بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه مازندران
دانشکده علوم پایه

عنوان:

گرافهای یکتا رنگ پذیر و مجموعه های تعیین کننده

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی

اساتید راهنما:

دکتر دوستعلی مژده (دانشگاه مازندران)
دکتر امیر دانشگر (دانشگاه صنعتی شریف)

نگارش: مصطفی محققی نژاد

دیماه ۸۰

«بسمه تعالی»

دانشگاه مازندران
معاونت آموزشی
تحصیلات تکمیلی

«ارزشیابی پایان‌نامه در جلسه دفاعیه»

دانشکده علوم پایه

نام و نام‌خانوادگی : مصطفی محققی نژاد شمارهٔ دانشجوئی : ۷۸۵۲۴۷۷۰۵

رشته تحصیلی : ریاضی کاربردی مقطع : کارشناسی ارشد سال تحصیلی : ۸۱-۸۰

عنوان پایان‌نامه: گرافهای یکتارنگ پذیر و مجموعه‌های تعیین کننده

تاریخ دفاع : شنبه ۸۰/۱۰/۸

نمره پایان‌نامه (به عدد) : ۱۹٫۶

نمره پایان‌نامه (به حروف) : نوزده و شش دهم

هیأت داوران

استاد راهنما: آقای دکتر دوستعلی مژده امضاء

استاد راهنما: آقای دکتر امیر دانشگر امضاء

استاد مدعو: آقای دکتر سیدعبادا... محمودیان امضاء

استاد مدعو: آقای دکتر حسن حسین‌زاده امضاء

نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر عبدالعلی نعمتی امضاء

تقدیم به:

پدر فداکار

و

مادر مهربانم

که مشوق راهم بوده اند و دستهای گرمشان پشتوانه من

تقدیر و تشکر:

هیچ صیادی،

در جوی حقیری که به گودالی می ریزد،

مرواریدی صید نخواهد کرد

لازم می دانم از همه کسانی که مرا در به انتها رساندن این پایان نامه، یاری داده اند قدردانی نمایم.

آقایان دکتر دوستعلی مژده و دکتر امیر دانشگر، علاوه بر آنکه افتخار کار کردن با آنها را داشته ام، همواره راهنمایی ها و ایده هایشان مرا همراهی کرده است. از آنها تشکر بعمل می آورم.

از پدر، مادر و خانواده ام که نه تنها از فراهم آوردن امکانات تحصیل از هیچ کوششی فروگذار نکرده اند بلکه در شادترین لحضات زندگیم سهم بزرگی داشته اند سپاسگذارم.

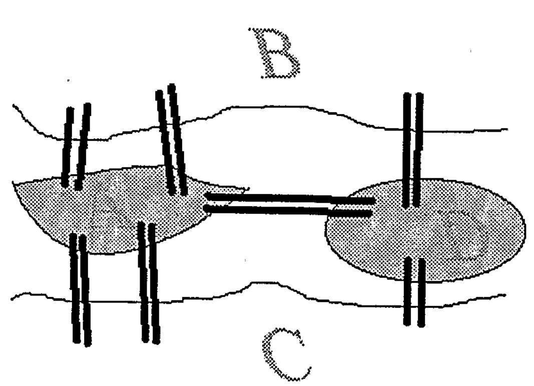
از آقایان افشین محمدی، علی آزادی، محمد مرتضوی، سید امجد ثمره هاشمی، محمدعلی یحیی زاده، مرتضی فتحی مقدم، مجید ذاکری و کلیه دوستان و عزیزانی که مرا در طول دوران تحصیل یاری رسانده اند تشکر می نمایم.

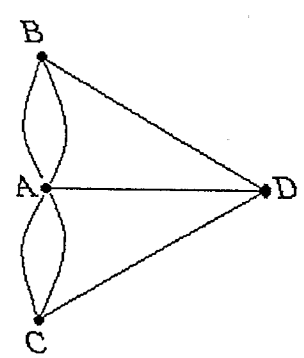
فهرست مطالب

مقدمه

در دنیای اطراف ما وضعیت های فراوانی وجود دارند که می‌توان توسط نموداری متشکل از یک مجموعه نقاط به علاوه خطوطی که برخی از این نقاط را به یکدیگر متصل می‌کند، به توصیف آنها پرداخت.
به عنوان مثال برای نشان دادن رابطه دوستی بین یک دسته از انسانها می‌توانیم هر شخص را با یک نقطه مشخص کنیم و نقاط متناظر با هر دوست را با یک خط به یکدیگر وصل نماییم. یا ممکن است در جای دیگر برای نشان دادن یک شبکه ارتباطی، از نموداری استفاده کنیم که در آن نقاط نمایانگر مراکز ارتباطی و خطوط، نشان دهندهٔ پیوندهای ارتباطی بین مراکز باشد.
آنچه مهم است این است که آیا دو نقطه به هم وصل شده اند یا نه؟
شکل ریاضی این مفهوم به نظریه گراف منتهی خواهد شد.

اویلر در سال ۱۷۳۶ اولین مقاله را در زمینه گراف منتشر کرد. او در این مقاله نشان داد که نمی‌توان با یک گشت در شهر از روی هر هفت پل کونیگسبرگ یک بار و فقط یک بار عبور کرد [۲]. پل های کونیگسبرگ و گراف آن را در شکل زیر ملاحظه می‌کنید.





در نظریه گراف یکی از موضوعاتی که مورد بحث قرار می‌گیرد، رنگ آمیزی گراف است. رنگ آمیزی یک گراف شامل رنگ آمیزی رأسی، رنگ آمیزی یالی و رنگ آمیزی کلی (رأسی– یالی) گراف است که آخرین مفهوم توسط دکتر بهزاد ۱۹۶۵ ارائه شده است.
رنگ آمیزی یک گراف اختصاص k–رنگ به عناصر (رأس–یال یا هر دو) است به طوری که عناصر مجاور هم رنگ نباشد. این به مفهوم افراز عناصر به k مجموعه است به طوری که دو عنصر مجاور در یک کلاس واقع نیستند.
در این رابطه یک k–رنگ آمیزی یکتا یعنی اینکه افراز عناصر فقط و فقط به یک صورت امکان پذیر باشد.
اگر چه برای رنگ آمیزی یکتای یالی می‌توان رنگ آمیزی یکتای رأسی گرافِ خطی آن را در نظر گرفت، ولی A.G.Thomason(1978)، روی حدس R.J.Wilson(1967) قضیه مهم زیر را ثابت کرد[۱۳].
« برای $k \geq ۴$ تنها گرافهای یکتا رنگ پذیر یالی، ستاره های $K_{1,k}$ هستند.»

در سراسر این پایان نامه ما با گرافهای یکتا رنگ پذیر رأسی مواجه خواهیم بود.

در فصل اول برخی تعاریف اساسی نظیر تعریف گراف، عدد رنگی گراف، مجموعه تعیین کننده، گراف UCG و مفهوم هسته برای یک گراف شرح داده می‌شود.
در فصل دوم با تعریف یک تابع Λ بر حسب تعداد رئوس، تعداد یالها و عدد رنگی برای هر گراف این مطلب ارزشمند را که Λ برای هر UCG مثبت است را ثابت خواهیم کرد. در ادامه با تعریف متغیری جالب مثل ϕ این نکته را که صفر بودن ϕ برای هر گراف UCG یک شرط لازم و کافی است، بیان خواهد شد.
در فصل سوم پس از تعریف «سیستم متقاطع» و «t–شاخص» و «$\mathcal{T}$–شاخص» قضیه‌ای آورده می‌شود که از روی یک گراف (k-1)–رنگی که دارای ساختاری ویژه است، یک گراف با پارامترهای فوق العاده نظیر $ccl \neq ۰$ ساخته خواهد شد که در گراف ساخته شده متغیر Λ تابعی بر حسب $\Lambda(G), |V(G)|, \mathcal{T}, k$ بدست خواهد آمد، که این برای بررسی درستی حدس XU ارزشمند است زیرا اگر گرافهایی با خواص ویژه وجود داشته باشند آنگاه با استفاده از قضیه فوق حدس XU رد خواهد شد.
در فصل چهارم ابتدا یک مسئله حل می‌شود، سپس چند ساختار رنگی دیگر معرفی می‌شود و در انتها با یک مثال، حدس Xu، بی اعتبار خواهد شد.

چکیده

در این پایان نامه پس از تعریف یک گراف UCG، یک قضیه از Xu و Truszczynski آورده می‌شود که حداقل یالها برای یک Gی UCG را به‌دست می‌آورد و حدسی در این مورد آورده می‌شود. اگرچه در فصل چهارم قضیه‌ای از[۱] نشان می‌دهد که این حدس نادرست می‌باشد، اما در فصل سوم رده‌های بزرگی از هسته‌ها کشف می‌شود که نشان می‌دهد بررسی این حدس بغرنج است. پایه و اساس به‌دست آوردن این هسته‌ها روی قضیه ۷—۳ استوار است. این قضیه نشان می‌دهد از هر گراف شامل یک لیست‌پذیرفتنی از نوع اول می‌توان به یک گراف با عددرنگی بالاتر و هم‌خوشه رسید.(این کار نشاندن یک k—رنگی در یک $(k+1)$—رنگی است.)

در ادامه کارهایی برای اولین بار آورده می‌شود. که در آن پس از حل یک مسئله که در [۸] طرح شده است ثابت می‌کنیم که برای هر گراف UCG، با زیر گرافهای القاشده روی دو کلاس—رنگ i,j، داریم: $\Lambda(G) = \sum \Lambda(G_{ij})$.

همچنین با تعریف دنباله‌پذیرفتنی روی UCGها، بررسی گرافهایی با حداقل یال از دیدگاه دیگری مطالعه خواهدشد. در انتها نیز روی گرافهایی با عددرنگی بالا و بدون مثلث پارامترهایی را بررسی خواهیم کرد.

فصل اول

تعاریف و مقدمات پایه ای

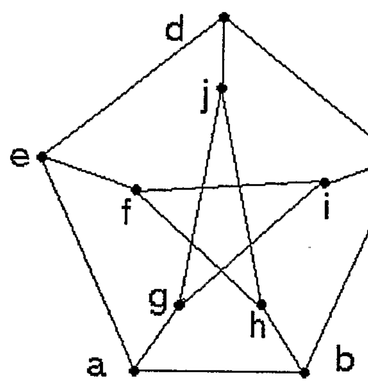
بخش اول مقدمه

برای شروع مبحث نظریه گراف و پرداختن به موضوعات مربوط به مقاله اصلی لازم است ابتدا مفاهیم زیر برای خواننده یادآوری شود.
در هر تعریف سعی شده است با توجه به اهمیت آن مثالهایی ارائه شود تا با استفاده از آن ، تعریف هر چه بهتر در ذهن باقی بماند.

بخش دوم تعاریف

۱—۱. تعریف. یک *گراف* G، زوج مرتب $(V(G), E(G))$ است که در آن $V(G)$ مجموعه رأسها و $E(G)$ مجموعه یالهای G می‌باشد.
همچنین دو رأس $a, b \in V(G)$ را ***مجاور*** گوییم اگر یالی بین آنها موجود باشد و $deg(a)$ ***درجه رأس*** a نامیده می‌شود که عبارت است از تعداد یالهایی که a را به عنوان یک پایانه دارند.

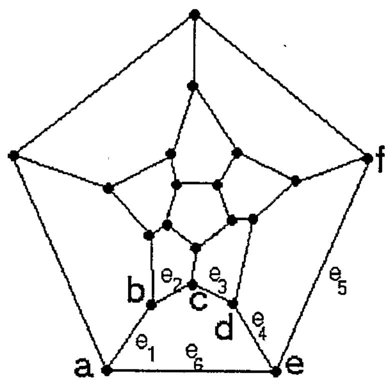
به عنوان مثال در گراف زیر که به گراف پترسن مشهور است درجه همهٔ رأسها ۳ می‌باشد و رأسها a, b مجاور می باشند.



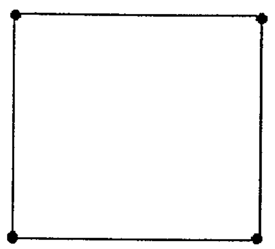
۱—۲. تعریف. دنباله‌ای از رأسها و یالهای پشت سرهم که رأسهای تکراری ندارند را یک *مسیر* گوییم و گرافی که بین هر دو رأس آن یک مسیر باشد ***گراف همبند*** می‌نامیم. ***طول*** یک مسیر تعداد یالهای آن مسیر تعریف می‌شود.
در گراف دوازده وجهی زیر، $P_۱, P_۲$ دو مسیر از a به f هستند. در این مسیرها طول مسیر $P_۱$، پنج و طول مسیر $P_۲$، دو است.

$$P_۱ = a, e_۱, b, e_۲, c, e_۳, d, e_۴, e, e_۵, f$$

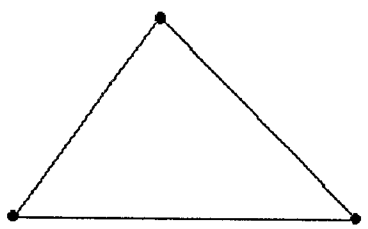
$$P_۲ = a, e_۶, e, e_۵, f$$



۳–۱. **تعریف.** مسیر بسته را یک دور گوییم. اگر طول این مسیر n باشد این دور را C_n می‌نامیم. در این رابطه C_{2n+1} یک دور با طول فرد یا به طور خلاصه یک دورفرد است.



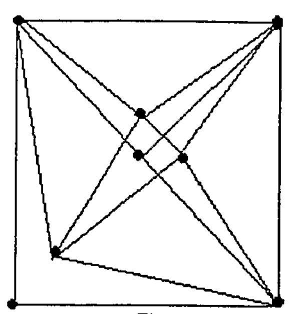
C_4



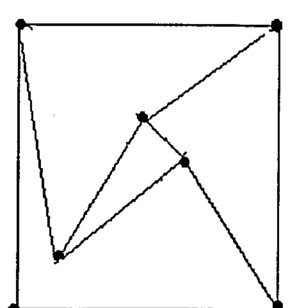
C_3

۴–۱. **تعریف.** فرض کنیم $G = (V(G), E(G))$ یک گراف باشد. در این صورت گراف $H = (V(H), E(H))$ را ***زیرگراف*** G گوییم هر گاه داشته باشیم: $V(H) \subset V(G)$ و $E(H) \subset E(G)$. اگر $E(H)$ تمام یالهایی از $E(G)$ باشد که پایانه‌های آنها در $V(H)$ باشد در این صورت H را ***زیر گراف القایی*** G خواهیم گفت.

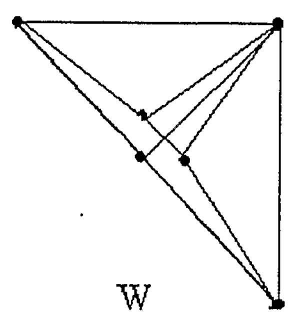
به عنوان یک مثال گراف G دو زیر گراف H و W دارد که W یک زیر گراف القایی از G می‌باشد.



G



H

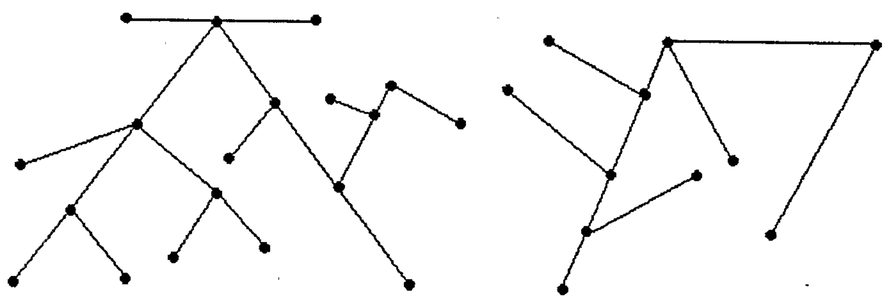


W

۵–۱. **تعریف** . گرافی که شامل هیچ زیر گراف القایی به صورت یک دور C_n نیست ***جنگل*** نام دارد .

زیر گرافهای همبند یک جنگل ***مؤلفه‌های*** آن جنگل هستند. همچنین جنگل همبند را ***درخت*** گوییم.

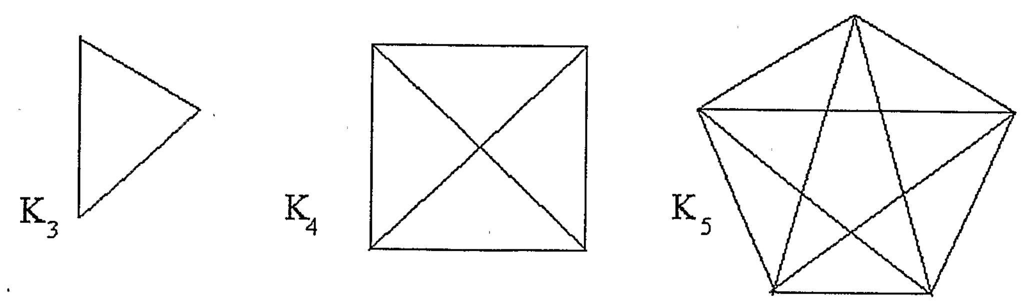
در شکل زیر یک جنگل با دو مؤلفه دیده می شود که هر کدام یک درخت هستند.

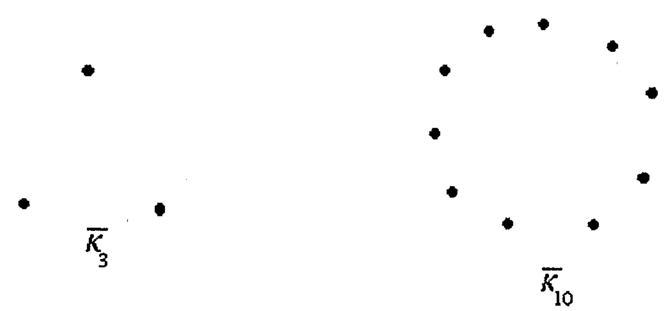


۶–۱. **تعریف**. یک گراف با n رأس که تمام رأسهای آن با هم مجاور باشند ***گراف کامل*** K_n نامیده می‌شود.

همچنین گراف با n رأس و بدون یال را یک ***گراف پوچ*** و گراف با یک رأس را ***گراف بدیهی*** می‌نامیم.

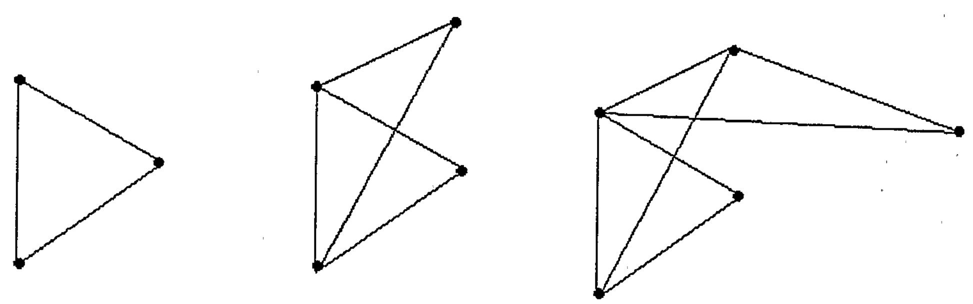
در شکلهای زیر گرافهای کامل روی ۳, ۴, ۵ و همچنین چند گراف پوچ دیده می‌شود.



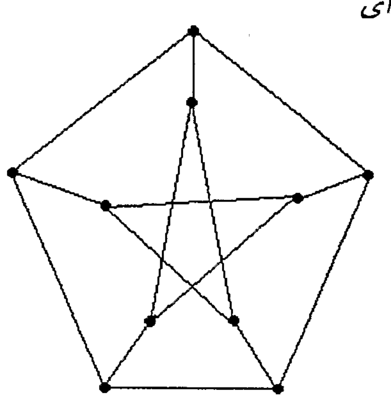


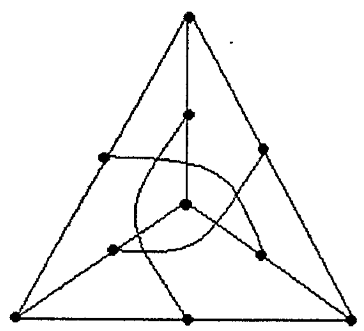
۱–۷. تعریف. یک q–**درخت** را می‌توان با اضافه کردن یک رأس جدید به K_{q+1} و وصل کردن به q رأس آن به دست آورد. به علاوه یک q–درخت را می‌توان با اضافه کردن یک رأس جدید به q–درخت و وصل کردن آن به q رأس یک K_{q+1} آن به دست آورد.

واضح است که ۱–درخت همان درخت می‌باشد.
در شکل زیر طریق ساختن چند ۲–درخت نشان داده شده است.



۱–۸. تعریف. دو گراف G و H را **یکریخت** گوییم هرگاه تابعی چون $f : V(G) \to V(H)$ یک به یک و پوشا موجود باشد، به‌طوری که برای هر $e = ab \in E(G)$ یال $e' = f(a)f(b) \in E(H)$ موجود باشد و بر عکس.
در شکل زیر گراف پترسن به همراه گراف یکریخت آن دیده می‌شود.

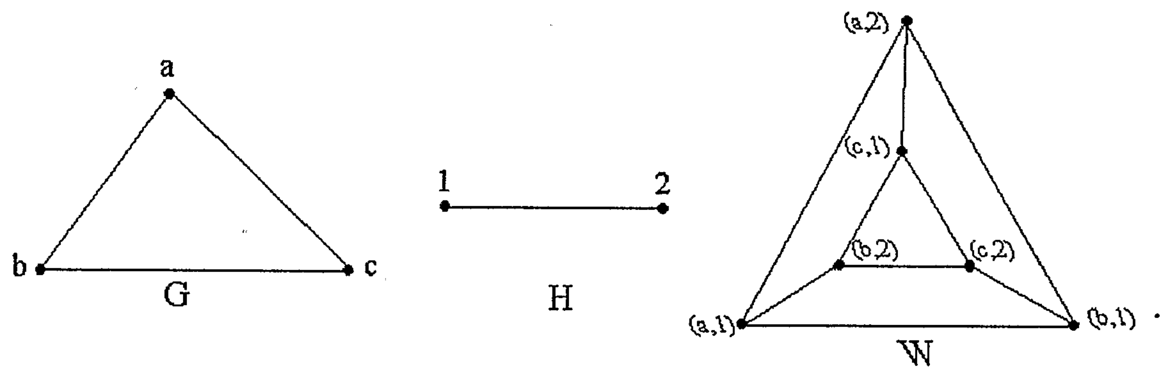




۹–۱. تعریف. زیر گرافی از G که یکریخت با K_k است یک k–خوشه از G نامیده می شود و $cl(G)$ بزرگترین k است به‌طوری که G شامل یک k–خوشه باشد.

۱۰–۱. تعریف . *حاصلضرب دکارتی دو گراف* G, H یک گراف $K = G \times H$ با $V(K) = V(G) \times V(H)$ است به طوری که دو رأس $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ در k مجاورند اگر و تنها اگر u_1, u_2 در G مجاور باشند و $v_1 = v_2$ ، یااینکه v_1, v_2 در H مجاور باشند و $u_1 = u_2$. حاصلضرب دو گراف را با $G \Box H$ نشان می‌دهند.

در شکل زیر گراف W را می‌توان از حاصلضرب دکارتی گراف G در گراف H به‌دست آورد.



۱۱–۱. تعریف . یک k–*رنگ‌آمیزی سره* گراف G(یا به‌طور خلاصه یک k–رنگ آمیزی) اختصاص رنگهایی از $\{1, 2, ..., k\}$ به رأسها G است به طوری که رأسها مجاور رنگهای متفاوتی داشته باشند.

همچنین G را k–*رنگ پذیر* گوییم هر گاه G یک k–رنگ‌آمیزی را قبول کند. در این حالت G، k–*رنگی*است هر گاه k کوچکترین عدد صحیحی باشد که G، k–رنگ پذیر باشد. k را *عدد رنگی* G می نامیم و با $\chi(G) = k$ نشان می‌دهیم.

۱۲–۱. تعریف. هر k–رنگ‌آمیزی روی G یک افراز k تایی روی رأسها القا می‌کند به طوری که رأسها هم رنگ در یک کلاس قرار دارند. این کلاسها را ***کلاس–رنگهای*** G مربوط به