بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه یزد

مجتمع علوم پایه

دانشکده ریاضی

پایان نامه

کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان:

دیدگاه جبری از قضیه باناخ — استن

استاد راهنما:

دکتر سید محمد صادق مدرس مصدق

استاد مشاور:

دکتر حمید مظاهری تهرانی

پژوهش و نگارش:

حمید رضا خادم‌زاده

مهر ۸۵

تقدیم به:

هر کس مرا کلمه‌ای آموخت

ریاضیات نازیبا در جهان پایدار نیست.

«هیلبرت»

تقدیر و تشکر

در این‌جا بر خود لازم می‌دانم از کلیه کسانی که مرا در انجام این پایان‌نامه یاری و همراهی کرده‌اند، تشکر نمایم. در ابتدا از استاد راهنمای گرامی، جناب آقای دکتر سید محمد صادق مدرس مصدق که با قبول راهنمایی این پایان‌نامه، افتخار بزرگی را نصیب اینجانب کردند، بی‌نهایت سپاسگزارم. از جناب آقای دکتر حمید مظاهری تهرانی بعنوان استاد مشاور، بخاطر راهنمایی‌ها و نیز بخاطر زحمات بی‌دریغشان برای اینجانب، تشکر و قدردانی می‌نمایم. از جناب آقای دکتر سید محمد مشتاقیون که به عنوان داور داخل قبول زحمت نمودند تشکر می‌کنم. همچنین از جناب آقای دکتر حمید رضا افشین که به عنوان داور خارج قبول زحمت نمودند تشکر و قدر دانی می‌کنم. از سرکار خانم عابدینی، منشی دانشکده‌ی ریاضی، بخاطر دلسوزی‌های مادرانه‌شان و نیز زحمات بی‌دریغشان، نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

از دوستان عزیزم صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم. وظیفه‌ی خود می‌دانم که از تمامی اعضای خانواده‌ام، مادر مهربانم، برادران و خواهران عزیزم که همواره قوت قلبی برای ادامه‌ی راهم بوده‌اند، تشکری ویژه و صمیمانه داشته باشم. دلسوزی‌ها و همیاری‌های همه عزیزان را ارج می‌نهم.

مدیریت تحصیلات تکمیلی

صورت‌جلسه دفاعیه پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاعیه پایان نامه تحصیلی آقای **حمیدرضا خادم زاده** دانشجوی کارشناسی ارشد مجتمع علوم دانشگاه یزد، در رشته/ گرایش ریاضی محض

تحت عنوان: **دیدگاه جبری از قضیه باناخ- استن**

و تعداد واحد **۶** در تاریخ **۸۵/۷/۲۵**

با حضور اعضای هیات داوران متشکل از

	نام و نام خانوادگی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمحمدصادق مدرس مصدق	
۲- استاد مشاور	دکتر حمید مظاهری تهرانی	
۳- داور خارج از گروه	دکتر حمیدرضا افشین	
۴- داور داخل گروه	دکتر سیدمحمد مشتاقیون	

تشکیل گردید و پس از ارزیابی پایان‌نامه توسط هیات داوران با درجهٔ **عالی** و نمره به عدد **۱۹/۷۵** و حروف **نوزده و هفتاد و پنج صدم** مورد تصویب قرار گرفت.

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه (ناظر)

نام و نام خانوادگی: دکتر ابراهیم قنبری

امضاء

فهرست مندرجات

چکیده

قضیه کلاسیک باناخ — استن بیان می‌کند که اگر X و Y دو فضای هاسدورف و فشرده، و $C(X)$ و $C(Y)$ دو فضای باناخ متشکل از تمام توابع پیوسته (حقیقی یا مختلط) به ترتیب روی X و Y مجهز به سوپ نرم باشند و $T : C(X) \to CY)$ یک عملگر خطی پوشا ایزومتری ($\|Tf\| = \|f\|$) باشد آنگاه X و Y هومئومورف‌اند و T یک عملگر وزنی ترکیبی است، یعنی $Tf = \alpha f o \tau$ که در آن $\alpha \in C(Y)$ و τ یک هومئومرفیسم از Y به X است.

در فصل اول بعضی از تعاریف و قضایای را که در فصلهای آینده مورد نیاز است بیان می‌کنیم. فصلهای دوم، سوم و چهارم اختصاص دارد به بیان صورت‌های مختلف قضیه باناخ — استن. همچنین در فصل سوم بعد از اثبات قضیه باناخ — استن به معرفی توپولوژی استن پرداخته‌ایم و با معرفی مجموعه‌های بسته X به کمک ایده‌آلهای ماکزیمال $C(X)$ یک پایه توپولوژی برای مجموعه‌های بسته X معرفی می کنیم.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

مقدمه

در این فصل تعاریف و قضایای مقدماتی را می آوریم که در ادامه بحث نقش مهمی در اثبات قضایای فصلهای آینده دارند. لازم به ذکر است که این قضایای مقدماتی را بدون اثبات می آوریم که برای اثبات می توانید به مراجع ([۱۱]، [۱۲] و [۱۵]) این پایان نامه رجوع کنید.

۱—۱ تعاریف و قضایای مقدماتی توپولوژی

تعریف ۱—۱.۱. τ را یک توپولوژی گوییم هرگاه τ زیر مجموعه‌ای از توانی $P(X)$ باشد و در شرایط زیر صدق کند:

۱) $X, \emptyset$ در τ باشند.

۲) τ نسبت به اجتماع دلخواه از اعضای خودش بسته باشد.

۳) τ نسبت به اشتراک تعداد متناهی از اعضایش بسته باشد. مجموعه X همراه با توپولوژی τ روی آن را یک فضای توپولوژیک گوییم.

تعریف ۱—۲.۱. اگر X فضایی توپولوژیک با توپولوژی τ باشد زیر مجموعه U از X را یک مجموعه باز از X گوییم هرگاه U متعلق به τ باشد. اگر $x \in X$ و برای یک $U \in \tau$، $x \in U$ آنگاه U را یک همسایگی از x گوییم.

تعریف ۱—۳.۱. فرض کنیم که τ و τ' دو توپولوژی در مجموعه‌ی مفروض X باشند. اگر $\tau \subset \tau'$ گوییم τ' از τ ظریفتر است.

تعریف ۱—۴.۱. فرض کنیم X یک مجموعه باشد. یک پایه‌ی توپولوژیک در X گردایه‌ای است از زیر مجموعه‌های X به طوریکه

۱) به ازای هر $x \in X$ دست کم یک عنصر پایه مانند B شامل x موجود است.

۲) اگر $B_۱, B_۲$ دو عضو دلخواه از پایه باشند و $x \in B_۱ \cap B_۲$ آنگاه عضوی از پایه مانند $B_۳$ وجود دارد به طوریکه $x \in B_۳$ و $B_۳ \subset B_۱ \cap B_۲$.

تعریف ۱—۵.۱. گردایه‌ی S از زیرمجموعه‌های X را یک زیرپایه توپولوژیک X می‌خوانیم اگر اجتماع اعضای آن برابر X باشد.

تعریف ۱—٦.۱. فضای توپولوژیک X را هاسدروف نامیم. در صورتیکه به ازای هر دو نقطه‌ی متمایز $x_۱$ و $x_۲$ از X همسایگی‌هایی مانند $U_۱$ و $U_۲$ به ترتیب از $x_۱$ و $x_۲$ یافت شوند که از هم جدا باشند.

قضیه ۱—۷.۱. در فضای هاسدورف X هر مجموعه‌ی متناهی بسته است. به خصوص تک نقطه‌ای‌ها بسته‌اند.

تعریف ۱—۸.۱. فرض کنیم X و Y فضاهای توپولوژیک و $f : X \to Y$ یک تابع باشد f بر X پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر مجموعه‌ی باز U در Y، $f^{-۱}(U)$ در X باز باشد.

تعریف ۱—۹.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک باشند و تابع $f : X \to Y$ تناظر دوسویی باشد، اگر f و تابع معکوس آن $f^{-۱} : Y \to X$ هر دو پیوسته باشند آنگاه f

را هومئومورفیسم می‌نامیم.

تعریف ۱—۱.۱۰. گردایه $\mathcal{B}$ از زیر مجموعه های فضای توپولوژیک X یک پوشش X است یا X را می پوشاند در صورتی که اجتماع اعضای $\mathcal{B}$، مساوی X باشد. اگر اعضای $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های باز X باشند، آن را یک پوشش باز X می‌نامیم.

تعریف ۱—۱.۱۱. فضای توپولوژیک X را فشرده گوییم هرگاه هر پوشش باز آن حاوی یک زیر گردایه‌ی متناهی باشد که آن نیز X را بپوشاند.

قضیه ۱—۱.۱۲. هر زیر مجموعه‌ی بسته از یک فضای فشرده، مجموعه‌ای فشرده است.

قضیه ۱—۱.۱۳. هر زیر مجموعه‌ی فشرده از یک فضای هاسدورف، مجموعه‌ای بسته است.

تعریف ۱—۱.۱۴. فرض کنید Y, X دو فضای متریک باشند. تابع $f : X \to Y$ را یک ایزومتری گوییم، در صورتی که به ازای هر x و y از X:

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

تعریف ۱—۱.۱۵. فضای توپولوژیک X را در نقطه x موضعاً فشرده نامیم، در صورتی که زیرمجموعه‌ی فشرده‌ای از X مانند C موجود باشد که حاوی یک همسایگی از x باشد.

اگر X در هر نقطه‌ی خود موضعاً فشرده باشد، X را موضعاً فشرده گوییم.

مثال ۱—۱.۱۶.
فضای R^n موضعاً فشرده است زیرا نقطه‌ی x متعلق به عضوی از پایه مانند $(a_۱, b_۱) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ است که آن نیز خود در مجموعه‌ی فشرده $[a_۱, b_۱] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ واقع است.

تعریف ۱—۱.۱۷. فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیک باشد و $Y \subset X$. گردایه

$$\{U \cap Y \mid U \in \tau\}$$

یک توپولوژی در Y است، این توپولوژی را توپولوژی القایی τ به Y یا توپولوژی زیرفضایی می‌خوانند.

قضیه ۱—۱.۱۸. فرض کنیم X یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده باشد و Y زیرفضایی از X باشد. اگر Y در X بسته یا باز باشد، آنگاه Y موضعاً فشرده است.

تعریف ۱—۱.۱۹. فضای توپولوژیک X را نرمال گوییم هر گاه به ازای هر دو مجموعه بسته‌ی از هم جدای A, B در X مجموعه‌های باز از هم جدای U, V در X وجود داشته باشند بطوریکه $A \subset U$ و $B \subset V$ باشد.

تعریف ۱—۱.۲۰. فضای X را کاملاً منظم یا تیخونوف نامیم در صورتی که مجموعه‌های تک عضوی در X بسته باشند و به ازای هر نقطه مانند $x_۰$ و هر مجموعه‌ی

بسته مانند A که شامل $x_\circ$ نباشد، تابعی پیوسته مانند $f : X \to [\circ, 1]$ موجود باشد به طوریکه $f(x_\circ) = 1$ و $f|_A = (\circ)$.

قضیه ۱—۱.۲۱. هر زیرفضای یک فضای کاملاً منظم، فضایی کاملاً منظم است.

قضیه ۱—۱.۲۲. هر فضای هاسدورف وموضعاً فشرده، کاملاً منظم است.

تعریف ۱—۱.۲۳. فرض کنیم مجموعه‌های تک عضوی در X بسته باشند. در این صورت X را منظم نامیم اگر به ازای هر نقطه‌ی آن مانند x و هر مجموعه ی بسته‌ی جدا از x مانند B، مجموعه‌های باز جدا از همی به ترتیب شامل x و B موجود باشند.

تعریف ۱—۱.۲۴. رابطه دوتایی $\geq$ مجموعه D را جهت دار می‌کند هرگاه D ناتهی باشد و در سه شرط زیر صدق کند.

۱) اگر m, n و p اعضای D باشند بطوریکه $n \geq m$ و $p \geq n$ باشد آنگاه $p \geq m$.

۲) اگر $m \in D$ آنگاه $m \geq m$ باشد.

۳) اگر m, n اعضای D باشند آنگاه وجود داشته باشد $p \in D$ بطوریکه $p \geq n$ و $p \geq m$.

تعریف ۱—۱.۲۵. یک مجموعه جهت دار زوج $(D, \geq)$ است بطوریکه $\geq$ مجموعه D را جهت دار می‌کند.

مثال ۱—۱.۲۶.

مجموعه اعداد حقیقی R با رابطه $\geq$ معمولی یک مجموعه جهت دار است.

مثال ۱—۱.۲۷.

به ازای هر مجموعه ناتهی دلخواه A مجموعه توانی $P(A)$ با رابطه $\supseteq$ یک مجموعه جهت دار است.

تعریف ۱—۱.۲۸. یک نت زوج $(s, \geq)$ است بطوریکه s یک تابع و رابطه $\geq$ دامنه s را جهت دار می کند.

$\{s_n, n \in D, \geq\}$ را یک نت در A می‌گوییم هر گاه به ازای هر $n \in D$، $s_n \in A$. نت را نهایتاً در A گوییم اگر و فقط اگر $m \in D$ وجود داشته باشد بطوریکه اگر $n \in D$ و $n \geq m$، آنگاه $s_n \in A$. نت را تناوباً در A گوییم اگر و فقط اگر به ازای هر $m \in D$ وجود داشته باشد $n \in D$ بطوریکه $n \geq m$ و $s_n \in A$.

تعریف ۱—۱.۲۹. نت $(s, \geq)$ در فضای توپولوژیک (X, τ) همگرا به s نسبت به توپولوژی τ است اگر و فقط اگر نهایتاً در هر $\tau-$ همسایگی s باشد.

قضیه ۱—۱.۳۰. فضای توپولوژیک X هاسدروف است اگر و فقط اگر هر نت درX حداکثر همگرا به یک نقطه باشد.

نکته: اگر (X, τ) یک فضای توپولوژیک هاسدورف باشد و $(s_n, \geq)$ نتی در X همگرا به s باشد می‌نویسیم

$$\lim_n s_n = s$$

و یا بطور خلاصه $\lim s_n = s$.

۱—۲ تعاریف و قضایای مقدماتی جبر

تعریف ۱—۱.۲. اگر G مجموعه‌ای ناتهی باشد یک عمل دوتایی بر G تابعی است از $G \times G$ به G.

تعریف ۱—۲.۲. یک نیمگروه عبارت است از مجموعه‌ای ناتهی مانند G همراه با عملی دوتایی بر G با خاصیت زیر:

۱) شرکت پذیر: به ازای هر $a, b, c \in G$، $a(bc) = (ab)c$.

یک تکگون نیمگروهی است مانند G که شامل

۲) یک عنصر همانی (دو طرفه) مانند $e \in G$ است به طوریکه به ازای هر $a \in G$، $ae = ea = a$

یک گروه تکگونی است به طوریکه

۳) به ازای هر $a \in G$، عضوی مانند $a^{-1} \in G$ وجود دارد به قسمی که $a^{-1}a = aa^{-1} = e$.

نیمگروه G را آبلی یا تعویض پذیر گویند اگر عمل دوتایی آن

۴) تعویض پذیر باشد: به ازای هر $a, b \in G$، $ab = ba$

تعریف ۱—۳.۲. فرض کنید G و H نیمگروه باشند، تابع $f : G \longrightarrow H$ یک همریختی است مشروط بر اینکه

$$f(ab) = f(a)f(b) \qquad \forall a, b \in G$$

اگر f به عنوان نگاشتی از مجموعه‌ها یک به یک باشد، f را یک تکریختی گوییم و اگر f به عنوان نگاشت مجموعه‌ها پوشا باشد f را یک برو ریختی گوییم.

اگر f یک نگاشت دو سویی باشد، f را یک یکریختی گوییم.

تعریف ۱—۴.۲. فرض کنید f یک همریختی از G به H باشد. هسته همریختی f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$ker f = \{g \in G \mid f(g) = \circ\}$$

قضیه ۱—۵.۲. فرض کنید $f : G \longrightarrow H$ یک همریختی گروه‌ها باشد. در این صورت:

۱) f یک تکریختی است اگر و فقط اگر $ker f = e$

۲) f یک یکریختی است اگر و فقط اگر یک همریختی مانند $f^{-1} : H \longrightarrow G$ موجود باشد بطوریکه $ff^{-1} = 1_H$ و $f^{-1}f = 1_G$.

تعریف ۱—۶.۲. فرض کنیم G یک گروه و H زیرمجموعه‌ای ناتهی از آن باشد که تحت ضرب در G بسته است. هرگاه H خود تحت عمل ضرب در G گروه باشد آنگاه گوییم H یک زیر گروه G است. و به صورت $H < G$ نشان می دهیم.

قضیه ۱—۷.۲. فرض کنیم H زیر مجموعه‌ای ناتهی از گروه G باشد. H زیر گروهی از G است اگر و فقط اگر به ازای هر $a, b \in H$، $ab^{-1} \in H$.

تعریف ۱—۸.۲. فرض کنید H زیر گروهی از گروه G بوده و $a, b \in G$. گوییم a همنهشت راست b به پیمانه H است، که با $a \equiv_r b(modH)$ نموده می شود، اگر $ab^{-1} \in H$.
a همنهشت چپ b به پیمانه H است، که با $a \equiv_l b(modH)$ نموده می شود، اگر $a^{-1}b \in H$.

قضیه ۱—۹.۲. فرض کنیم H زیر گروهی از گروه G باشد

۱) همنهشتی راست (چپ) به پیمانه H یک رابطه هم ارزی بر G است.

۲) رده هم ارزی $a \in G$ تحت همنهشتی راست (چپ) به پیمانه H برابر است با

$$Ha = \{ha \mid h \in H\} \ (aH = \{ah \mid h \in H\}).$$

۳)به ازای هر $a \in G$، $|aH| = |H| = |Ha|$. که در آن $|H|$ برابر تعداد اعضا یا H است.

مجموعه Ha یک هم مجموعه راست H در G و aH یک هم مجموعه چپ H در G نامیده می شود.

تعریف ۱—۱۰.۲. زیر گروه N از G را نرمال گوییم هرگاه به ازای هر $a \in G$ تساوی $aN = Na$ برقرار باشد.

تعریف ۱—۱۱.۲. حلقه مجموعه‌ای است ناتهی مانند R همراه با دو عمل دوتایی که معمولاً به صورت جمع $(+)$ و ضرب $(.)$ نموده می‌شود بطوریکه

۱) $(R,+)$ یک گروه آبلی است.

۲) به ازای هر $a,b,c \in R$ داریم $(ab)c = a(bc)$ (ضرب شرکت پذیر است)

۳) $a(b+c) = ab+ac$ و $(a+b)c = ac+bc$ (پخش پذیری از چپ و راست)

همچنین اگر علاوه بر این

۴)به ازای هر $a,b \in R$ رابطه $ab = ba$ برقرار باشد.

گوییم R یک حلقه تعویض پذیر است. اگر R شامل عنصری مانند ۱_R باشد به طوریکه:

۵)به ازای هر $a \in R$، $۱_R a = a ۱_R = a$

آنگاه گوییم R یک حلقه یکدار است.

تعریف ۱—۱۲.۲. فرض کنیم R یک حلقه و S زیر مجموعه ای ناتهی از R باشد که تحت اعمال جمع و ضرب در R بسته است. هرگاه S خود حلقه‌ای تحت این اعمال باشد، آنگاه S را یک زیر حلقه R می‌نامیم.

تعریف ۱—۱۳.۲. زیر حلقه I از حلقه R را یک ایده‌آل راست در R گوییم هر گاه $ir \in I$ به ازای هر $r \in R$ و $i \in I$.

به طریق مشابه زیر حلقه I از حلقه R را یک ایده آل چپ در R گوییم هرگاه $ri \in I$ به ازای هر $r \in R$ و $i \in I$.

زیر حلقه I از حلقه R را یک ایده‌آل R گوییم هر گاه I یک ایده آل چپ و راست R باشد.

تعریف ۱—۱۴.۲. عنصر ناصفر a در حلقه R را یک مقسوم علیه صفر چپ (راست) گوییم اگر عنصری ناصفر مانند $b \in R$ موجود باشد به طوریکه $ab = 0$ ($0 = ba$)، مقسوم علیه صفر عنصری از R است که هم مقسوم علیه صفر چپ باشد هم مقسوم علیه صفر راست باشد.

تعریف ۱—۱۵.۲. عنصر a در حلقه یکدار R را معکوس پذیر چپ (راست) گوییم اگر $c \in R$ ای ($b \in R$ای) وجود داشته باشد که $ca = 1_R$ ($ab = 1_R$) عنصر $c[b]$ معکوس چپ (راست) a نامیده می شود. عنصر $a \in R$ که معکوس پذیر چپ و راست باشد معکوس پذیر یا یکه نامیده می شود.