بسم‌الله الرحمن الرحیم

کاربرد روش پراکندگی وارون در حل معادلهٔ غیرخطی شرودینگر

بوسیلهٔ
مژده فردوسی

پایان نامه

ارائه شده به دانشکده تحصیلات تکمیلی به عنوان بخشی از فعالیتهای تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشتهٔ
فیزیک

از
دانشگاه شیراز
شیراز، ایران

ارزیابی و تصویب شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: عالی
امضاء اعضاء کمیتهٔ پایان‌نامه:

دکتر محمد مهدی (شهرام) گلشن (استاد راهنما) .... استادیار
دکتر محمود براتی خواجویی .... دانشیار
دکتر محمد حسین دهقانی .... استادیار
دکتر نعمت‌ا... ریاضی .... دانشیار

مهرماه ۱۳۷۸

تقدیم به:

مادر فداکارم که

ذره ذره وجودم مدیون اوست.

تقدیم به:

همسر مهربانم

که مرا در این راه یاری داده است.

۳۸۴۷۸

سپاسگزاری

خداوند را سپاس می‌گویم که توفیق نوشتن این پایان‌نامه را به من عطا فرمود. در اینجا لازم می‌دانم که نهایت سپاس و قدردانی خود را از استاد بزرگوار جناب آقای دکتر محمدمهدی گلشنی، که با راهنمایی و ارشادات ارزشمندشان توانسته‌ام این پایان‌نامه را به اتمام برسانم اظهار نمایم. همچنین از اعضا محترم کمیتهٔ دفاع آقایان دکتر محمود براتی، دکتر محمد حسین دهقانی و دکتر نعمت‌ا... ریاضی، تشکر و قدرادنی خود را به خاطر نظرات سودمند و زحماتی که در امر تصحیح این پایان‌نامه کشیده‌اند، اعلام دارم.

چکیده

کاربرد پراکندگی وارون در حل معادلهٔ غیرخطی شرودینگر

به وسیله

مژده فردوسی

برای فرستادن پیام از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر روش متداول این است که پیام را به صورت یک تپ الکتریکی درآورده، سپس آن را منتقل می‌کنند. فن‌آوری امروزه انتقال این تپها را از طریق تارهای نوری امکان‌پذیر ساخته است. تپهای پرتوان سبب بروز خواص غیرخطی تارهای نوری می‌گردند. در عمل سعی می‌شود که شکل موج الکترومغناطیسی پس از عبور از درون فیبر، تغییر نکند. اما در اثر پاشندگی در تارهای نوری خطی. شکل موج عوض می‌شود. برای رفع این مشکل از تارهای نوری غیرخطی [1] استفاده می‌شود.

در این رساله به بررسی وضعیت انتشار امواج الکترومغناطیسی در این تارها می‌پردازیم. همچنین نشان می‌دهیم که تحت شرایط خاصی، یک تپ نوری می‌تواند بدون تغییر در شکل و انرژی درون اینگونه تارها منتشر شود (با صرفنظر از اتلاف انرژی). معادلهٔ حاکم بر انتشار این تپ‌ها، معادلهٔ غیرخطی شرودینگر می‌باشد که با استفاده از معادلات ماکسول در فضای فوریه و اعمال اثرات غیرخطی و برگشت به فضای حقیقی، به آن می‌رسیم. سپس برای حل این معادله روش پراکندگی وارون را معرفی نموده، و با استفاده از این روش درشمای این ZS/AKNS آن را حل می‌نماییم. در این روش (پراکندگی وارون) حل معادلهٔ غیرخطی شرودینگر برحسب داده‌های

پراکندگی که شامل ضریب بازتاب، مقادیر ویژهٔ گسسته و ثابت بهنجارش متناظر با آنهاست، حاصل می‌شود. در پایان نشان می‌دهیم که تحت شرایط مناسب معادلهٔ غیرخطی شرودینگر دارای جوابهای N سالتیونی می‌باشد. رفتار مجانبی و همچنین حالت مقید اینگونه جوابها نیز مورد بررسی قرار گرفته است. در این پایان‌نامه کمیتهای پایستار معادلهٔ غیرخطی شرودینگر نیز ارائه می‌گردد.

فهرست مطالب

صفحه

عنوان

صفحه

عنوان

فهرست تصاویر

عنوان | صفحه

فصل اول
مقدمه

در بررسی متعارف انتشار نور (برهمنهی، بازتابش، شکست و ...) رابطه‌ای خطی بین میدان الکترومغناطیسی و سیستم پاسخ دهنده (ذرات باردار محیط)، فرض می‌شود. اما با اعمال یک باریکهٔ شدید نوری می‌توان آثار غیرخطی را پدیدار نمود. میدانهای الکتریکی همراه با باریکه‌های نوری حاصل از چشمه‌های معمولی بسیار کوچکتر از آن هستند که بتوانند چنین آثار غیرخطی را به وجود آورند. با کشف لیزر در مبحث نورشناسی نیروی کافی برای به وجود آوردن آثار غیرخطی پدید آمد و اپیتک غیرخطی از لحاظ نظری و عملی روبه گسترش نهاد [۱و۲]. در نتیجه، استفاده از روابط خطی در اینگونه مسائل نامناسب خواهد بود. زیرا شدت میدان نوری تولید شده به وسیلهٔ لیزر، در حدود 10^{6} V/cm است. این میدان در مقایسه با میدان موضعی واقعی در محیط قابل صرفنظر نمی‌باشد. برای یک جسم نارسانای ایده‌آل میدان موضعی از مرتبهٔ 10^{9}V/cm است [۳]. عملاً زمانی که میدان الکتریکی ضعیف است قطبش الکتریکی حاصل. متناسب با میدان اعمال شده است و با افزایش میدان، افزایش می‌یابد. زمانی که میدان الکتریکی خیلی شدید باشد، قطبش الکتریکی تقریباً به یک حالت اشباع می‌رسد و دیگر با افزایش میدان به طور خطی افزایش نمی‌یابد. بنابراین از این پس می‌توانیم یک افزایش غیرخطیِ تدریجی ولی کوچک را پیش‌بینی کنیم [۴]. در فصل دوم این رساله آثار غیرخطی در فیبرهای نوری بررسی می‌شود. منظور از فیبرنوری، یک موجبر استوانه‌ای دی‌الکتریک است که در آن میزان جذب (اتلاف انرژی) خیلی کم می‌باشد (به عنوان مثال، شیشهٔ سیلیکا) [۱]. اولین استفاده‌ها از تارهای نوری بطور وسیع در کابلهای مخابراتی انجام شد. اندازهٔ کوچک و ظرفیت

بزرگ اطلاعاتی که یک کابل نوری (کابل نوری متشکل از تعداد زیادی فیبرنوری است). دارد، آن را برای سیستمهای مخابراتی مناسب تر از کابلهای مسی کرده است. این فیبرها در دریا نیز کاربرد دارند به عنوان مثال می‌توان از یک کابل نوری به طول ۶۰۰۰ km، که ساحل شرقی ایالات متحده را به اروپا متصل می‌کند، نام برد [۳]. این تارها در علم پزشکی نیز انقلابی بپا کرده‌اند. ابزارهای مشاهدهٔ مستقیم اندامهای درونی بدن، احساسگرها برای تجزیهٔ مطمئن خون و سیستمهای لیزری برای انجام جراحی داخلی ایمن، جملگی برتکنولوژی (فن‌آوری) تارهای نوری متکی‌اند [۵]. از دیگر موارد استفادهٔ فیبرهای نوری، در کابلهای تلویزیونی، انتقال اطلاعات دیجیتالی در کامپیوترها و یا در ایستگاههای زمینی ماهواره‌ها می‌باشد [۳].

فیبرهای نوری به دو دستهٔ خطی و غیرخطی تقسیم می‌شوند. فیبرهای نوری خطی، فیبرهایی هستند که در آنها رابطهٔ بین قطبش پذیری و میدان الکتریکی، خطی است اما در فیبرهای نوری غیرخطی این رابطه، غیرخطی است.

تارهای نوری را می‌توان از لحاظ تعداد مدهایی که درون آنها منتشر می‌شوند نیز به دو دسته تقسیم کرد.

۱ـ فیبرهای نوری تک مد.

۲ـ فیبرهای نوری چند مد.

وقتی که قطر هستهٔ فیبرهای نوری کوچک باشد بطوریکه فقط یک مد مجاز به عبور از درون فیبر باشد به آن فیبرنوری تک مد می‌گویند. فیبرهای نوری که قطر هستهٔ آنها بزرگ است می‌توانند چندین مد را از خود عبور دهند. به این گونه فیبرها، تارهای نوری چند مد گفته می‌شود [۱]. تارهای نوری غیرخطی معمولاً تک مُد هستند و ضریب شکست محیط وابسته به شدت موج ورودی است. تحت شرایط خاصی که ذکر خواهد شد، پدیده‌های غیرخطی که در فیبر به وجود می‌آیند، می‌توانند اثر پاشندگی را خنثی کرده و یک تپ نوری بدون تغییر شکل از درون فیبر عبور کند. به

چنین تپهایی، امواج منفرد[1] می‌گویند. این امواج نخستین بار در اواسط قرن نوزدهم از راه آزمایش مشاهده شد اما پنجاه سال طول کشید تا توضیح ریاضی مناسبی دال بر وجود آنها یافت شود و نیم قرن دیگر گذشت تا تکنیکهای نظری مناسبی تدوین و امکان پژوهش دربارهٔ امواج منفرد فراهم شد [۶].

تا دههٔ ۱۹۶۰ مورد خاصی در امواج منفرد مشاهده نشد تا آنکه کشف کاملاً غیرمنتظره‌ای رخ داد. نورمن زابوسکی از آزمایشگاههای بل و مارتین کروسکال از دانشگاه پرینستون مشغول مطالعهٔ تغییرات این امواج از طریق شبیه‌سازی کامپیوتری بودند. آنها به مطالعهٔ برخورد دو موج انفرادی پرداختند و انتظار داشتند که هنگام برخورد، کاملاً شکل موج عوض شود و موجها در همهٔ جهات پراکنده شوند. اما چیزی که در شبیه‌سازی مشاهده کردند این بود که امواج از میان یکدیگر بدون تغییر شکل، عبور می‌کردند. امواج انفرادی چنان همدوسی و پایداری چشمگیری از خود به نمایش گذاشتند که به نظر می‌رسید، بیشتر شبیه ذرات مادی باشند تا شبیه امواج. به همین مناسبت آنهابه پیروی از این رسم که ذرات بنیادی در فیزیک با جملات مختوم به «اُن» نامگذاری می‌شوند، این امواج را سالیتون[2] نام نهادند [۶]. در تارهای نوری غیرخطی تحت شرایط خاصی موازنهٔ بین پدیده‌های غیرخطی (مدوله شدن خودبخودی فاز[3]) و پاشندگی ما را به تپهای موجی که شکل آنها نه تنها در طی انتشار، بلکه در طی برخورد نیز ثابت می‌ماند، هدایت می‌کند. به همین دلیل به اینگونه تپهای نوری، سالیتونهای نوری گفته می‌شود.

همانگونه که در فصل دوم نشان می‌دهیم معادلهٔ حاکم بر انتشار یک تپ نوری در یک محیط غیرخطی و پاشنده، معادلهٔ غیرخطی شرودینگر است. سالیتونهای نوری تحت شرایط خاصی جوابهای این معادله می‌باشند. تا سال ۱۹۶۷ برای حل این گونه معادلات غیرخطی روش ریاضی دقیقی وجود نداشت. رشد سریع در این زمینه بعد از

1- Solitary Waves
2- Soliton
3- Self -Phase Modulation

کشف پراکندگی وارون[1] آغاز شد[۷]. در این روش از تکنیکی که برای حل معادلهٔ شرودینگر در مکانیک کوانتمی بکار می‌رود، استفاده می‌شود. در این تکنیک معادله‌ای که حل آن دشوار است (معادلات غیرخطی) به دو معادلهٔ سادهٔ خطی تجزیه می‌شود و بنابراین حل آنها به مراتب از حل معادلهٔ غیرخطی اولیه ساده‌تر می‌باشد [۶]. در سال ۱۹۷۲ زاخاروف و شبات[2] (ZS) تبدیل پراکندگی وارون را برای معادلهٔ غیرخطی شرودینگر منتشر کردند [۸]. سپس آنها این روش را برای دیگر معادلات غیرخطی بسط دادند. این تعمیم که ما آن را شمای ZS می‌نامیم به وضوح از روش لکس[3] الهام گرفته شده است و در یک شکل ماتریسی قالب‌ریزی و مستقیماً به معادلهٔ مارچنکو[4] منجر می‌شود. هم زمان با زاخاروف و شبات، یک گروه متشکل از ابلوویتز، کاپ، نیوول وسی‌گور[5] (AKNS) شمای معادل و روش کلی دیگری را بنا نهادند که به شمای ZS بسیار نزدیک بود[۹]. شمای AKNS قادر بود تبدیل پراکندگی وارون را برای سایر معادلات غیرخطی بکار گیرد. این شما از تعمیم معادلهٔ اشتورم-لیوویل با در نظر گرفتن یک جفت معادلهٔ درجه اول شروع می‌شود و عموماً بنام مسئله ویژه مقداری ۲×۲ معروف است. شمای ZS و AKNS هر دو برای معادلات کورتوگ-دورای، غیرخطی شرودینگر و سینوسی گوردن کاربرد دارد. هرچند این دو شما با یکدیگر همپوشانی دارند، اما تمایز مهم این است که شمای AKNS برحسب جملاتی از نظریه پراکندگی بیان می‌شود، در صورتیکه شمای ZS تنها برحسب جملاتی از عملگرها بیان می‌شود [۱۰]. پس از این پیشرفتها، سالیتونها در بسیاری از زمینه‌ها از جمله فیزیک ذرات بنیادی [۱۱]، فیزیک حالت جامد [۱۲]، بیوفیزیک [۱۳]، فیزیک پلاسما [۱۴]، اکوستیک [۱۵]، نسبیت عام [۱۶]، و اپتیک غیرخطی[۱ و ۱۲] ، کشف و مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

مهمترین نوع سالیتونها به لحاظ استفاده در فن‌آوریها، سالیتونها در تارهای

1- Inverse Scattering
2- Zakharov and Shabat
3- Lax Method
4- Marchenko Equation
5- Ablowitz, Kaup, Newell and Segur

نوری می‌باشد. سالیتون‌های نوری که در سال ۱۹۷۳ بطور تجربی مشاهده شدند [۱۸] هم اینک بطور همه جانبه‌ای مورد مطالعه قرار گرفته‌اند [۱۹ و ۲۰]. همچنین بسیاری از پدیده‌های اپتیک غیرخطی از قبیل مدوله شدن خودبخودی فاز، ترکیب چندگانهٔ امواج و پراکندگی برانگیخته را می‌توان با استفاده از سالیتونهای نوری نشان داد [۱ و ۲۱].

در فصل دوم این رساله خواص الکترومغناطیسی دی‌الکتریکهای خطی و غیرخطی مورد بررسی قرار می‌گیرد که پایه و اساس فیزیکی نتایج بعدی فصل می‌باشد. سپس به بررسی معادلهٔ انتشار موج درون تارهای نوری غیرخطی پرداخته و معادلهٔ غیرخطی شرودینگر را بدست می‌آوریم. در فصل سوم روش پراکندگی وارون معرفی می‌شود و برای حل معادلهٔ خطی شرودینگر مورد استفاده قرار می‌گیرد، که ما را به معادلهٔ معروف مارچنکو می‌رساند. از نتایج حاصل در این فصل، در فصل چهارم سود می‌جوییم. در فصل چهارم ابتدا پیکربندی لکس معرفی شده، با استفاده از نتایج آن و روش پراکندگی وارون در شمای AKNS/ZS برای حل معادلهٔ غیرخطی شرودینگر استفاده می‌نماییم. در فصل پنجم جوابهای N سالیتونی معادلهٔ غیرخطی شرودینگر را بدست آورده، و در حالتهای مجانبی $t \to \pm \infty$ و حالتهای مقید رفتار آنها را بررسی می‌کنیم. سپس با استفاده از این واقعیت که معادلهٔ غیرخطی شرودینگر انتگرال‌پذیر است، تعداد بی‌نهایت کمیت پایستار این معادله را بدست می‌آوریم. این رساله با جمع‌بندی و ارائه چند پیشنهاد در فصل ششم پایان می‌پذیرد.

فصل دوم
الکترودینامیک در فیبرهای نوری غیرخطی

بررسی انتشار امواج الکترومغناطیسی در مواد دی‌الکتریک، به‌ویژه در تارهای نوری پدیده‌های نوری جالب و گوناگونی از قبیل جذب گزینشی[1]، پاشندگی[2]، شکست دوگانه[3]، قطبش و... را دربر می‌گیرد [2] بسیاری از این ویژگیها را می‌توان با استفاده از نظریهٔ کلاسیک الکترومغناطیس بیان نمود. در این فصل بااستفاده از معادلات ماکسول ابتدا قطبش‌پذیری در دو نوع محیط خطی و غیرخطی را بررسی می‌کنیم. سپس به‌بیان چگونگی انتشار تپ‌نوری در تارهای نوری غیرخطی می‌پردازیم.

۲ـ۱ قطبش‌پذیری خطی در دی‌الکتریکهای مختلف

معادلات ماکسول در هر نقطهٔ $\mathbf{r}$ از این محیطها و در هر لحظهٔ t، با فرض آنکه بار و جریان الکتریکی خارجی نداریم و محیط مغناطیسی نیست، در دستگاه گاؤسی، عبارتند از [۲۲]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)=0 \qquad (۱ـ۲)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)=-\frac{1}{c}\ \frac{\partial \mathbf{B}(r, t)}{\partial t} \qquad (۲ـ۲)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)=0 \qquad (۳ـ۲)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)=\frac{1}{c}\ \frac{\partial \mathbf{D}(r, t)}{\partial t} \qquad (۴ـ۲)$$

که در آن $\mathbf{E}$ میدان الکتریکی، $\mathbf{D}$ جابجایی الکتریکی، $\mathbf{B}$ میدان مغناطیسی و c سرعت نور

1- Selective Absorption
2- Dispersion
3- Birefringence

در خلأ است. حال بااستفاده از این روابط می‌توان خصوصیات الکترودینامیکی یک جامد دی‌الکتریک را مورد بررسی قرار داد. در حالت کلی رابطهٔ بین **D**، جابجایی الکتریکی و **E** میدان الکتریکی به‌شکل زیر است [۲۲]:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},\ \omega)=\varepsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r},\ \omega) \qquad (۵\_۲)$$

که در آن ε ثابت دی‌الکتریک، تابعی از فرکانس است. این رابطه بر همکنش گروهیِ بارهای مقید با میدان الکتریکی را نشان می‌دهد. برای نشان دادن واکنش بارهای مقید رابطهٔ زیر نیز وجود دارد [۲۳].

$$\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P} \qquad (۶\_۲)$$

که در آن **P** قطبش الکتریکی است. برای محیطهای خطی و همسانگرد بین **E** و **P** رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\mathbf{P}=\chi\mathbf{E} \qquad (۷\_۲)$$

به‌عبارتی در این محیطها قطبیدگی با میدان الکتریکی اعمال شده متناسب است یعنی قطبیدگی با میدان الکتریکی رابطه‌ای خطی دارد. ضریب تناسب χ را پذیرفتاری الکتریکی[۱] می‌نامند که در حالت کلی یک تانسور سه‌درسه می‌باشد [۱۷]. ولی همیشه بین این دو، رابطهٔ خطی برقرار نیست. در بخش بعدی این موضوع را بررسی می‌کنیم.

۲_۲ قطبش‌پذیری غیرخطی در جامدات دی‌الکتریک.

هنگامی که امواج الکترومغناطیسی تخت درون یک مادهٔ دی‌الکتریک منتشر می‌شوند، به‌تمام الکترونهای محیط نیرو وارد می‌کنند. این نیرو سبب ایجاد قطبش الکتریکی در ماده می‌گردد. قطبش بیشتر روی الکترونهای بیرونی، (ظرفیتی) اعمال می‌شود. اگر امواج الکترومغناطیسی ضعیف‌تر از میدانهایی که الکترونها را به‌اتمها مقید می‌سازد باشد، قطبیدگی حاصل متناسب با میدان الکتریکی اعمال شده است. اما اگر

1- Electric Susceptibility