دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز تابعی

عنوان

رده هایی از توابع عملگری

استاد راهنما

دکتر محمد صال مصلحیان

استاد مشاور

دکتر حمید رضا ابراهیمی ویشکی

دکتر شیرین حجازیان

پژوهشگر

محسن کیان

آذر ماه سال ۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: کیان نام: محسن

عنوان: رده هایی از توابع عملگری

استاد راهنما: دکتر محمد صال مصلحیان

استاد مشاور: دکتر حمید رضا ابراهیمی ویشکی

دکتر شیرین حجازیان

مقطع تحصیلی: دکتری رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز تابعی

دانشگاه: فردوسی مشهد دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: آذر ماه سال ۱۳۹۱ تعداد صفحات: ۱۰۳

واژگان کلیدی: تابع Q-رده؛ نامساوی ینسن؛ نامساوی هرمیت–هادامار ؛ تابع Q-رده عملگری ؛عملگر خودالحاق؛ محدب عملگری؛ نگاشت خطی مثبت؛ تابع منظر عملگری؛ میدان پیوسته از عملگرها؛ نامساوی چوی–دیویس–ینسن؛ تابعک f-واگرایی ناجابجایی.

چکیده

در این رساله پس از بیان مفاهیم و مقدمات لازم به بررسی توابع Q-رده حقیقی پرداخته و نامساوی هایی از نوع ینسن، هرمیت–هادامار و استراوسکی را برای این توابع بیان کرده ایم. همچنین چند نامساوی عملگری از جمله یک نامساوی کانترویچ و یک نوع نامساوی ینسن عملگری برای توابع Q-رده حقیقی بیان نموده ایم. سپس به معرفی توابع Q-رده عملگری پرداخته و با بررسی این توابع، نامساوی عملگری ینسن و هرمیت–هادامار را برای آنها اثبات کرده ایم. همچنین رابطه بین توابع Q-رده عملگری و توابع یکنوای عملگری را بررسی کرده ایم. در ادامه چند نوع نامساوی هاردی–هیلبرت را برای عملگرهای روی فضای هیلبرت اثبات کرده ایم. در انتها مفهوم تابعک f-واگرایی ناجابجایی را معرفی کرده و سپس به بررسی خواص آن پرداخته ایم. از جمله، با مقایسه تابعک f-واگرایی ناجابجایی و تابع منظر عملگری، یک نامساوی عددی از نظریه اطلاعات را به عملگرها توسیع داده ایم.

؟؟؟

،

سپاس گزاری...

محسن کیان
آذرماه سال ۱۳۹۱

فهرست مطالب

پیش گفتار

نظریه عملگرها و آنالیز ماتریس ها زمینه ی پژوهشهای مهمی است که کاربردهای فراوانی در محاسبات علمی، نظریه کنترل سیستم ها، فیزیک ریاضی، آمار و اقتصاد دارد. به عنوان نمونه در بیان یک مدل ریاضی برای یک سیستم مکانیک کوانتومی، عناصر فیزیکی سیستم با عملگرهای خودالحاق روی یک فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ توصیف می شوند. حالت سیستم فیزیکی اغلب به کمک بردارهای یکه روی فضای هیلبرت زمینه مدل می شوند. بنابراین اگر A یک عنصر سیستم بوده و $x \in \mathscr{H}$ متناظر با حالت سیستم باشد، چگونگی A در این حالت همان $\langle Ax, x\rangle$ خواهد بود.

به علاوه می توان رد پای این تحقیقات را در بسیاری از موضوعات دیگر ریاضیات محض پیدا کرد. بسیاری از قضایا در آنالیز ماتریس ها به شکل نامساوی ظاهر می شوند. برای هر تابع مختلط تعریف شده روی فضای ماتریس ها نامساوی هایی وجود دارد. می توان گفت نامساوی های ماتریسی(یا همان نامساوی های عملگری) بازتاب جنبه کمی آنالیز ماتریس ها است.

تقریباً در تمام زمینه های ریاضیات محض و کاربردی می توان اثری از نامساوی ها یافت. کاربرد فراوان نامساوی ها در دیگر مطالعات باعث شده است هر ساله گونه هایی جدید از آنها ظهور پیدا کنند. در زمینه هایی از ریاضیات مانند نظریه معادلات دیفرانسیل، حساب تغییرات و هندسه که توسط نامساوی ها احاطه شده اند، تلاش برای توسیع و یافتن صورت های مناسب تر از نمونه های کلاسیک نمود بیشتری پیدا کرده است. مطالعه نامساوی ها جنبه های مختلفی از ریاضیات مدرن را منعکس می کند. از یک طرف تحقیق در اصول بنیادی مانند فهم بهتر مفهوم یکنوایی و تحدب، و از طرف دیگر یافتن ایده های جدید در به کاربردن یک نامساوی. در این

میان برخی از این نامساوی ها تبدیل به ابزاری قدرتمند در ریاضیات شده اند. یکی از آنها، نامساوی مشهور ینسن[۱] می باشد. پس از چاپ دو مقاله در سال های ۱۹۰۵ و ۱۹۰۶ توسط ینسن، ریاضی دان و مهندس مشهور دانمارکی، نظریه توابع محدب به سرعت رشد کرد. دلایل بسیاری برای ترقی چشم گیر این نظریه می توان بیان کرد. ابتدا اینکه زمینه های بسیار زیادی از آنالیز مدرن بطور مستقیم یا غیر مستقیم از توابع محدب استفاده می کنند. دیگر این که توابع محدب به نظریه نامساوی ها بسیار نزدیک و وابسته است چنان که بسیاری از نامساوی های مشهور نتیجه کاربرد توابع محدب هستند.

اما آنچه برای ما مهم است، رده هایی از توابع موسوم به توابع عملگری هستند. یعنی توابعی که روی عملگرهای خودالحاق یک فضای هیلبرت تعریف می شوند. مطالعه این نوع توابع مرهون نامساوی های عملگری می باشد. چندین رده از توابع عملگری تا کنون معرفی شده و مورد مطالعه قرار گرفته اند. به عنوان مثال مطالعه توابع یکنوای عملگری در سال ۱۹۳۰ توسط لونر[۲] آغاز شد و اندکی بعد با معرفی توابع محدب عملگری توسط کراوس[۳] ادامه پیدا کرد. نزدیک به نیم قرن بعد مطالعه این توابع با کار بسیار زیبای هنسن[۴] و پدرسن[۵] به اوج خود رسید. هنسن و پدرسن [۲۸] توابع محدب عملگری را مشخص سازی کردند. مطالعه این رده از توابع با کارهای نویسندگانی چون م. فوجی[۶]، ج. آی. فوجی[۷] و پچریچ[۸] ادامه پیدا کرد. گونه دیگر از این توابع موسوم به توابع محدب لگاریتمی عملگری توسط آندو[۹] مورد بررسی قرار گرفته اند.

در این رساله به معرفی رده هایی جدید از توابع عملگری پرداخته و خواص آنها را مورد بررسی قرار می دهیم. به خصوص، با در نظر گرفتن توابع Q-رده به عنوان توسیعی از توابع محدب و توابع

[۱] Jensen
[۲] Löwner
[۳] Kraus
[۴] F. Hansen
[۵] G.K. Pedersen
[۶] M. Fujii
[۷] J.I. Fujii
[۸] J. Pečarić
[۹] T. Ando

صعودی نامنفی، سعی می کنیم نتایج گذشته در مورد این توابع را تعمیم دهیم.

در فصل اول، مفاهیم اولیه و اصول مورد نیاز برای فصل های بعد آورده شده اند.

در فصل دوم، به بررسی توابع حقیقی Q-رده پرداخته و تظریفی از نامساوی ینسن برای این توابع فراهم کرده ایم. همچنین مفهوم توابع توأماً Q-رده را معرفی کرده و سپس به کمک آن به بررسی مفهوم تابع منظر وابسته به یک تابع Q-رده پرداخته ایم. چند نامساوی از نوع هرمیت–هادامار و استراوسکی در مورد توابع Q-رده نیز در این فصل آمده است.

در فصل سوم، به منظور فراهم کردن معادلی مناسب برای برخی از نامساوی های عملگری که در مورد توابع محدب بیان می شوند، چند نوع نامساوی عملگری از جمله نامساوی ینسن–مرسر و نامساوی کانترویچ را برای توابع حقیقی Q-رده بیان و اثبات می کنیم.

در فصل چهارم به معرفی مفهوم توابع Q-رده عملگری به عنوان توسیعی از توابع محدب عملگری نامنفی (و همچنین توسیع عملگری توابع حقیقی Q-رده) می پردازیم. سپس سعی می کنیم نامساوی عملگری ینسن را به این خانواده از توابع تعمیم دهیم. در این فصل همچنین رابطه بین توابع یکنوای عملگری و توابع Q-رده عملگری مورد بررسی قرار می گیرند.

در فصل پنجم، چند نوع نامساوی هاردی–هیلبرت برای عملگرهای خودالحاق را روی یک فضای هیلبرت اثبات کرده ایم.

در فصل ششم به معرفی رده دیگری از توابع عملگری می پردازیم. ابتدا مفهوم تابعک f-واگرایی ناجابجایی را معرفی کرده و سپس به بررسی خواص آن پرداخته ایم. از جمله، با مقایسه تابعک f-واگرایی ناجابجایی و تابع منظر عملگری، یک نامساوی عددی از نظریه اطلاعات را به عملگرها توسیع داده ایم. در انتها کاربردهایی مانند تظریفی برای نامساوی چوی–دیویس–ینسن آورده ایم.

از این رساله مقالات ذیل استخراج شده است:

[1] J.I. Fujii, M. Kian and M.S. Moslehian, *Operator Q-class Functions*, Sci.

Math. Jpn. **73** (2011), no. 1, 75–80.

[2] M.S. Moslehian and M. Kian, *Jensen type inequalities for Q-class functions* , Bull. Austral. Math. Soc. **85** (2012), 128-142.

[3] M. Kian and M.S. Moslehian, *Operator inequalities related to Q-class functions*, Math. Slovaca, 2012, (to appear).

[4] M. Kian, *Hardy-Hilbert type Inequalities for Hilbert space Operators*, Ann. Funct. Anal. **3** (2012), no. 2, 129–135.

[5] M.S. Moslehian and M. Kian, *Non–commutative f-divergence functional*, submited.

[6] M. Kian and M.S. Moslehian, Jensen Operator Inequality for Q-class Functions, The 42th Annual Iranian Mathematics Conference, 5-8 September 2011, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Iran, pp 389-392.

[7] M. Kian, An Operator Extension of Csiszar's result, The 43rd Annual Iranian Mathematics Conference, 27-30 August 2012, University of Tabriz, Iran pp. 277-280.

[8] M. Kian, A Generalization of Perspective Function, International conference "Research on structurs of operators via methods in geometry and probability theory", 5-7 November 2012, Research Institute for Mathematical Science, Kyoto University, Japan.

فصل ۱
مفاهیم مقدماتی

در این فصل به بیان مفاهیم و تعاریف اولیه ای می پردازیم که در فصل های آینده به آنها نیاز داریم. همچنین قضایای مورد نیاز در این فصل بدون اثبات آورده شده اند. خواننده برای یافتن اثبات این قضایا می تواند به مراجع موجود در این رساله رجوع کند.

۱.۱ توابع محدب و توابع Q- رده

تابع حقیقی f روی بازه $J \subseteq \mathbb{R}$ را محدب گوییم هرگاه برای هر $x, y \in J$ و هر $\lambda \in [۰, ۱]$ نامساوی

$$f(\lambda x + (۱ - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (۱ - \lambda)f(y) \tag{۱.۱}$$

برقرار باشد. تابع f را مقعر نامیم هرگاه عکس نامساوی (۱.۱) برقرار باشد. فرض کنیم $x_۱, x_۲, x_۳ \in J$. در این صورت نامساوی (۱.۱) معادل است با

$$\frac{f(x_۱)}{(x_۱ - x_۲)(x_۱ - x_۳)} + \frac{f(x_۲)}{(x_۲ - x_۱)(x_۲ - x_۳)} + \frac{f(x_۳)}{(x_۳ - x_۱)(x_۳ - x_۲)} \geq ۰.$$

به علاوه اگر $x_۱ < x_۲ < x_۳$، آنگاه عبارت معادل دیگری به صورت زیر داریم:

$$f(x_۲) \leq \frac{x_۳ - x_۲}{x_۳ - x_۱} f(x_۱) + \frac{x_۲ - x_۱}{x_۳ - x_۱} f(x_۳).$$

توابع محدب در نظریه نامسای ها از اهمیت بسیار زیادی برخوردارند. در ادامه چند نامساوی مشهور مربوط به این توابع را ارایه می دهیم.

قضیه ۱.۱.۱ (نامساوی ینسن[1])**.** فرض کنید $f : J \to \mathbb{R}$ یک تابع محدب باشد. اگر $x_1, \cdots, x_n \in J$ و $p_1, \cdots, p_n \in \mathbb{R}^+$ بطوری که $P = \sum_{i=1}^n p_i$، آنگاه

$$f\left(\frac{1}{P}\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \leq \frac{1}{P}\sum_{i=1}^n p_i f(x_i). \tag{۲.۱}$$

قضیه ۲.۱.۱ (نامساوی ینسن–مرسر[2])**.** [۳۸] اگر $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ یک تابع محدب بوده، $x_1, \cdots, x_n \in [a,b]$ و $p_i > 0$ به طوری که $\sum_{i=1}^n p_i = 1$، آنگاه

$$f\left(a+b-\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \leq f(a)+f(b)-\sum_{i=1}^n p_i f(x_i). \tag{۳.۱}$$

قضیه ۳.۱.۱ (نامساوی هرمیت–هادامار[3])**.** [۴۶] اگر $f : J \to \mathbb{R}$ یک تابع محدب باشد و $a, b \in J$ آنگاه

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{۴.۱}$$

قضیه ۴.۱.۱ (نامساوی پترویچ[4])**.** فرض کنید $a > 0$ و $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ یک تابع محدب باشد. اگر $\sum_{i=1}^n x_i \in [0,a]$ آنگاه

$$f\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n f(x_i) + (n-1)f(0). \tag{۵.۱}$$

نامساوی ینسن از اهمیت زیادی برخوردار است، زیرا بسیاری از نامساوی های مشهور از جمله نامساوی میانگین حسابی–هندسی حالات خاصی از این نامساوی می باشند. در سال های اخیر تظریف ها و توسیع های فراوانی از نامساوی های فوق توسط نویسندگان مختلف بیان شده است.

[1] Jensen
[2] Jensen–Mercer
[3] Hermite–Hadamard
[4] Petrović

برای یافتن مجموعه کاملی از این نتایج و همچنین اثبات قضایای فوق به [۴۶، ۴۰، ۲۲] رجوع کنید.

در سال ۱۹۸۵ گودونوا [۵] و لوین [۶] [۲۴] خانواده جالبی از توابع را به صورت زیر تعریف کردند. تابع حقیقی $f: J \to \mathbb{R}$ را یک تابع Q-رده نامیم هرگاه برای هر $x, y \in J$ و هر $\lambda \in (0, 1)$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1-\lambda}. \tag{۶.۱}$$

با توجه به تعریف فوق بدیهی است که هر تابع محدب نامنفی یک تابع Q-رده می باشد. همچنین هر تابع صعودی نامنفی نیز یک تابع Q-رده می باشد. زیرا فرض کنیم $f: J \to [0, \infty)$ یک تابع صعودی باشد و $x, y \in J$ و $\lambda \in (0, 1)$. بدون از دست دادن کلیت فرض کنیم $x \leq y$. در این صورت داریم

$$0 \leq f(x) \leq f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(y) \leq f(y) + f(x) \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1-\lambda}.$$

در نتیجه هر تابع صعودی نامنفی نیز یک تابع Q-رده می باشد. بنابراین توابع Q-رده را می توان به عنوان توسیعی از توابع محدب و صعودی نامنفی در نظر گرفت.

تابع حقیقی $f: J \to \mathbb{R}$ را یک تابع شور[۷] نامیم هرگاه برای هر $x, y, z \in J$

$$f(x)(x-z)(x-y) + f(y)(y-x)(y-z) + f(z)(z-x)(z-y) \geq 0.$$

گودونوا و لوین نشان دادند که توابع شور و توابع Q-رده بر هم منطبق اند. در واقع نامساوی فوق با (۶.۱) معادل است و تعریف دیگری برای این خانواده از توابع به دست می دهد.

مثال ۵.۱.۱. برای هر $r > 0$ تابع $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ به صورت $f(x) = x^r$ یک تابع Q-رده می باشد.

[۵] Godunova
[۶] Levin
[۷] Schur

برخی از نامساوی های مربوط به توابع محدب، برای این خانواده از توابع توسیع داده شده اند. به عنوان مثال نامساوی های ینسن و هرمیت–هادامار برای توابع Q-رده به صورت زیر تعمیم داده شده اند.

قضیه ۶.۱.۱. [۴۱] فرض کنید $f : J \to \mathbb{R}$ تابعی Q-رده باشد و $x_i \in J$. اگر $p_i > ۰$ و $P = \sum_{i=۱}^{n} p_i$ آنگاه

$$f\left(\frac{۱}{P}\sum_{i=۱}^{n} p_i x_i\right) \leq P\sum_{i=۱}^{n}\frac{f(x_i)}{p_i}. \qquad (۷.۱)$$

قضیه ۷.۱.۱. [۱۸] اگر $f : J \to \mathbb{R}$ تابعی انتگرال پذیر و Q-رده باشد و $a, b \in J$، آنگاه

$$(۱)\ f\left(\frac{a+b}{۲}\right) \leq \frac{۴}{b-a}\int_a^b f(x)dx;$$
$$(۲)\ \frac{۱}{b-a}\int_a^b \frac{(b-x)(x-a)}{(b-a)^۲} f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{۲}.$$

برای یافتن خواص و نتایج دیگر مربوط به توابع Q-رده حقیقی به [۱۷، ۱۸، ۴۱، ۴۷، ۴۸] رجوع کنید.

۲.۱ مفاهیمی از نظریه عملگرها

فرض کنیم $\mathbb{B}(\mathscr{H})$ جبر همه عملگرهای خطی کراندار (که در این رساله آنها را به اختصار عملگر خواهیم نامید) روی فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ و I عملگر همانی روی $\mathscr{H}$ باشد. هرگاه $\mathscr{H}$ با بعد متناهی n باشد، $\mathscr{H}$ را با فضای هیلبرت $\mathbb{C}^n$ می انگاریم. از طرفی بین فضای ماتریس های مختلط $n \times n$ یعنی $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ و فضای همه تبدیلات خطی روی $\mathbb{C}^n$ یعنی $\mathbb{B}(\mathbb{C}^n)$ تناظری یک به یک وجود دارد. بنابراین می توان در حالت متناهی البعد $\mathbb{B}(\mathscr{H})$ را با $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ یکی در نظر گرفت و نرم عملگری روی $\mathbb{B}(\mathscr{H})$ را روی $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ در نظر گرفت.

برای هر عملگر A، الحاق A، که آنرا با A^* نشان می دهیم، عملگری است یکتا که برای هر $x, y \in \mathscr{H}$ در رابطه $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ صدق می کند. عملگر $A \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$ را

خودالحاق نامیم هرگاه $A = A^*$؛

مثبت نامیم و به صورت $A \geq ۰$ نمایش می دهیم هرگاه برای هر $x \in \mathscr{H}$، $\langle Ax, x\rangle \geq ۰$؛

اکیداً مثبت نامیم و با $A > ۰$ نشان می دهیم هرگاه A مثبت و وارون پذیر باشد؛

نرمال نامیم هرگاه $A^*A = AA^*$؛

یکمتری نامیم هرگاه $A^*A = I$؛

انقباضی نامیم هرگاه $A^*A \leq I$؛

انبساطی نامیم هرگاه $A^*A \geq I$؛

تصویر نامیم هرگاه $A = A^* = A^۲$.

اگر A و B دو عملگر روی فضاهای هیلبرت به ترتیب $\mathscr{H}$ و $\mathscr{K}$ باشند، آنگاه $A \oplus B$ عملگری است روی فضای هیلبرت $\mathscr{H} \oplus \mathscr{K}$ که به صورت $\begin{pmatrix} A & ۰ \\ ۰ & B \end{pmatrix}$ تعریف می شود.

فرض کنیم $\mathscr{H}, \mathscr{K}$ دو فضای هیلبرت باشند. نگاشت $\Phi : \mathbb{B}(\mathscr{H}) \to \mathbb{B}(\mathscr{K})$ را *مثبت* نامیم هرگاه برای هر عملگر مثبت $A \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$، $\Phi(A)$ عملگری مثبت در $\mathbb{B}(\mathscr{K})$ باشد؛ *اکیداً مثبت* نامیم هرگاه برای هر عملگر اکیداً مثبت A، $\Phi(A)$ عملگری اکیداً مثبت در $\mathbb{B}(\mathscr{K})$ باشد؛ *یکانی* نامیم هرگاه نگاشت Φ عنصر همانی را حفظ کند، یعنی $\Phi(I_{\mathscr{H}}) = I_{\mathscr{K}}$.

مثال ۱.۲.۱. فرض کنیم $C_i \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$ $(i = ۱, \cdots, n)$ به طوری که $\sum_{i=۱}^n C_i^*C_i = I$. در این صورت نگاشت $\Phi : \mathbb{B}(\mathscr{H}) \to \mathbb{B}(\mathscr{H})$ که به صورت $\Phi(A) = \sum_{i=۱}^n C_i^*AC_i$ تعریف می شود، یک نگاشت خطی مثبت یکانی است. در حالت خاص اگر $C \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$ یکمتری باشد، آنگاه $\Phi(A) = C^*AC$ یک نگاشت خطی مثبت یکانی است.

مثال ۲.۲.۱. فرض کنیم $\mathscr{H} = \mathbb{C}^n$ و $k < n$. در این صورت نگاشت $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$

که به صورت

$$\Phi((a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}) = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$$

تعریف می شود، یک نگاشت خطی مثبت یکانی است.

اکنون نیاز به ابزاری داریم که مفهوم توابع عملگری را با استفاده از آن تعریف کنیم. این ابزار قدرتمند که با استفاده از آن بسیاری از خواص توابع حقیقی مقدار را می توان به عملگرها توسیع داد، حساب تابعی نامیده می شود. ابتدا طیف یک عملگر را تعریف می کنیم. طیف عملگر A که آن را با $sp(A)$ نشان می دهیم، مجموعه ای است شامل همه اعداد مختلط مانند λ که به ازای آنها عملگر $A-\lambda$ وارون پذیر نباشد. طیف یک عملگر زیرمجموعه ای ناتهی و فشرده از اعداد مختلط می باشد.

فرض کنیم A عملگری خودالحاق روی فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ باشد. در این صورت نگاشت گلفند[۸] [۴۵] یک $*$-یکریختی یکمتری مانند $\Phi : C(sp(A)) \to C^*(A)$ بین مجموعه $C(sp(A))$، متشکل از همه توابع پیوسته تعریف شده روی مجموعه $sp(A)$ و C^*-جبر $C^*(A)$ تولید شده توسط A و عملگر همانی I تعریف می کند به طوری که برای هر $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ و هر $f,g \in C(\sigma(A))$

$$(۱)\quad \Phi(\alpha f+\beta g) = \alpha\Phi(f)+\beta\Phi(g);$$

$$(۲)\quad \Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)\ ,\ \Phi(\bar{f}) = \Phi(f)^*;$$

$$(۳)\quad \|\Phi(f)\| = \|f\| = \sup_{t\in\sigma(A)} |f(t)|;$$

$$(۴)\quad \Phi(۱) = I\ , \qquad \Phi(t) = A.$$

بنابراین برای هر $f \in C(\sigma(A))$، عملگری مانند $\Phi(f)$ داریم که آن را با نماد $f(A)$ نشان داده و به آن حساب تابعی در A می گوییم. برای درک بهتر، توجه کنید که Φ تابع ثابت $f(t) = ۱$ را به عملگر همانی و تابع $f(t) = t$ را به A می برد. بنابراین هر چندجمله ای به صورت $p(t)$ به عملگر

[۸] Gelfand

$p(A)$ برده می شود. چون هر تابع پیوسته مانند f طبق قضیه استون- وایرشتراس حد یکنواخت دنباله ای از چندجمله ای ها مانند $p_n(t)$ می باشد، عملگر $f(A)$ را می توان حد دنباله $p_n(A)$ از عملگرها در توپولوژی نرم در نظر گرفت.

۳.۱ نامساوی های عملگری

عناصر خودالحاق در $\mathbb{B}(\mathscr{H})$ تشکیل یک زیرفضای حقیقی می دهند که آن را با $\mathbb{B}_h(\mathscr{H})$ نشان خواهیم داد. می توان یک رابطه ترتیب جزیی روی عناصر $\mathbb{B}_h(\mathscr{H})$ در نظر گرفت (که آن را ترتیب عملگری می نامیم). بدین ترتیب که برای $A, B \in \mathbb{B}_h(\mathscr{H})$ گوییم $A \leq B$ اگر و تنها اگر $B-A \geq 0$. همچنین $A < B$ اگر و تنها اگر $B-A > 0$. به ویژه اگر m, M دو عدد حقیقی باشند، آنگاه $m \leq A \leq M$ اگر و تنها اگر برای هر بردار یکه $x \in \mathscr{H}$ نامساوی $m \leq \langle Ax, x\rangle \leq M$ برقرار باشد.

بنابراین با نامساوی هایی سروکار داریم که طرفین آنها از عملگرهای خودالحاق تشکیل شده و نامساوی عملگری خوانده می شوند. در سال های اخیر، بسیاری از نویسندگان سعی در بیان و اثبات این گونه نامساوی ها داشته اند. در این میان، برخی از نامساوی های عددی برای عملگرها توسیع داده شده اند. اما باید توجه داشت که بسیاری از نامساوی های عددی قابل توسیع به عملگرها نبوده و یا فرم عملگری آن ها با صورت عددی نامساوی متفاوت می باشد. در ادامه مقدماتی از این گونه نامساوی ها می آوریم.

حساب تابعی ابزاری بسیار کاربردی برای یافتن نامساوی های عملگری می باشد. فرض کنیم A عملگری خودالحاق باشد و f یک تابع حقیقی پیوسته روی $sp(A)$ باشد به طوری که برای هر $t \in sp(A)$ داریم $f(t) \geq 0$. در این صورت $f(A) \geq 0$. یعنی $f(A)$ عملگری مثبت است. به علاوه اگر $g(t)$ یک تابع حقیقی پیوسته باشد به طوری که روی $sp(A)$ داشته باشیم $f \leq g$، آنگاه $f(A) \leq g(A)$.

فرض کنیم $\mathscr{H}$ فضایی هیلبرت و J بازه ای حقیقی باشد. منظور از $\sigma(J)$ در سرتاسر این رساله، مجموعه همه عملگرهای خودالحاقی است که طیف آنها زیر مجموعه ای از J است، یعنی $\sigma(J) = \{A \in \mathbb{B}_h(\mathscr{H});\ \ sp(A) \subseteq J\}$.

فرض کنیم $f : J \to \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی محدب و پیوسته باشد. اگر $a_i \in J$ و $\lambda_i \in [0, 1]$ به طوری که $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ آنگاه نامساوی ینسن (۲.۱) به صورت

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i) \tag{۸.۱}$$

بیان می شود. برای یافتن تعبیری ماتریسی از این نامساوی قرار می دهیم

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad x = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

بنابراین نامساوی (۸.۱) به شکل

$$f(\langle Ax, x\rangle) \leq \langle f(A)x, x\rangle$$

در می آید. قضیه زیر که به مند[۹] و پچریچ منسوب است، نسخه ای عملگری از نامساوی کلاسیک ینسن به دست می دهد.

قضیه ۱.۳.۱ [۴۱] فرض کنیم $m < M$ دو عدد دلخواه بوده و $A \in \sigma([m, M])$. اگر f تابعی محدب روی $[m, M]$ باشد، آنگاه برای هر بردار یکه $x \in \mathscr{H}$

$$f(\langle Ax, x\rangle) \leq \langle f(A)x, x\rangle.$$

نامساوی هولدر[۱۰]–مک کارتی[۱۱]، حالت خاصی از قضیه ۱.۳.۱ می باشد:

[۹] B. Mond
[۱۰] Hölder
[۱۱] McCarthy

قضیه ۲.۳.۱. [۲۲] فرض کنیم $A \in \mathbb{B}_h(\mathscr{H})$ عملگری مثبت و $x \in \mathscr{H}$ برداری یکه باشد. در این صورت

(۱) اگر $r \geq ۱$، آنگاه $\langle A^r x, x\rangle \geq \langle Ax, x\rangle^r$،

(۲) اگر $۰ < r < ۱$، آنگاه $\langle A^r x, x\rangle \leq \langle Ax, x\rangle^r$،

(۳) اگر $A > ۰$ و $r < ۰$، آنگاه $\langle A^r x, x\rangle \geq \langle Ax, x\rangle^r$.

اکنون به معرفی توابع محدب عملگری می پردازیم.

تعریف ۳.۳.۱. تابع حقیقی و پیوسته $f : J \to \mathbb{R}$ را *محدب عملگری* نامیم هرگاه برای هر $A, B \in \sigma(J)$ و هر $\lambda \in [۰, ۱]$ نامساوی

$$f(\lambda A + (۱-\lambda)B) \leq \lambda f(A) + (۱-\lambda) f(B) \qquad (۹.۱)$$

برقرار باشد. f را *مقعر عملگری* نامیم هرگاه $-f$ محدب عملگری باشد.

تعریف ۴.۳.۱. تابع حقیقی و پیوسته $f : J \to \mathbb{R}$ را *یکنوای عملگری* نامیم اگر برای هر $A, B \in \sigma(J)$ که $A \leq B$، نامساوی $f(A) \leq f(B)$ برقرار باشد. به عبارت هرگاه f نسبت به ترتیب عملگری یکنوا باشد، آنگاه f را یکنوای عملگری می نامیم.

مثال ۵.۳.۱. اگر $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \geq ۰$، آنگاه تابع $f(t) = \alpha + \beta t$ روی هر بازه یکنوای عملگری است. همچنین f برای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ محدب عملگری است.

تبصره ۶.۳.۱. باید توجه داشت که هر تابع یکنوای عملگری تابعی صعودی به مفهوم توابع حقیقی نیز می باشد ولی عکس آن برقرار نیست. همچنین هر تابع محدب عملگری یک تابع محدب به مفهوم توابع حقیقی است ولی نه بر عکس. مثال های زیر را ببینید.

مثال ۱.۳.۷. اگرچه تابع $f(t)=t^{۲}$ روی بازه $[۰,\infty)$ تابعی صعودی است، اما یکنوای عملگری نیست. اگر قرار دهیم

$$A=\begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} \quad و \quad B=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix},$$

آنگاه $A \geq B \geq ۰$ ولی $A^{۲} \ngeq B^{۲}$، زیرا

$$A^{۲}-B^{۲}=\begin{pmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۲ \end{pmatrix} \ngeq ۰.$$

مثال ۱.۳.۸. تابع $f(t)=t^{۳}$ روی بازه $[۰,\infty)$ محدب است ولی محدب عملگری نیست. در حقیقت اگر A و B ماتریس های مثال ۱.۳.۷ باشند، آنگاه داریم

$$\frac{A^{۳}+B^{۳}}{۲}-\left(\frac{A+B}{۲}\right)^{۳}=\frac{۱}{۴}\begin{pmatrix} ۱۱ & ۹ \\ ۹ & ۷ \end{pmatrix} \ngeq ۰.$$

توجه می کنیم که دو طرف یک نامساوی عملگری را نمی توان در یک عملگر، حتی در یک عملگر خودالحاق ضرب کرد. به عبارت دیگر اگر $X \in \mathbb{B}_h(\mathscr{H})$، $A,B \in \mathbb{B}_h(\mathscr{H})$ و $A \leq B$، آنگاه نامساوی $XA \leq XB$ لزوماً درست نمی باشد. در حقیقت $XB-XA$ مثبت نیست زیرا خودالحاق نیست. لم زیر نشان می دهد که چگونه می توان طرفین یک نامساوی عملگری را در یک عملگر دیگر ضرب کرد.

لم ۱.۳.۹. اگر $A,B \in \mathbb{B}_h(\mathscr{H})$ و $A \leq B$، آنگاه برای هر $Z \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$ داریم

$$Z^*AZ \leq Z^*BZ.$$

برهان. برای هر بردار یکه $x \in \mathscr{H}$ داریم

$$\langle (Z^*BZ-Z^*AZ)x,x\rangle=\langle Z^*(B-A)Zx,x\rangle=\langle (B-A)Zx,Zx\rangle \geq ۰,$$

زیرا $B-A \geq ۰$. □