بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه کردستان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد (آنالیز عددی)

عنوان:

تجزیه و تحلیل روش تفاضلات متناهی برای معادلات کلاین- گوردن و کلاین- گوردن- زاخاروف

دانشجو:

روناک حسینی

استاد راهنما:

دکتر امجد علی‌پناه

استاد مشاور:

دکتر فردین ساعدپناه

بهمن ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان‌نامه به‌وسیله‌ی روش تفاضلات متناهی جواب معادلات با مشتقات جزیی، برای دو معادله‌ی کلاین-گوردن و کلاین-گوردن-زاخاروف تقریب زده می‌شود، که در آن معادله‌ی کلاین-گوردن یک معادله‌ی موج یک بعدی خطی روی دامنه‌ی بیکران و معادله‌ی با مشتقات جزیی کلاین-گوردن-زاخاروف یک معادله‌ی موج یک بعدی غیرخطی روی دامنه‌ی کراندار می‌باشند. برای حل معادله‌ی کلاین-گوردن روی دامنه‌ی بیکران دو شرط مرزی مصنوعی، به منظور تبدیل مسئله‌ی اصلی به یک مسئله‌ی مقدار اولیه مرزی روی یک دامنه‌ی کراندار، معرفی می‌شود که توسط یک روش تفاضلات متناهی صریح آنالیز می‌شود. همچنین یک الگوریتم سریع برای کاهش هزینه‌ی محاسباتی و یک روش مرزی مصنوعی گسسته که از ایده‌ی تبدیل Z ناشی می‌شود، نیز به‌دست می‌آیند. برای حل معادله‌ی کلاین-گوردن-زاخاروف یک روش تفاضلات متناهی ضمنی و یک روش صریح معرفی می‌شوند که وجود جواب دیفرانسیلی توسط قضیه‌ی نقطه ثابت لاری-شودر ثابت می‌شود. پایداری، همگرایی و یکتایی جواب هر دو معادله به روش انرژی بررسی می‌شود.

کلمات کلیدی:

معادلات با مشتقات جزیی، معادله‌ی کلاین-گوردن، معادله‌ی کلاین-گوردن-زاخاروف، دامنه‌ی بیکران ، شرایط مرزی مصنوعی، مسئله‌ی مقدار اولیه مرزی، تفاضلات متناهی.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

مقدمه

معادلات دیفرانسیل جزیی[1] پایه و اساس بسیاری ازمدلهای ریاضی در فیزیک، شیمی و پدیده‌های زیستی است و اخیرا نیز استفاده از آن‌ها در اقتصاد، پیش‌بینی‌های مالی، پردازش تصویر و سایر رشته‌ها گسترش یافته است. به همین علت حل این معادلات همواره از اهمیت خاصی برخوردار بوده است. به‌طور معمول، چنین معادلاتی به‌صورت گسترده با استفاده از روش‌های عددی مانند روش عناصر متناهی[2] (FEM)، روش تفاضلات متناهی[3] (FDM) و روش حجم متناهی[4] (FVM) و ... حل می‌شوند.

در این روش‌ها، فضای دامنه‌ای که معادله دیفرانسیل جزیی روی آن تعریف شده به شبکه‌هایی تقسیم‌بندی می‌شود. یک شبکه، به‌صورت فاصله یا فضای باز، بین کرانه‌هایی که از اتصال گره‌ها شکل گرفته‌اند، تعریف می‌شود. و در روش عناصر متناهی شبکه‌ها، عناصر[5] در روش تفاضلات متناهی، شبکه‌های مورد استفاده اغلب خطوط تراز[6] و در روش حجم متناهی شبکه‌ها، حجم[7] نامیده می‌شوند. این نام‌گذاری‌ها حاوی معانی فیزیکی مشخصی هستند به این دلیل که برای مسائل فیزیکی مختلفی استفاده می‌شوند. اگرچه همه‌ی این نام‌ها را می‌توان همان شبکه نام نهاد.

[1] Partial differential equations
[2] Finite element method
[3] Finite differnce method
[4] Finite volume method
[5] Elements
[6] Grids
[7] Volumes

تاریخچه‌ی معادله‌ی کلاین-گوردن

معادله‌ی نسبیت مکانیک کوانتوم را معادله‌ی کلاین-گوردن می‌نامند که برگرفته از نام دو فیزیکدان به اسامی اسکار کلاین [۸] و والتر گوردن [۹] می‌باشد. این دو فیزیکدان در سال ۱۹۲۷ سعی داشتند ذرات الکترون را با تئوری نسبیت عام توضیح دهند. متاسفانه چون الکترون دارای اسپین ۱/۲ است نتایج بدست آمده برای تشریح الکترون رضایت‌بخش نبود. با این وجود، معادله‌ی کلاین-گوردن می‌تواند برای ذرات بدون اسپین و ذراتی که اسپین آنها اعداد صحیح (... ,۲ ,۱ ,۰) می‌باشد توضیح داده شود.

معادله‌ی کلاین-گوردن برای اولین بار توسط شرودینگر [۱۰] مورد بررسی قرار گرفت. این معادلات در یادداشتهای وی حدوداً در سال ۱۹۲۵ یافت شد. او این معادله را برای توضیح دادن اتم هیدروژن تنظیم کرده بود. متاسفانه معادله‌ی کلاین-گوردن در توضیح یک ساختار مناسب برای طیف اتم هیدروژن با شکست مواجه شد. در ژانویه‌ی ۱۹۲۶ شرودینگر معادله‌ی کلاین-گوردن را با معادله‌ای که به معادله‌ی شرودینگر مشهور شد تعویض کرد. اما از آنجایی که معادله‌ی شرودینگر از یک ایده‌ی فاقد نسبیت استفاده کرده بود، تئوری نسبیت انیشتین در این معادله برآورده نمی‌شد. پس باید یک معادله‌ی کوانتوم یافت می‌شد که در تئوری نسبیت انیشتین صادق باشد.

در سال ۱۹۲۶، کمی بعد از شرودینگر، فوک [۱۱] در مقاله‌ای معادله‌ی شرودینگر را مستقل از معادله‌ی کلاین-گوردن تعمیم داد. در این راستا، کلاین و گوردن نیز مقاله‌ای ارائه دادند که در آن همان معادله را بدست آورده بودند. به دلیل همکاری فوک اغلب به معادله‌ی کلاین-گوردن با عنوان کلاین-فوک-گوردن مراجعه می‌شود. لذا معادلات نسبیت مکانیک کوانتوم برای ذرات آزاد مقارن با یک معادله هستند، که جوابهای موجی ساده‌ای دارد. این معادله، معادله‌ی کلاین-گوردن برای ذراتی که اسپین آنها اعداد صحیح (... ,۲ ,۱ ,۰) است، می‌باشد.

---

[۸] Oskar Klein

[۹] Walter Gordon

[۱۰] Schrodinger

[۱۱] Fock

۱.۱ ضرب داخلی و نرم‌ها

تعریف ۱. فرض کنیم V یک فضای برداری[۱۲] روی میدان اعداد حقیقی باشد. هر ضرب داخلی[۱۳] بر فضای حقیقی V، تابعی از دو متغیر مانند $(\cdot,\cdot) : V \times V \longrightarrow [\circ, \infty)$ است که دارای شرایط زیر باشد

$$۱)\quad (v,v) = \circ \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad v = \circ$$

$$۲)\quad (v,w) = (w,v), \qquad \forall v,w \in V,$$

$$۳)\quad (\lambda v + \mu w, s) = \lambda(v,s) + \mu(w,s), \quad \forall v,w,s \in V, \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

از تقارن[۱۴] شرط دوم و خاصیت خطی شرط سوم، می‌بینیم که هر ضرب داخلی بر یک فضای برداری حقیقی، نسبت به مولفه‌ی دوم نیز خطی است.

تعریف ۲. هر فضای برداری حقیقی مجهز به یک ضرب داخلی را یک فضای ضرب داخلی حقیقی می‌نامیم.

تعریف ۳. یک نرم در فضای برداری V تابعی مانند $\|\cdot\| \longrightarrow [\circ, \infty)$ است که در شرایط زیر صدق کند

$$۱)\quad \|v\| = \circ \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad v = \circ,$$

$$۱)\quad \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V,$$

$$۳)\quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \qquad \forall v,w \in V.$$

اگر شرط اول برقرار نباشد، به تابع بالا نیم-نرم[۱۵] گفته می‌شود و با $|.|$ نمایش داده می‌شود. نرم یک تابع پیوسته است.

تعریف ۴. اگر V یک فضای ضرب داخلی و $(\cdot,\cdot)$ یک ضرب داخلی بر V باشد، آنگاه نرم متناظر با آن برابر است با

$$\|v\| = (v,v)^{\frac{۱}{۲}}, \quad \forall v \in V.$$

یک فضای برداری با یک نرم، فضای برداری نرم‌دار[۱۶] گفته می‌شود.

۲.۱ فضاهای تابعی

تعریف ۵. هرگاه هر دنباله‌ی کوشی در فضای نرم‌دار V همگرا باشد، آن را یک فضای برداری کامل گوییم.

تعریف ۶. فضای برداری نرم‌دار V را یک فضای باناخ[۱۷] گوییم هرگاه کامل باشد.

[۱۲] Vector space
[۱۳] Inner product
[۱۴] Symmetry
[۱۵] Semi-norm
[۱۶] Normed vector space
[۱۷] Banach space

تعریف ۷. فضای ضرب داخلی V را یک فضای هیلبرت [۱۸] گوییم هرگاه V نسبت به نرم تولید شده توسط ضرب داخلی، کامل باشد.

تعریف ۸. فضای برداری که عناصرش تابع باشند، فضای توابع نامیده می‌شود. به عنوان مثال:

- $C[a,b]$، فضای همه‌ی توابع پیوسته بر $[a,b]$ می‌باشد.
- $L^{۲}[a,b]$، فضای مجموعه توابعی است که انتگرال توان دوم آن‌ها در $[a,b]$ موجود باشد یعنی:

$$L^{۲}[a,b]=\left\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\,\middle|\,\int_a^b f^{۲}(x)\,dx<\infty\right\}.$$

فضای $L^{۲}[a,b]$ یک فضای ضرب داخلی است که برای هر تابع $f,g\in L^{۲}[a,b]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$(f,g)_{L^{۲}}=(f,g)=\left(\int_a^b fg\,dx\right).$$

همچنین $L^{۲}$-نرم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|f\|=\|f\|_{L^{۲}[a,b]}=\left(\int_a^b |f|^{۲}\,dx\right)^{\frac{۱}{۲}}.$$

تعریف ۹. تابع $v:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ مفروض است، که در آن

$$\mathbb{R}^d=\{\mathrm{x}=(x_{۱},\ldots,x_d):x_i\in\mathbb{R},i=۱,۲,\ldots,d\},$$

مشتق جزیی تابع v از مرتبه‌ی $|\alpha|$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D^\alpha v=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_{۱}^{\alpha_{۱}}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}},$$

که در آن

$$\alpha=(\alpha_{۱},\alpha_{۲},\ldots,\alpha_d),\quad \alpha_i\geq ۰,\quad \alpha_i\in\mathbb{Z},$$

یک چند-اندیس[۱۹] d-تایی است و اندازه‌ی آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$|\alpha|=\sum_{i=۱}^d\alpha_i.$$

---

[۱۸] Hilbert space

[۱۹] Multi-index

تعریف ۱۰. فرض کنیم $S \subset \mathbb{R}^d$ و V فضای برداری از توابع باشد. فضای برداری H^k برای $k \geq 1$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H^k = H^k(S) = \{v \in L^2 : D^\alpha v \in L^2, \ \ |\alpha| \leq k\},$$

به فضای H^k، فضای سوبولوف[20] می‌گویند. به عنوان مثال، فضای سوبولوف H^1 که کاربرد زیادی در روش تفاضلات متناهی دارد، به‌صورت زیر است:

$$H^1 = H^1(S) = \{v \in L^2 : D^\alpha v \in L^2, \ \ |\alpha| \leq 1\}.$$

تعریف ۱۱. فرض کنیم $S \subset \mathbb{R}^d$ و $v \in V$ باشد، در این‌صورت H^k-نرم را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|v\|_k = \|v\|_{H^k(S)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

در حالت $k = 1$ داریم

$$\|v\|_1 = \Big(\int_\Omega \Big\{v^2 + \sum_{j=1}^{d} (\frac{\partial v}{\partial x_j})^2\Big\} dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

۳.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی

یک معادله دیفرانسیل جزیی(PDE)، معادله‌ای است که شامل یک تابع مجهول از چند متغیر مستقل و وابسته و یک یا چند مشتق جزیی تابع نسبت به آن‌ها باشد. در حالت کلی، یک معادله دیفرانسیل جزیی به‌صورت

$$f\Big(x, y, ..., u; \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, ...; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; ...\Big) = 0,$$

نشان داده می‌شود. این معادله شامل چند متغیر مستقل $x, y, \ldots$ و یک تابع مجهول u که تابعی از متغیرهای مستقل است و مشتقات جزیی $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots$ می‌باشد. این معادله در دامنه S از فضای $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌شود. برای حل آن، تابع $u(x, y, ...)$ که در دامنه S، در معادله صدق می‌کند جستجو می‌شود. اگر چنین تابعی وجود داشته باشد آن‌را جواب معادله می‌نامند. معادلات دیفرانسیل جزیی را بر اساس مرتبه، تعداد متغیرها و خطی بودن آن‌ها طبقه‌بندی می‌کنند. مرتبه‌ی یک معادله دیفرانسیل جزیی، مرتبه‌ی بالاترین مشتق جزیی در معادله است. این معادله خطی است هرگاه متغیر وابسته u و همه‌ی مشتقات به‌صورت خطی ظاهر شوند و در غیر این‌صورت غیرخطی است. آن‌دسته از معادلات که تنها نسبت به بالاترین مرتبه‌ی موجود خطی هستند، معادلات شبه خطی[21] نامیده می‌شوند.

یک معادله دیفرانسیل جزیی مرتبه دوم دو متغیره، معادله‌ای است به شکل

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0, \quad (1.1)$$

[20] Sobolov space

[21] Semi-linear

که a, b, c, d, e, f, g ممکن است ثابت یا توابعی از متغیرهای مستقل x و y و متغیر وابسته u باشند.
معادله (۱.۱) را همگن گویند اگر تابع $g(x,y)$ به ازای هر x, y مساوی صفر باشد، در غیر این‌صورت آن‌را ناهمگن می‌گویند.
معادلات دیفرانسیل جزیی مرتبه‌ی دوم (رابطه‌ی (۱.۱)) به سه دسته تقسیم می‌شوند:
۱) اگر $b^۲ - ۴ac < ۰$ باشد معادله را بیضوی[۲۲] می‌نامند.
۲) اگر $b^۲ - ۴ac = ۰$ باشد معادله را سهموی[۲۳] می‌نامند.
۳) اگر $b^۲ - ۴ac > ۰$ باشد معادله را هذلولوی[۲۴] می‌نامند.

۱.۳.۱ معادلات بیضوی دوبعدی

این معادلات که معروف‌ترین آن‌ها معادله پواسون[۲۵]

$$\Delta^۲ u + g = ۰,$$

و معادله لاپلاس[۲۶]

$$\Delta^۲ u = ۰,$$

است، که در آن $\Delta^۲$ عملگر دو بعدی لاپلاس است که در مختصات دکارتی (x, y) به شکل $\Delta^۲ = \frac{\partial^۲}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial y^۲}$ و در حالت کلی در مختصات n-بعدی به‌صورت $\Delta^۲ = \sum_{i=۱}^{n} \frac{\partial^۲}{\partial x_i^۲}$ تعریف می‌شود. این معادلات به‌طور کلی در ارتباط با مسائل تعادل[۲۷] یا مسائل حالت پایدار[۲۸] مطرح می‌شوند.

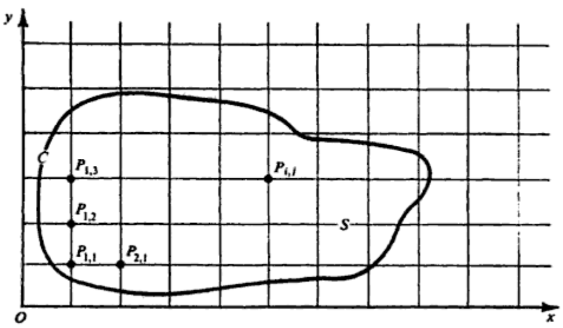
۲.۳.۱ معادلات سهموی و هذلولوی

مسائل مقدار اولیه یا مسائل تکثیر به‌وسیله‌ی معادلات هذلولوی و سهموی بیان می‌شوند. این معادلات را معادلات وابسته به زمان[۲۹] می‌گویند.
ساده‌ترین معادله‌ی سهموی، معادله‌ی $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}$ است که از تئوری رسانایی گرمایی ناشی می‌شود، همچنین ساده‌ترین معادله هذلولوی معادله‌ی موج یک بعدی $\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲} = c^۲\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}$ است.

---
[۲۲] Elliptic
[۲۳] Parabolic
[۲۴] Hyperbolic
[۲۵] Poisson’s equation
[۲۶] Laplace’s equation
[۲۷] Equilibrium problems
[۲۸] Steady-State problems
[۲۹] Time dependent equation

۳.۳.۱ جواب‌های تحلیلی و عددی یک معادله دیفرانسیل جزیی

جواب‌های تحلیلی جواب‌هایی هستند که در آن‌ها تابع مجهول u به‌صورت عبارات ریاضی، بر حسب متغیرهای مستقل و پارامترهای دستگاه که معمولا بر حسب یک سری نامتناهی یا انتگرال‌اند، داده شده است. جواب تحلیلی دارای این مزیت است که برای پیدا کردن جواب در نقطه‌ی مشخصی مانند (x, y)، با قرار دادن این نقطه در فرمول جواب تحلیلی می‌توان جواب را با هر درجه‌ای از دقت به‌دست آورد. در حقیقت جواب تحلیلی جواب را در هر نقطه‌ی مطلوب بدون انجام تمام فرایند یافتن جواب در سایر نقاط، پیدا می‌کند.
جواب عددی یک معادله دیفرانسیل جزیی، جوابی است که به‌وسیله‌ی تعویض معادله با یک معادله‌ی آسان‌تر به‌دست می‌آید. به عنوان مثال در روش تفاضلات متناهی، معادله‌ی اصلی را با تفاضلات متناهی عوض می‌کنند و جواب معادله‌ی تغییر یافته، جواب معادله‌ی اصلی را تقریب می‌زند. نتیجه معمولا به‌صورت جدولی است که جواب را به ازای مقادیر مختلفی از متغیرهای مستقل لیست می‌کند.
از آن‌جایی که به‌دست آوردن جواب تحلیلی اکثر معادلات در بیشتر موارد امکان‌پذیر نیست، برای حل این معادلات از روش‌های عددی استفاده می‌شود، حتی در بعضی موارد که جواب تحلیلی وجود دارد، به دلیل این‌که جواب به‌صورت بسط تابع و یا سری بیان می‌شود بهتر است از جواب‌های عددی استفاده شود.
جواب تحلیلی یک معادله بیضوی دو بعدی تابعی است از متغیرهای y, x که در هر نقطه‌ای از ناحیه S که توسط یک منحنی هموار C محدود شده است، در معادله دیفرانسیل جزیی صدق می‌کند. این جواب همچنین در شرایطی که در هر نقطه روی مرز منحنی وجود دارد، صادق است. به شرطی که متغیر وابسته باید در آن حول مرز بسته‌ی C صدق کند شرط مرزی گویند. شکل ۱.۱ نمایی از ناحیه S را که توسط مرز C محصور شده است نشان می‌دهد.



شکل ۱.۱: ناحیه S که توسط مرز C محصور شده است.

شرایط مرزی خود به سه دسته تقسیم می‌شوند:

۱) شرط مرزی دیریکله[۳۰]: مقدار تابع مجهول u در مرزهای دامنه مقداری معلوم و مشخص شده است. یعنی اگر S دامنه‌ای باشد که معادله دیفرانسیل جزیی در آن برقرار است و ∂S مرز این دامنه باشد، آنگاه شرط مرزی دیریکله به‌صورت زیر می‌باشد

$$u(x,t) = g(t), \quad \forall x \in \partial S, \quad \forall t \in (0,T),$$

که در آن $g(t)$ یک تابع معلوم تعریف شده روی مرز ∂S است. (اگر $g(t) = 0$ باشد آن‌گاه شرط مرزی را شرط مرزی دیریکله‌ی همگن می‌نامند.)

۲) شرط مرزی نویمن[۳۱]: مشتق نرمال u، $\frac{\partial u}{\partial n}$، در مرزهای دامنه مقداری مشخص شده است، یعنی

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = g(t), \quad \forall x \in \partial S, \quad \forall t \in (0,T),$$

که مشتق نرمال به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = n(x,t) \cdot \nabla u(x,t)$$

که در آن ∇ گرادیان (بردار)، «$\cdot$» ضرب داخلی و n بردار یکه‌ی نرمال می‌باشد.

۳) شرط مرزی رابین[۳۲]: مقدار تابع مجهول u و مقدار مشتق نرمال آن در مرز دامنه مشخص شده است. یعنی

$$au(x,t) + b\frac{\partial u}{\partial n} = g(t), \quad \forall x \in \partial S, \quad \forall t \in (0,T),$$

که a و b ضرایب ناصفر و $g(t)$ تابع معلوم تعریف شده روی مرز دامنه می‌باشد.

در مسائل سهموی و هذلولوی علاوه بر شرط‌های مرزی، شرطی تحت عنوان شرط اولیه نیز مطرح می‌شود. در این‌گونه مسائل زمان خاصی ($t = 0$) را به عنوان زمان شروع در نظر گرفته و مقدار u در آن زمان را به عنوان شرط اولیه در نظر می‌گیرند. دامنه در این مسائل معمولا به عنوان یک ناحیه باز توصیف می‌شود.

۴.۳.۱ روشهای حل یک معادله دیفرانسیل جزیی

ازجمله روش‌های تحلیلی حل یک معادله دیفرانسیل جزیی می‌توان روش جداسازی متغیرها[۳۳]، روش دالامبر[۳۴]، روش تبدیل فوریه و روش تبدیل لاپلاس را نام برد [۱۴،۱۸]. اما ازجمله روشهای عددی حل یک معادله دیفرانسیل جزیی همان‌طور که قبلا نیز اشاره شد، می‌توان روش تفاضلات متناهی و روش عناصر متناهی [۲،۶] و ... را نام برد، که در اینجا روش تفاضلات متناهی مدنظر است.

[۳۰] Dirichlet boundary condition
[۳۱] Neumann boundary condition
[۳۲] Robin boundary condition
[۳۳] Separating variables
[۳۴] DAlembert's method

۴.۱ عملگرهای تفاضلات متناهی

در این بخش ابتدا عملگرهای تفاضلات متناهی را معرفی می‌کنیم. سپس با استفاده از این عملگرها تقریب‌های تفاضلات متناهی مناسبی برای مشتق‌ها به‌دست می‌آوریم.

تعریف ۱۲. فرض کنید $y = f(x)$ یک تابع باشد و مقدار آن در نقاط $x, x+h, x+2h, \dots$ معلوم باشد، در این‌صورت عملگر انتقال[۳۵] بانماد E نمایش داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Ef(x) = f(x+h),$$

$$E^{\alpha} f(x) = f(x+\alpha h),$$

که در آن α یک عدد حقیقی است.

تعریف ۱۳. فرض کنید $y = f(x)$ یک تابع باشد و مقدار آن در نقاط $x, x+h, x+2h, \dots$ معلوم باشد، همچنین فرض کنید I عملگر همانی باشد، در این‌صورت عملگر تفاضل پیشرو[۳۶] با نماد Δ نمایش داده شده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta = E - I,$$

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x).$$

در حالت کلی تفاضل پیشرو مرتبه‌ی rام عبارت است از

$$\Delta^r f(x) = \Delta\big(\Delta^{r-1} f(x)\big) = \Delta^{r-1} f(x+h) - \Delta^{r-1} f(x) \quad r \geq 1,$$

همچنین اگر $y_i = f(x_0 + ih)$ در این‌صورت تفاضل پیشرو مرتبه‌ی اول و مرتبه‌ی rام گسسته‌ی y عبارت است از

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \qquad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$\Delta^r y_i = \Delta\left(\Delta^{r-1} y_i\right) = \Delta^{r-1} y_{i+1} - \Delta^{r-1} y_i.$$

تعریف ۱۴. فرض کنید $y = f(x)$ یک تابع باشد و مقدار آن در نقاط $x, x+h, x+2h, \dots$ معلوم باشد، در این‌صورت عملگر تفاضل پسرو[۳۷] ∇ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla = I - E^{-1},$$

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h).$$

[۳۵] Shift operator

[۳۶] Forward difference

[۳۷] Backward difference

در حالت کلی تفاضل پسرو مرتبه‌ی rام عبارت است از

$$\nabla^r f(x) = \nabla^{r-1} f(x) - \nabla^{r-1} f(x-h) \quad r \geq 1,$$

همچنین اگر $y_i = f(x_0 + ih)$ در این‌صورت تفاضل پسرو مرتبه‌ی اول و مرتبه‌ی rام گسسته‌ی y عبارت است از

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1},$$

$$\nabla^r y_i = \nabla\left(\nabla^{r-1} y_i\right) = \nabla^{r-1} y_i - \nabla^{r-1} y_{i-1}.$$

لم ۱۵. به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

الف- $\Delta^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j E^{n-j},$

ب- $\nabla^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} E^{j-n}.$

نتیجه ۱. با توجه به لم بالا واضح است که $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0$.

تعریف ۱۶. عملگر تفاضل مرکزی[۳۸] δ برای تابع $f(x)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right),$$

که به آن عملگر مرکزی مرتبه‌ی اول می‌گویند. عملگر مرکزی مرتبه‌ی دوم نیز به‌صورت زیر می‌باشد

$$\delta^2 f(x) = f(x-h) - 2f(x) + f(x+h).$$

تعریف ۱۷. عملگر میانگین برای تابع $f(x)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mu f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x + \frac{h}{2}) + f(x - \frac{h}{2})\right).$$

تعریف ۱۸. عملگر مشتق برای تابع $f(x)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$Df(x) = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x).$$

برای پیشرفت بیشتر باید عملگر D را به سایر عملگرها مربوط سازیم، برای این منظور قضیه‌ی زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۱.

$$\left(D = \frac{1}{h} \ln\left(I + \Delta\right)\right), \quad E = \mathrm{e}^{hD}.$$

[۳۸] Central difference

اثبات. فرض کنیم $y = f(x)$ یک تابع دلخواه باشد و مقدار آن در نقاط متساوی‌الفاصله با طول گام h معلوم باشد، سری تیلور تابع $f(x)$ یعنی

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{۱!}f'(x) + \frac{h^۲}{۲!}f''(x) + \cdots$$

را می‌توانیم به‌صورت عملگری زیر بنویسیم:

$$Ef(x) = \left[۱ + \frac{hD}{۱!} + \frac{h^۲D^۲}{۲!} + \cdots\right]f(x) = \mathrm{e}^{hD}f(x)$$

پس ثابت شد که

$$E = \mathrm{e}^{hD}.$$

□

قضیه ۲.۱. فرض کنید I عملگر همانی باشد به‌طوریکه $If = f$. در این‌صورت روابط زیر بین عملگرها برقرارند:

الف- $\Delta \equiv E - I.$

ب- $\nabla \equiv I - E^{-۱}.$

ج- $E\Delta \equiv \Delta E.$

د- $(I+\Delta)(I-\nabla) \equiv I.$

ه- $\Delta\nabla \equiv \Delta - \nabla.$

و- $\nabla \equiv E^{-۱}\Delta.$

ذ- $\delta \equiv E^{\frac{۱}{۲}} - E^{\frac{-۱}{۲}}.$

اثبات. تمامی این روابط با استفاده از تعاریف عملگرها به‌سادگی قابل اثبات هستند. □

نتیجه ۲. از قضایای (۱.۱) و (۲.۱) روابط زیر را به‌دست می‌آوریم

$$D = \frac{۱}{h}\log E = \frac{۱}{h}\log(I+\Delta) = -\frac{۱}{h}\log(I-\nabla) = \frac{۲}{h}\sinh^{-۱}\frac{\delta}{۲},$$

و با استفاده از بسط $\log(I+\Delta)$ تفاضل پیشرو را برای مشتق درجه‌ی اول پیدا می‌کنیم

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{۱}{h}\left[\Delta - \frac{۱}{۲}\Delta^۲ + \frac{۱}{۳}\Delta^۳ - \cdots\right]f(x),$$

که تقریب تفاضل پیشرو برای مشتق درجه‌ی اول به‌صورت زیر است

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{۱}{h}\Delta f,$$

که خطای آن از مرتبه‌ی $O(h)$ است. به همین ترتیب تفاضل پسرو برای مشتق درجه‌ی اول با استفاده از بسط $\log(I - \nabla)$ عبارت است از

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{۱}{h}\Big[\nabla + \frac{۱}{۲}\nabla^{۲} + \frac{۱}{۳}\nabla^{۳} + \cdots\Big] f(x),$$

که تقریب آن به‌صورت زیر است

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{۱}{h}\nabla f,$$

و خطای آن از مرتبه‌ی $O(h)$ است. فرمول با ارزش تفاضل مرکزی را نیز می‌توان با استفاده از بسط $\sinh^{-۱}\frac{\delta}{۲}$ به‌دست آورد. تفاضل مرکزی برای مشتق درجه‌ی اول

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\mu}{h}\Big[\delta - \frac{۱^{۲}}{۳!}\delta^{۳} + \frac{۱^{۲}\cdot ۲^{۲}}{۵!}\delta^{۵} - \cdots\Big] f(x),$$

است و تقریب آن به‌صورت زیر است

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{\mu}{h}(\delta f),$$

و تفاضل مرکزی برای مشتق درجه‌ی دوم

$$\begin{aligned} D^{۲} &= \Big[\frac{۲}{h}\sinh^{-۱}\frac{\delta}{۲}\Big]^{۲} \\ &= \frac{۱}{h^{۲}}\Big[\delta^{۲} - \frac{۱}{۱۲}\delta^{۴} + \frac{۱}{۹۰}\delta^{۶} - \cdots\Big], \end{aligned}$$

که تقریب تفاضل مرکزی برای مشتق درجه‌ی دوم عبارت است از

$$\frac{\partial^{۲} f}{\partial x^{۲}} \approx \frac{۱}{h^{۲}}\delta^{۲} f,$$

و خطای آن از مرتبه‌ی $O(h^{۲})$ می‌باشد.

۵.۱ تبدیل‌های فوریه، لاپلاس، تبدیل Z و تابع بسل

در این بخش به تعاریفی از سری فوریه، تبدیل فوریه، تبدیل لاپلاس، تبدیل Z و تابع بسل خواهیم پرداخت. چنان‌چه در فصل ۲ خواهیم دید، سری فوریه نقش مهمی در آنالیز خطای روش‌های تفاضلات متناهی دارد، همچنین تبدیلات لاپلاس و Z در فصل چهارم مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱.۵.۱ سری فوریه

سری فوریه[۳۹]، یک سری مرکب از جمله‌های سینوسی و کسینوسی است و در نمایش توابع دوره‌ای (متناوب) به کار می‌رود.

[۳۹] Fourier series

تعریف ۱۹. تابع $f(x)$ را دوره‌ای (متناوب) می‌نامند اگر

$$\exists p > 0 : \quad f(x+p) = f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

عدد p را دوره‌ی تناوب $f(x)$ می‌نامند.

تعریف ۲۰. یک سری مثلثاتی به شکل

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

می‌باشد که ضرائب $a_0, a_1, \ldots$ و $b_0, b_1, \ldots$، اعداد ثابت هستند و ضرائب سری خوانده می‌شوند.

تعریف ۲۱. فرض کنیم $-L \leq x \leq L$ و $f(x)$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب $p = 2L$ باشد. آنگاه سری فوریه $f(x)$ به شکل زیر است (با فرض همگرایی سری)

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right), \tag{2.1}$$

که در آن ضرائب فوریه را از فرمول‌های اویلر[40] زیر محاسبه می‌کنیم، یعنی

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) dx \ ,$$

و

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \ dx, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$
$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \ dx, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد، آنگاه با توجه به رابطه‌های اخیر داریم

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \ dx, \qquad b_n = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

و در نتیجه سری فوریه تابع $f(x)$ به صورت زیر خواهد بود

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x \ ,$$

که به آن سری کسینوسی فوریه می‌گویند. همچنین اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد، آنگاه با توجه به رابطه‌های اخیر داریم

$$a_n = 0, \qquad b_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \ dx, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

[40] Euler formulae

و سری فوریه تابع $f(x)$ به صورت زیر خواهد بود

$$f(x) = a_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x,$$

که به آن سری سینوسی فوریه می‌گویند.

تعریف ۲۲. تبدیل فوریه‌ی[۴۱] تابع f را با $\hat{f}$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{f}(w) = \frac{۱}{\sqrt{(۲\pi)}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-iwt} dt, \quad w \in \mathbb{R}.$$

۲.۵.۱ تبدیل لاپلاس

تعریف ۲۳. فرض کنیم تابع $f(t)$ برای همه‌ی مقادیر مثبت t تعریف شده باشد. در این‌صورت تبدیل لاپلاس[۴۲] تابع $f(t)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{۰}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad s > ۰,$$

که در آن عملگر$\mathcal{L}$ ، عملگر تبدیل لاپلاس و F تبدیل لاپلاس f می‌باشد. همچنین تبدیل معکوس لاپلاس به‌صورت زیر است

$$\mathcal{L}^{-۱}\{F(s)\} = f(t),$$

که در آن،$\mathcal{L}^{-۱}$ ، عملگر تبدیل لاپلاس معکوس می‌باشد.

تبدیل لاپلاس دارای کاربردهای فراوانی است، از جمله کاربردهای تبدیل لاپلاس می‌توان به استفاده از آن در حل معادلات دیفرانسیلی و انتگرالی اشاره کرد. در فصل چهارم از این پایان‌نامه یک نمونه از این کاربرد را مشاهده می‌کنیم. همچنین تبدیل لاپلاس دارای خواص بسیار مهمی است که در ادامه به بیان این خواص می‌پردازیم.

قضیه ۳.۱. تبدیل لاپلاس یک عملگر خطی است؛ یعنی برای هر تابع انتگرال‌پذیر f و g و هر عدد ثابت حقیقی a و b

$$\mathcal{L}\{af + bg\} = a\mathcal{L}\{f\} + b\mathcal{L}\{g\}.$$

تعریف ۲۴. می‌گوییم f از مرتبه‌ی نمایی است، اگر اعداد مثبتی مانند a و M وجود داشته باشند به‌طوریکه

$$|f(t)| \leq Me^{at}, \qquad \forall t \geq ۰.$$

---

[۴۱] Fourier Transform

[۴۲] Laplac transform