخش بعدی با استفاده از تابع لیاپونوف مطرح شده به پایداری این نقاط تعادل می پردازیم.

فصل ۱

تعاريف و مفاهيم اوليه

در این فصل مفاهیم و تعاریف بنیادی ای را که در فصل های بعد مورد استفاده قرار می گیرند، بیان می کنیم. ابتدا با تعریف اولیه سیستم دینامیکی و تعاریف وابسته به آن شروع می کنیم. در ادامه مفاهیم مربوط به تابع لیاپونوف و قضایای مورد استفاده را خواهیم آورد. بدین منظور از مرجع [۱] استفاده می کنیم.

۱.۱ سیستم دینامیکی

تعریف: فرض کنید $\phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته حقیقی مقدار تعریف شده بروی ضرب مجموعه اعداد صحیح و مجموعه اعداد حقیقی می باشد. حال فرض کنید دو شرط زیر را داشته باشیم:

$$\phi(0, x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad ۱.$$

$$\phi(K + L, x) = \phi(K, \phi(L, x)) \quad \forall K, L \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R} \quad ۲.$$

گوییم ϕ یک نیم سیستم دینامیکی گسسته یا نیم شار گسسته^۱ است، اگر تنها شرط ۲ برقرار باشد. در این تعریف، نیم شار از این جهت گسسته گفته می شود که یک خانواده یک پارامتری از نگاشت های پیوسته است که این پارامترها در مراحل گسسته و بروی اعداد صحیح تغییر می کند. به آن یک بعدی گفته می شود زیرا که بروی مجموعه اعداد حقیقی عمل می کند. می توانیم نیم شاری به طور مشابه بروی \mathbb{R}^n نیز تعریف کنیم که آن را n -بعدی می نامیم. به تابع ϕ یک شار کامل^۲ گفته می شود، اگر شرط ۱ هم برقرار باشد.

شرط ۱ می گوید که برای $K = 0$ نگاشت $\phi(0, \cdot)$ همانی است. (شاید بتوان گفت که اگر \mathbb{Z} زمان باشد،

^۱ Discrete Semiflow

^۲ Flow