بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه مقطع کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

عنوان

یک مدول دوری جدید برای جبرهای هاف

استاد راهنما
دکتر قربانعلی حقیقت‌دوست بناب

اساتید مشاور
دکتر جعفر امجدی   دکتر عادل رضایی

پژوهشگر
لیلا صدقی قدیم

بهمن ۱۳۸۶

تبریز – ایران

تأییدیهٔ اعضاء هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

اعضاء هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامهٔ خانم/ آقای لیلا صدوقی مقدم
تحت عنوان تشکیل جدول دوری جدید برای جبرهای هاف
را از نظر شکل و محتوا بررسی نموده، پذیرش آن را جهت فیل به درجهٔ کارشناسی ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضاء هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	[illegible]	استادیار	
۲- استاد مشاور	رضا نژاد مقدم		
۳- استاد ناظر	یوسف زمانی	استادیار / دانشیار	
۴- استاد ناظر	فرضعلی ایزدی	استادیار	
۵- نمایندهٔ شورای تحصیلات تکمیلی	ناصر آقازاده	استادیار	

۱۳۸۷ /۱۲/ ۲۸

(نمونهٔ شماره (۱) مخصوص کارشناسی ارشد)

تقدیم به:

پدر

و

مادرم

۱۳۸۷ /۲/ ۲۸

چکیده

هدف از این رساله معرفی جبرهای هاف و مدول دوری برای این جبرها و نیز استفاده از ابزارهای همولوژی جبری برای محاسبه همولوژی دوری مدولهای دوری می‌باشد.

این پایان نامه شامل ٦ فصل می‌باشد. در فصل اول، تعاریف و مفاهیم اساسی مورد نیاز آورده شده است. فصل دوم آن، به معرفی مدول دوری جدید برای جبرهای هاف می‌پردازد. در فصل سوم، هم–عمل جبرهای هاف روی یک جبر مورد بحث قرار گرفته است. فصل چهارم، شامل همولوژی جبرهای هاف بر اساس همولوژی گروهی می‌باشد. در فصل پنج، همولوژی دوری دو نمونه از جبرهای کوانتومی محاسبه شده است.

۵ فصل فوق، مبتنی بر مقاله‌ی A New Cyclic Module For Hopf Algebras هست که کار آقایان پروفسور خلخالی [۱] و دکتر رنگی پور[۲] می‌باشد. در فصل شش، $U_q(sl_3)$ را با ساختار جبر هاف معرفی می‌کنیم که بر اساس کارهای انجام شده در فصل پنجم برای $U_q(sl_2)$ می‌باشد. این کار تا مرحله یافتن زوج همنهشت درگیر پیش رفته است. امید است که در آینده با پیدا کردن رزولوشن مناسب برای $U_q(sl_3)$ و محاسبه همولوژی هوخشیلد برای آن، $\widehat{HC}_n(U_q(sl_3))$ محاسبه شود.

واژه‌های کلیدی: هندسه‌ی ناجابجایی، جبرهای هاف، زوج همنهشت درگیر، همولوژی هوخشیلد، همولوژی دوری، رزولوشن

---

[۱] Masoud Khalkhali

[۲] Bahram Rangipour

قدردانی

در آغاز حمد و سپاس بی‌کران به درگاه خداوند تبارک و تعالی که هر توفیقی از جانب اوست. حمد و سپاس به خاطر توفیقی که در کسب علم عطایم کرده، استغفار از درگاهش به خاطر ناسپاسیهای فراوانم و استمداد از محضرش در ادامه‌ی این راه.

وظیفه‌ی خود می‌دانم تا از تمامی عزیزانی که در به ثمر نشستن زحمات این حقیر، مرا یاری فرموده‌اند، تشکر و قدردانی نمایم که یقیناً با این چند کلمه به انجام نخواهد رسید.

استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر قربانعلی حقیقت‌دوست که همواره با راهنماییهای بی‌دریغ خود روشنگر مسیر اینجانب در تهیه این رساله بوده‌اند.

اساتید گرامی جناب آقایان دکتر زمانی و دکتر صادقی با سمینارهای پر باری که در مرکز تحقیقات ارائه دادند.

اساتید محترم جناب آقای دکتر جعفر امجدی و جناب آقای دکتر عادل رضایی که زحمت مشاوره‌ی این پایان‌نامه را تقبل فرمودند.

جناب آقای دکتر ایزدی و جناب آقای دکتر زمانی که داوری این پایان‌نامه را پذیرفتند.

سایر اساتید محترم و دبیران عزیزی که در طول دوران تحصیلم افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام.

تک تک اعضای خانواده‌ی عزیزم بویژه مادر مهربانم که همواره در تمام دوران تحصیل یار و یاور من بوده‌اند.

دوستان عزیزم خانمها پورنظمی، دهقان و اشرفی که با تشویقهای خود مرا دلگرم نمودند.

برای تمام این عزیزان سربلندی، سلامتی و موفقیت در تمام مراحل زندگی آرزو می‌کنم.

امید است مطالعه‌ی این پایان‌نامه رضایت خاطر صاحبان نظر را فراهم سازد.

لیلا صدقی قدیم

بهمن ۱۳۸۶

فهرست مندرجات

پیشگفتار

هندسه‌ی ناجابجایی، شاخه‌ای بسیار گسترده و جالب در ریاضیات و سایر رشته‌ها است. جبرهای هاف و قضایای همولوژی جبری نقش اساسی در این شاخه دارد که به عنوان مقدمات این شاخه مطرح می‌شوند.

یکی از کشفیات بزرگ علمی در قرن بیستم، کشف مکانیک کوانتومی توسط هایزنبرگ در سال ۱۹۲۵ بود. از دیدگاه ریاضی، عبور از مکانیک کلاسیک به مکانیک کوانتومی به منزله‌ی گذر از جبر جابجایی مشاهده‌پذیرهای کلاسیک به جبر ناجابجایی مشاهده‌پذیرهای کوانتومی است. در مکانیک کلاسیک یک چیز مشاهده‌پذیر (انرژی، موقعیت، اندازه‌ی حرکت و ...) تابعی روی یک چندگونا است که فضای فاز سیستم نامیده می‌شود. هایزنبرگ شیء مشاهده‌پذیر کوانتومی را به عنوان عملگر خودالحاقی روی فضای هیلبرت، که فضای موقعیت سیستم نامیده می‌شود، معرفی کرد. ازاین رو، جبر جابجایی توابع روی یک فضا با جبر ناجابجایی عملگرها روی فضای هیلبرت جایگزین شد.

در حدود ۵۰ سال بعد، یک ریاضیدان فرانسوی به نام آلن کُن دریافت که با روش مشابهی می‌توان مفاهیم کلاسیک فضا (فضای اندازه، فضای موضعاً فشرده یا فضای هموار) را می‌توان با ایده‌ی جدید که به وسیله‌ی جبر ناجابجایی بیان می‌شود جایگزین کرد. نظریه‌ی جدید ایجاد شده قابلیت‌های شگرفی حتی در مسائل کلاسیک حل نشده‌ی هندسه، جبر و توپولوژی دارد. نظریه‌ی کُن، که امروزه عموماً هندسه‌ی ناجابجایی خوانده می‌شود، ریشه‌های بسیار مستحکمی در قسمت‌های متنوعی از ریاضیات همچون آنالیز تابعی، جبر عملگرها روی فضای هیلبرت، نظریه‌ی k، توپولوژی جبری و هندسه‌ی دیفرانسیل دارد. یکی از ویژگیهای هندسه‌ی ناجابجایی بیان مفاهیم هندسی به زبان جبر می‌باشد ولی همچنان محدودیتهای هندسه‌ی کلاسیک را دارا می‌باشد. بنابراین برای درک این رابطه با هندسه‌ی کلاسیک باید دوگانگی جبر جابجایی و هندسه بررسی شود. هدف اصلی در هندسه‌ی ناجابجایی بحث جبرهای ناجابجایی به عنوان فضاهای ناجابجایی و سعی بر توسیع ابزارهای هندسی،

توپولوژی و تحلیل این مجموعه‌های جدید می‌باشد.
در سال ۱۹۹۸ آلن کُن و هنری مسکوویچی در مطالعه‌شان نظریه‌ی اندیس عملگرهای بیضوی متقاطع را برای نظریه‌ی (کو)همولوژی دوری جبرهای هاف گسترش دادند که می‌تواند به عنوان توسیع همولوژی گروهی و همولوژی جبرهای لی برای جبرهای هاف و در حالت خاص برای جبرهای کوانتومی در نظر گرفته شود. یکی از ابزارهای اساسی برای محاسبه‌ی کوهمولوژی دوری نگاشت مشخصه‌ی ناجابجایی $HC^*_{(\delta,\sigma)}(\mathcal{H}) \longrightarrow HC^*(A)$ می‌باشد که در آن $\mathcal{H}$ یک جبر هاف با زوج همنهشت درگیر (δ,σ) و A نیز یک جبر به عنوان $\mathcal{H}-$ مدول می‌باشند.
برای بدست آوردن همولوژی دوری می‌توان دوگان نظریه‌ی فوق را نیز بکار برد که اولین بار بوسیله‌ی کراینیک [۳] برای جبر گروهی و در حالت کلی برای جبرهای هاف بکار برده شد.
پروفسور خلخالی و دکتر رنگی‌پور قضیه‌ای مشابه قضیه‌ی کروبی [۴] را برای جبرهای هاف هم-جابجایی بیان و اثبات کرده‌اند که با استفاده از آن می‌توان همولوژی دوری را برای جبرهای هاف هم-جابجایی محاسبه کرد و در ادامه روشی برای محاسبه‌ی همولوژی دوری جبرهای کوانتومی ارائه داده‌اند.

[۳] Crainic
[۴] Karroubi

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اصلی

در این فصل تعاریف و مفاهیم اصلی مطرح خواهد شد.

۱.۱ جبر های هاف

در این بخش تعاریف و قضایای جبرهای هاف بررسی می‌شود که دانستن آنها برای مطالعه‌ی فصلهای آتی ضرورت دارد. برای مطالعه‌ی دقیق وبیشتر می‌توان به‌مراجع [۴] و [۱۰] مراجعه کرد.
در تمام تعاریف و قضایا k نشان دهنده‌ی حلقه‌ی جابجایی است.

۱.۱.۱ تعریف. جبر A روی k، با سه تایی (A,μ,η) مشخص می‌شود که در آن A یک $k-$ فضا (فضای برداری) می‌باشد ، $\mu : A\otimes A \longrightarrow A$ و $\eta : k \longrightarrow A$ نگاشتهای $k-$ خطی هستند که به ترتیب نگاشتهای حاصلضرب و یکه نامیده می‌شوند. به طوری که دیاگرامهای

$$\begin{tikzcd} A\otimes A\otimes A \arrow[r, "I_A\otimes\mu"] \arrow[d, "\mu\otimes I_A"'] & A\otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A\otimes A \arrow[r, "\mu"] & A \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A\otimes k \arrow[r, "I_A\otimes\eta"] \arrow[dr, "\cong"'] & A\otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ & A \end{tikzcd}$$

جابجایی باشند. یعنی

(خاصیت یکانی) $\qquad \mu\circ(I_A\otimes\eta)=\mu\circ(\eta\otimes I_A)=I_A$

$$\mu\circ(I_A\otimes\mu)=\mu\circ(\mu\otimes I_A) \qquad \text{(شرکت‌پذیری حاصلضرب)}$$

برای هر جبر A، جبر مقابل A^{op} به عنوان یک جبر با همان فضای برداری A و حاصلضرب $\mu_{A^{op}}:=\mu_A\circ\tau$ تعریف می‌شود که در آن τ عملگر فیلیپ می‌باشد:

$$\tau: A\otimes A\longrightarrow A\otimes A, \qquad \tau(a\otimes b)=b\otimes a$$

اگر $A=A^{op}$ باشد، جبر A جابجایی گفته می‌شود.
بسیاری از جبرها به عنوان خارج قسمت جبرهای آزاد یا جبرهای تانسوری تعریف می‌شوند.
فرض کنید $k=\mathbb{C}$ و $\{x_i \mid i\in I\}$ یک مجموعه‌ی اندیسگزار از مولدها باشد. فرض کنید

$$I^\circ=\{\circ\}; \quad \circ\notin I \quad , \quad I^\infty=\bigcup_{n\in\mathbb{N}_\circ} I^n$$

برای $i=(i_۱,i_۲,\cdots,i_k)\in I^k$ و $j=(j_۱,j_۲,\cdots,j_n)\in I^n$ قرار می‌دهیم:

$$(i,j)=(i_۱,\cdots,i_k,j_۱,\cdots j_n) \quad , \quad x_i:=x_{i_۱}\cdots x_{i_k}$$

و نیز برای $\circ\in I^\circ$ و $i\in I_k$ قرار می‌دهیم:

$$(\circ,i)=(i,\circ):=i \quad , \quad x_\circ=۱$$

جبر آزاد $\mathbb{C}<x_i>$ با مولدهای x_i، $i\in I$ به صورت زیر تعریف می‌شود:
$\mathbb{C}<x_i>$ یک فضای برداری مختلط همراه با پایه‌ی $\{x_i \mid i\in I^\infty\}$ و ضرب $x_ix_j:=x_{(i,j)}$، $i,j\in I^\infty$ می‌باشد. جبر $\mathbb{C}<x_i>$ دارای خاصیت جهانی می‌باشد یعنی برای هر زیر مجموعه‌ی اندیسگزاری شده $\{a_i \mid i\in I\}$ از جبر A هومورفیسم جبری منحصربفرد $\varphi:\mathbb{C}<x_i>\longrightarrow A$ وجود دارد به طوری که

$$\varphi(x_i)=a_i, \qquad \forall i\in I$$

۲.۱.۱ تعریف . قرار می‌دهیم

$$V^{\otimes n}=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{\text{تا } n} \quad , \quad V^{\otimes\circ}=k$$

جمع مستقیم $T(V) := \oplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$ از فضای برداری V همراه با ضرب

$$x_n y_k := x_n \otimes y_k \qquad \forall x_n \in V^{\otimes n} \quad , \quad y_k \in V^{\otimes k}$$

جبر تانسوری $T(V)$ روی V نامیده می‌شود. جبر $T(V)$ خاصیت جهانی دارد یعنی برای هر نگاشت خطی $\varphi_1 : V \longrightarrow A$ از V به یک جبر A، هوموروفیسم جبری منحصربفرد $\varphi : T(V) \longrightarrow A$ وجود دارد به طوری که

$$\varphi(v) = \varphi_1(v) \quad \forall v \in V$$

خاصیت جهانی $T(V)$ و $\mathbb{C} < x_i >$ واقعیت زیر را بیان می‌کند:
برای هر پایه‌ی $\{x_i \mid i \in I\}$ از فضای برداری V ایزومورفیسم جبری منحصربفرد φ از جبر $T(V)$ به $\mathbb{C} < x_i >$ وجود دارد به طوری که

$$\varphi(x_i) = x_i \qquad \forall i \in I$$

اغلب جبر A با مولدهای $x_1, \cdots, x_r$ و روابط

$$f_k(x_1, \cdots, x_r) = 0, \qquad k = 1, 2, \cdots, s$$

معرفی می‌شود یعنی A جبر خارج قسمتی جبر آزاد $\mathbb{C} < x_i >$ با مولدهای $x_1, \cdots, x_r$ بوسیله ایده‌آل دو طرفه‌ی I از $\mathbb{C} < x_i >$ که بوسیله‌ی $f_k(x_1, \cdots, x_r) = 0$ $(k = 1, 2, \cdots, s)$ تولید می‌شود، می‌باشد.
فرض کنید A و B دو جبر باشند. نگاشت k- خطی $\varphi : A \longrightarrow B$ هوموروفیسم جبری نامیده می‌شود هرگاه

$$\varphi(aa') = \varphi(a)\varphi(a') \quad , \quad \varphi(1_A) = 1_B$$

۳.۱.۱ تعریف . هم- جبر C، با سه تایی (C, Δ, ε) مشخص می‌شود که در آن C یک فضای برداری می‌باشد، $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ و $\varepsilon : C \longrightarrow k$ نگاشتهای k- خطی هستند که به ترتیب هم-ضرب و هم-یکه نامیده می‌شوند، به طوری که دیاگرامهای

$$\begin{tikzcd} C\otimes C\otimes C & & C\otimes C \arrow[ll, "I_C\otimes\Delta"'] \\ C\otimes C \arrow[u, "\Delta\otimes I_C"] & & C \arrow[ll, "\Delta"'] \arrow[u, "\Delta"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C\otimes k & C\otimes C \arrow[l, "I_C\otimes\varepsilon"'] \\ & C \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ul, "\cong"] \end{tikzcd}$$

جابجایی باشند. یعنی

$(I_C\otimes\varepsilon)\circ\Delta=(\varepsilon\otimes I_C)\circ\Delta=I_C$ (خاصیت هم‌−یکانی)

$(I_C\otimes\Delta)\circ\Delta=(\Delta\otimes I_C)\circ\Delta$ (هم‌−شرکت‌پذیری)

هم‌−جبر C هم‌−جابجایی نامیده می‌شود هرگاه داشته باشیم: $\Delta=\tau\Delta$، که در آن τ عملگر فیلیپ می‌باشد.

۴.۱.۱ نماد سویدلر . فرض کنید (C,Δ,ε) یک هم‌−جبر و $c\in C$ باشد عضو $\Delta(c)\in C\otimes C$ به صورت مجموع متناهی $\Delta(c)=\sum_i c^{۱i}\otimes c^{۲i}$ می‌باشد که این نمایش $\Delta(c)$ منحصربفرد نیست. برای سادگی با حذف اندیس i داریم

$$\Delta(c)=\sum_{(c)}c^{(۱)}\otimes c^{(۲)}$$

با استفاده از استقراء $\Delta^{(n)}:C\longrightarrow C^{\otimes(n+۱)}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta^{(n)}=(\Delta\otimes I^{n-۱})\circ\Delta^{(n-۱)} \quad \text{و} \quad \Delta^{(۱)}=\Delta$$

عضو $\Delta^{n}(c)\in C^{\otimes(n+۱)}$ به صورت زیر نشان داده می شود:

$$\Delta^{(n)}(c)=\sum_{(c)}c^{(۱)}\otimes c^{(۲)}\otimes\cdots\otimes c^{(n+۱)}$$

از هم‌−شرکت‌پذیری داریم:

$$((\Delta\otimes I_C)\circ\Delta)(c)=((I_C\otimes\Delta)\circ\Delta)(c)\Longrightarrow(\Delta\otimes I_C)(\sum_{(c)}c^{(۱)}\otimes c^{(۲)})=(I_C\otimes\Delta)(\sum_{(c)}c^{(۱)}\otimes c^{(۲)})$$

$$\Longrightarrow\sum_{(c)}\Delta(c^{(۱)})\otimes c^{(۲)}=\sum_{(c)}c^{(۱)}\otimes\Delta(c^{(۲)})$$

$$\Longrightarrow\sum_{(c)}(c^{(۱)})^{(۱)}\otimes(c^{(۱)})^{(۲)}\otimes c^{(۲)}=\sum_{(c)}c^{(۱)}\otimes(c^{(۲)})^{(۱)}\otimes(c^{(۲)})^{(۲)}$$

هم‌−شرکت‌پذیری برای $n=۳$ به صورت زیر تعمیم داده می‌شود:

$$\sum_{(c)}\Delta(c^{(۱)})\otimes c^{(۲)}\otimes c^{(۳)}=\sum_{(c)}c^{(۱)}\otimes\Delta(c^{(۲)})\otimes c^{(۳)}=\sum_{(c)}c^{(۱)}\otimes c^{(۲)}\otimes\Delta(c^{(۳)})$$

این مفهوم برای n های بزرگتر از ۳ به صورت زیر تعمیم داده می‌شود:

$$\begin{aligned}\sum_{(c)} \Delta(c^{(1)}) \otimes c^{(2)} \otimes \cdots \otimes c^{(n+1)} &= \sum_{(c)} c^{(1)} \otimes \Delta(c^{(2)}) \otimes c^{(3)} \otimes \cdots \otimes c^{(n+1)} \\ &= \cdots = \sum_{(c)} c^{(1)} \otimes c^{(2)} \otimes \cdots \otimes c^{(n)} \otimes \Delta(c^{(n+1)})\end{aligned}$$

با استفاده از نماد سویدلر مفهوم هم-یکانی به صورت زیر بیان می‌شود:

فرض کنید $f : C\times C\times\cdots\times C \longrightarrow C$ یک تابع چند خطی روی حاصلضرب دکارتی $\underbrace{C \times C \times \cdots \times C}_{n \text{ تا}}$

و $\bar{f}$ تابع القاء شده روی $\underbrace{C \otimes C \otimes \cdots \otimes C}_{n \text{ تا}}$ باشد، یعنی

$$\bar{f}(\sum_{(c)} c^{(1)} \otimes c^{(2)} \otimes \cdots \otimes c^{(n)}) = \bar{f}(\Delta^{(n-1)}(c)) = \sum_{(c)} f(c^{(1)}, c^{(2)}, \cdots, c^{(n)})$$

پس $\varepsilon \otimes I : C \otimes C \longrightarrow k \otimes C \cong C$ از نگاشت $\varepsilon \times I : C \times C \longrightarrow C$ به صورت زیر القاء می‌شود:

$$(c,d) \mapsto \varepsilon(c)d$$

از خاصیت هم-یکه نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}c &= (\varepsilon \otimes I)\Delta(c) = (\varepsilon \otimes I)\sum_{(c)} c^{(1)} \otimes c^{(2)} = \sum_{(c)} \varepsilon(c^{(1)})c^{(2)} \\ c &= (I \otimes \varepsilon)\Delta(c) = (I \otimes \varepsilon)\sum_{(c)} c^{(1)} \otimes c^{(2)} = \sum_{(c)} c^{(1)}\varepsilon(c^{(2)})\end{aligned}$$

بنابراین

$$c = \sum_{(c)} \varepsilon(c^{(1)})c^{(2)} = \sum_{(c)} c^{(1)}\varepsilon(c^{(2)})$$

از مفهوم سویدلر نتیجه می‌شود که

$$\sum_{(c)} c^{(1)} \otimes \cdots \otimes \varepsilon(c^{(i)}) \otimes \cdots \otimes c^{(n+1)} = \sum_{(c)} c^{(1)} \otimes \cdots \otimes c^{(n)}$$

۵.۱.۱ تعریف. اگر C و D دو هم-جبر باشند و $g : C \longrightarrow D$ یک نگاشت خطی باشد g یک مورفیسم از هم-جبرها گفته می‌شود هرگاه دیاگرامهای

$$
\begin{tikzcd}
D\otimes D & C\otimes C \arrow[l, "g\otimes g"'] \\
D \arrow[u, "\Delta_D"] & C \arrow[l, "g"] \arrow[u, "\Delta_C"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
k & D \arrow[l, "\varepsilon_D"'] \\
 & C \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, "\varepsilon_C"]
\end{tikzcd}
$$

جابجایی باشند. یعنی:

$$\varepsilon_D(g(c))=\varepsilon_C(c) \quad , \quad \sum_{(c)}(g(c))^{(1)}\otimes(g(c))^{(2)}=\sum_{(c)}g(c^{(1)})\otimes g(c^{(2)})$$

۶.۱.۱ تعریف. فرض کنید C یک هم-جبر و A یک جبر یکه باشد. با فرض اینکه $f,g:C\longrightarrow A$ نگاشتهای k-خطی باشند ضرب **پیچشی** f,g را با $f*g$ نشان می‌دهیم و به صورت ترکیب زیر تعریف می‌کنیم:

$$C\xrightarrow{\Delta}C\otimes C\xrightarrow{f\otimes g}A\otimes A\xrightarrow{\mu}A$$

$$(f*g)(c)=\mu\circ(f\otimes g)\Delta(c)=\mu\circ(f\otimes g)(\sum_{(c)}c^{(1)}\otimes c^{(2)})=\sum_{(c)}f(c^{(1)})g(c^{(2)})$$

۷.۱.۱ گزاره . فرض کنید C یک هم-جبر و A یک جبر باشد آنگاه $L(C,A)$ همه‌ی نگاشتهای k-خطی از C به A با ضرب پیچشی یک جبر با یکه‌ی $\eta_A\circ\varepsilon_C$ است.

اثبات: مرجع [۴] را ببینید. □

۸.۱.۱ گزاره . دوگان فضای برداری C^* از هم-جبر C یک جبر با ضرب پیچشی است.

اثبات: از قضیه‌ی قبل با فرض $A=k$ نتیجه می‌شود که $C^*=L(C,k)$ یک جبر است. □

۹.۱.۱ گزاره . دوگان A^* از یک جبر A در حالت کلی هم-جبر نیست.

توضیح: اگر A با بعد متناهی باشد داریم: $A^*\otimes A^*=(A\otimes A)^*$. ولی اگر A با بعد نامتناهی باشد فقط رابطه‌ی $A^*\otimes A^*\subsetneq(A\otimes A)^*$ را داریم و $\Delta_{A^*}(f):=f\circ\mu_A$ ممکن است در $A^*\otimes A^*$ قرار نگیرد. به عنوان مثال $A=\mathbb{C}[x]$ یک جبر با بعد نامتناهی است و $A^*=\{f\mid f:\mathbb{C}[x]\longrightarrow\mathbb{C}\}$ یک هم-جبر نیست. □

۱۰.۱.۱ تعریف. فرض کنید A یک جبر باشد. یک A– مدول چپ یک فضای N همراه با یک نگاشت k– خطی $\psi : A\otimes N \longrightarrow N$ تعریف می‌شود به طوری که دیاگرامهای

$$\begin{tikzcd} k\otimes N \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\eta\otimes I_N"'] & N \\ A\otimes N \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A\otimes A\otimes N \arrow[r, "I_A\otimes\psi"] \arrow[d, "\mu\otimes I_N"'] & A\otimes N \arrow[d, "\psi"] \\ A\otimes N \arrow[r, "\psi"] & N \end{tikzcd}$$

جابجایی باشند. که در آن $\psi : A\otimes N \longrightarrow N$ به صورت $\psi(a\otimes n) = a.n$ در نظر گرفته می‌شود.

۱۱.۱.۱ تعریف . اگر C یک هم–جبر باشد C– **هم–مدول** چپ یک فضای M همراه با نگاشت k– خطی $\rho : M \longrightarrow C\otimes M$ تعریف می‌شود به طوری که دیاگرامهای

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr] & C\otimes M \arrow[d, "\varepsilon\otimes I_M"] \\ & k\otimes M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & C\otimes M \arrow[d, "\Delta\otimes I_M"] \\ C\otimes M \arrow[r, "I_C\otimes\rho"] & C\otimes C\otimes M \end{tikzcd}$$

جابجایی باشند. یعنی:

$$(\varepsilon\otimes I_M)\circ\rho = I_M \qquad (\Delta\otimes I_M)\circ\rho = (I_C\otimes\rho)\circ\rho$$

C– هم–مدول راست نیز به طور مشابه تعریف می‌شود.

۱۲.۱.۱ تعریف. فرض کنیم M و N دو C– هم–مدول چپ باشند. نگاشت k– خطی $f : M \longrightarrow N$ را یک نگاشت C– **هم–خطی** گویند هر گاه دیاگرام

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_M"'] & N \arrow[d, "\rho_N"] \\ C\otimes M \arrow[r, "I_C\otimes f"] & C\otimes N \end{tikzcd}$$

جابجایی باشد. به عبارت دیگر

$$\rho_N \circ f = (I_C \otimes f) \circ \rho_M$$

۱۳.۱.۱ تعریف. جبر دوطرفه ، با پنج تایی $(B,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon)$ مشخص می‌شود به طوری که (B,μ,η) یک جبر و (B,Δ,ε) یک هم-جبر باشد و Δ,ε مورفیسمهای جبری باشند و μ,η مورفیسمهای هم-جبری باشند.

۱۴.۱.۱ تعریف . یک نگاشت هم-معکوس یا متقاطر برای جبر دو طرفه‌ی $\mathcal{H}$، یک نگاشت k-خطی $S:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ است به طوری که

$$S*I = I*S = \eta\varepsilon$$

که در آن $\eta: k\longrightarrow\mathcal{H}$ نگاشت جبری یکه است یعنی:

$$\eta(k) = k.1_{\mathcal{H}}$$

از نماد سویدلر نتیجه می‌شود:

$$\forall h\in\mathcal{H}, \qquad \sum_{(h)} S(h^{(1)})h^{(2)} = \sum_{(h)} h^{(1)}S(h^{(2)}) = \varepsilon(h)$$

۱۵.۱.۱ تعریف. جبر هاف با شش تایی $(\mathcal{H},\mu,\eta,\Delta,\varepsilon,S)$ مشخص می‌شود که $(\mathcal{H},\mu,\eta,\Delta,\varepsilon)$ یک جبر دو طرفه و S نگاشت متقاطر می‌باشد.

۱۶.۱.۱ قضیه . نگاشت متقاطر S از جبر هاف $\mathcal{H}$ یک آنتی هومورفیسم جبری و آنتی هومورفیسم هم-جبری است. به طور معادل

(آنتی هومورفیسم جبری) $\quad S(1)=1$ و $S(h_1h_2)=S(h_2)S(h_1)$

(آنتی هومورفیسم هم-جبری) $\quad \varepsilon\circ S=\varepsilon$ و $\Delta\circ S=\tau\circ(S\otimes S)\circ\Delta$

از نماد سویدلر نتیجه می‌شود که

$$\Delta(S(h)) = \tau\circ(S\otimes S)\sum_{(h)} h^{(1)}\otimes h^{(2)}$$
$$\Longrightarrow \sum_{S(h)} (S(h))^{(1)}\otimes(S(h))^{(2)} = \sum_{(h)} S(h^{(2)})\otimes S(h^{(1)})$$

اثبات: مرجع [۴] را ببینید. □

۱۷.۱.۱ قضیه . برای هر جبر هاف $\mathcal{H}$ عبارات

۱. نگاشت متقاطر S از $\mathcal{H}$ به عنوان نگاشت خطی از $\mathcal{H}$ معکوس‌پذیر است.

۲. جبر دو طرفه‌ی $\mathcal{H}^{op}$ یک جبر هاف است. $(\mu_{\mathcal{H}^{op}} = \mu_{\mathcal{H}} \circ \tau)$

۳. جبر دو طرفه‌ی $\mathcal{H}^{cop}$ یک جبر هاف است. $(\Delta_{\mathcal{H}^{cop}} = \tau \circ \Delta_{\mathcal{H}})$

معادلند.

اثبات: مرجع [۴] را ببینید. □

۱۸.۱.۱ گزاره . نگاشت متقاطر در صورت وجود منحصربفرد است. اگر جبر هاف $\mathcal{H}$ جابجایی یا هم–جابجایی باشد، $S^2 = I$.

اثبات: برای اثبات قسمت اول به [۷] مراجعه کنید. برای اثبات قسمت دوم از قضیه‌ی قبل استفاده می‌کنیم. اگر جبر هاف $\mathcal{H}$، جابجایی یا هم–جابجایی باشد آنگاه داریم: $\mathcal{H}^{op} = \mathcal{H}$ یا $\mathcal{H}^{cop} = \mathcal{H}$. از قضیه‌ی قبل نتیجه می‌شود که S معکوس‌پذیر است. □

۱۹.۱.۱ تعریف . فرض کنید B یک جبر دو طرفه باشد. عنصر غیر صفر $g \in B$ را **عنصر شبه گروه** می‌نامند هرگاه $\Delta(g) = g \otimes g$.

عنصر $x \in B$ را **اولیه** گویند هرگاه $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$. اگر g عنصر شبه گروه باشد از خاصیت هم–یکه نتیجه می‌شود که

$$
\begin{aligned}
& (I \otimes \varepsilon) \circ \Delta(g) = (\varepsilon \otimes I) \circ \Delta(g) = I(g) \\
\Longrightarrow \quad & (I \otimes \varepsilon)(g \otimes g) = (\varepsilon \otimes I)(g \otimes g) = g \\
\Longrightarrow \quad & g\varepsilon(g) = \varepsilon(g)g = g \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon(g) = 1
\end{aligned}
$$

همچنین از خاصیت نگاشت هم–معکوس داریم:

$$
\begin{aligned}
& (S * I)(g) = (I * S)(g) = \eta(\varepsilon(g)) \\
\Longrightarrow \quad & \mu \circ (S \otimes I)\Delta(g) = \mu \circ (I \otimes S)\Delta(g) = \varepsilon(g).1_B \\
\Longrightarrow \quad & S(g)g = gS(g) = 1 \quad \Longrightarrow \quad g^{-1} = S(g)
\end{aligned}
$$

به آسانی می‌توان دید که مجموعه‌ی تمامی عناصر شبه گروه B با عمل ضرب یک گروه تشکیل می‌دهد.

۲۰.۱.۱ قضیه . اگر B یک جبر دو طرفه باشد حاصلضرب دو عنصر شبه گروه، شبه گروه است و اگر x و y عناصر اولیه‌ی B باشند آنگاه، $\varepsilon(x) = \varepsilon(y) = 0$ و عنصر $[x, y] := xy - yx$ نیز اولیه است.
اثبات: مرجع [۴] را ببینید. □

۲۱.۱.۱ تعریف. یک مشخصه جبر هاف $\mathcal{H}$، نگاشت جبری یکه $\delta : \mathcal{H} \longrightarrow k$ می‌باشد یعنی:

$$\delta(h_1 h_2) = \delta(h_1)\delta(h_2) \qquad , \qquad \delta(1_{\mathcal{H}}) = 1_k$$

۲۲.۱.۱ قضیه . فرض کنید A_g زیر مجموعه‌ای از جبر A باشد که A را به عنوان یک جبر تولید می‌کند. با فرض اینکه

$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A \qquad \text{و} \qquad \varepsilon : A \longrightarrow k$$

هومورفیسمهای جبری باشند ($S : A \longrightarrow A$ آنتی‌هومورفیسم جبری باشد) اگر شرط هم- شرکت‌پذیری و شرط هم- یکه (شرط هم- معکوس) برای اعضای A_g برقرار باشند آنگاه، آنها برای اعضای A نیز برقرار هستند. بنابراین A یک جبر دو طرفه (جبر هاف) است.
اثبات: مرجع [۴] را ببینید. □

۲۳.۱.۱ . با استفاده از نماد سویدلر روابط

۱) $\sum_{(h)} \varepsilon(h^{(2)}) \otimes \Delta(h^{(1)}) = \Delta(h)$

۲) $\sum_{(h)} \Delta(h^{(2)}) \otimes \varepsilon(h^{(1)}) = \Delta(h)$

۳) $\sum_{(h)} h^{(1)} \otimes \varepsilon(h^{(3)}) \otimes h^{(2)} = \Delta(h)$

۴) $\sum_{(h)} h^{(1)} \otimes h^{(3)} \otimes \varepsilon(h^{(2)}) = \Delta(h)$

۵) $\sum_{(h)} \varepsilon(h^{(1)}) \otimes h^{(3)} \otimes h^{(2)} = \sum_{(h)} h^{(2)} \otimes h^{(1)}$

۶) $\sum_{(h)} \varepsilon(h^{(1)}) \otimes \varepsilon(h^{(3)}) \otimes h^{(2)} = h$

۷) $\sum_{(h)} h^{(1)} S(h^{(2)}) \otimes h^{(3)} = h$