دانشگاه تبریز

دانشکده علـوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

بدست آوردن اطلاعاتی در مورد ساختار یک گروه با استفاده از درجات کاراکترها و طول کلاس‌های تزویج

استاد راهنما

دکترکمال عزیزی هریس

استاد مشاور

دکتر محمد شهریاری

پژوهشگر

معصومه محبی

۱۳۹۰

بسم الله الرّحمن الرّحیم

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حقّ او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشهٔ تیزگام در راه شناسایی او لنگ است، و سر فکرت ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفتهای او تعریف ناشدنی است و به وصف درنیامدنی، و در وقت ناگنجیدنی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، و به رحمتش بادها را بپراکنید، و با خرسنگها لرزهٔ زمین را در مهار کشید.

گواهی می دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی‌همتاست. گواهیی از روی اعتقاد و ایمان، بی آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می دهم که محمّد (ص) بندهٔ او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه‌هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گرد دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل ملزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می بینم از خلقت تو؛ و چه خرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

از فرمایشات حضرت علی (ع)

تقدیم به:

پدرم و مادرم

بنام خدا

و لَمْ يَشْكُر الْمَخلوق لَمْ يَشْكُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.
در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **کمال عزیزی هریس** ، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
از جناب آقای دکتر **محمد شهریاری** که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.
از جناب آقای دکتر **حسن مهتدیفر** که داوری این رساله را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم.
از تمام دوستان و هم‌کلاسی‌های دوران تحصیلم کمال تشکر و قدردانی را دارم.

ازکلیه دبیران دوران تحصیلم، اساتید گرامی مخصوصاً از آقای دکتر مرتضی فغفوری، دکتر اصغر رنجبری،دکتر صداقت شهمراد معاونت پژوهشی دانشکده علوم ریاضی، دکتر حمید موسوی مدیرگروه ریاضی محض، دکتر رضا نقی‌پور و همه اساتید دانشگاه تبریز که در مدت تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.
در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

معصومه محبی
۱۳۹۰

نام خانوادگی دانشجو: محبی نام: معصومه

عنوان: بدست آوردن اطلاعاتی در مورد ساختار یک گروه با استفاده از درجات کاراکترها و طول کلاس‌های تزویج

استاد راهنما : دکترکمال عزیزی هریس

استاد مشاور : دکتر محمد شهریاری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۰ تعداد صفحات: ۷۰

کلید واژه‌ها: کاراکترهای تحویل‌ناپذیر، اندازه کلاس تزویج، $p-$پوچتوان، حل‌پذیر، گراف درجات کاراکتر

چکیده

در این پایان‌نامه که بر اساس مراجع [۱۲] و [۱۳] تنظیم شده است، فرض می‌کنیم G گروه متناهی و π مجموعه‌ای از اعداد اول باشد. اعداد $u_\pi(G)$ و $|S_\pi(G)|$ را به صورت

$$u_\pi(G) = \sum_{\chi \in Irr(G), \chi(1)_{\pi'}=1} \chi(1)^2$$

و

$$|S_\pi(G)| = \sum_{n_{\pi'}=1} \omega_G(n) n,$$

تعریف می‌کنیم که در آن $\omega_G(n)$ تعداد کلاس‌های تزویج G از طول n است. ثابت می‌کنیم که:

۱. گروه G حاصل‌ضرب مستقیم یک $p-$گروه و یک $p'-$گروه است اگر و فقط اگر

$$u_{p'}(G) = |G|_{p'}.|G:G'|_p.$$

۲. گروه G حاصل‌ضرب مستقیم یک $p-$گروه و یک $p'-$گروه است اگر و فقط اگر

$$|S_{p'}(G)| = |G|_{p'}.|Z(G)|_p.$$

همچنین، فرض می‌کنیم G گروه حل‌پذیر متناهی باشد و $\Gamma(G)$ گراف درجات کاراکتر گروه G باشد که مجموعه رئوس این گراف مجموعه مقسوم‌علیه‌های اول درجات کاراکترهای تحویل‌ناپذیر G می‌باشد بطوریکه بین دو رأس p, q یک یال وجود دارد اگر و فقط اگر pq یک مقسوم‌علیه حداقل یک درجه کاراکتر تحویل‌ناپذیر G باشد. ثابت می‌کنیم اگر G حل‌پذیر باشد و $\pi = \{p, q, r\}$ سه رأس متمایز $\Gamma(G)$ باشد، آنگاه (p, q)، (p, r) یا (q, r) یک یال گراف $\Gamma(G)$ می‌باشد.

فهرست مطالب

مقدمه

در سال‌های اخیر موضوع بسیار مهمی که توسط کارشناسان نظریه گروه‌های متناهی مورد بررسی قرار گرفته این است که درجات کاراکترهای تحویل‌ناپذیر و طول کلاس‌های تزویج و تعداد تکرار آنها از یک گروه متناهی چه اثری در ساختار آن گروه و بویژه در ساختار زیرگروه‌های سیلوی آن گروه دارد. در حقیقت با دانستن اطلاعاتی در مورد درجات کاراکترهای تحویل‌ناپذیر گروه متناهی G و تعداد تکرار آنها، مشخص می‌کنیم که آیا یک $p-$زیرگروه سیلوی G عامل مستقیم G است یا نه؟ همچنین نتایج مشابهی را برای طول کلاس‌های تزویج بدست می‌آوریم. در این پایان‌نامه فرض می‌کنیم G گروه متناهی و π مجموعه‌ای از اعداد اول باشد. اعداد $u_\pi(G)$ و $|S_\pi(G)|$ را به صورت

$$u_\pi(G) = \sum_{\chi \in Irr(G), \chi(1)_{\pi'}=1} \chi(1)^2$$

و

$$|S_\pi(G)| = \sum_{n_{\pi'}=1} \omega_G(n)n,$$

تعریف می‌کنیم که در آن $\omega_G(n)$ تعداد کلاس‌های تزویج G از طول n است.

همچنین برای گروه متناهی G، گراف درجات کاراکتر را با $\Gamma(G)$ نشان می‌دهیم که رئوس این گراف مجموعه

$$\rho(G) = \{p | \text{ یک مقسوم‌علیه اول یک درجه کاراکتر تحویل‌ناپذیر است } p\}$$

و یال‌های آن مجموعه

$$E(G) = \{(p,q) | \text{ یک مقسوم‌علیه یک درجه کاراکتر تحویل‌ناپذیر است } pq \text{ و } p,q \in \rho(G)\}$$

می‌باشد. ساختار این پایان‌نامه شامل موارد زیر است:

در فصل اول مفاهیم مقدماتی و مورد نیاز برای اثبات قضایای اصلی، بیان می‌شود. در فصل دوم به اثر درجات کاراکترهای تحویل‌ناپذیر و همچنین طول کلاس‌های تزویج و تعداد تکرار آنها در ساختار زیرگروه‌های سیلوی یک گروه می‌پردازیم و ثابت می‌کنیم که:

۱. گروه G حاصل‌ضرب مستقیم یک $p-$گروه و یک $p'-$گروه است اگر و فقط اگر
$$u_{p'}(G) = |G|_{p'}|G : G'|_p.$$

۲. گروه G حاصل‌ضرب مستقیم یک $p-$گروه و یک $p'-$گروه است اگر و فقط اگر
$$|S_{p'}(G)| = |G|_{p'}|Z(G)|_p.$$

بالاخره در فصل سوم، خاصیت بسیار مهم گراف درجات کاراکتر گروه‌های حل‌پذیررا بیان می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که:
فرض می‌کنیم G گروه حل‌پذیر متناهی باشد و $\pi \subseteq \rho(G)$. اگر $\pi = \{p, q, r\}$، آنگاه $(p, q) \in E(G)$ یا $(p, r) \in E(G)$ یا $(q, r) \in E(G)$. به عبارت دیگر کاراکتر $\chi \in Irr(G)$ وجود دارد بطوریکه pq یا qr یا pr مقسوم‌علیه $\chi(۱)$ می‌باشد.

فصل ۱

پیشینه پژوهش و مفاهیم مقدماتی

فصل نخست پایان‌نامه مروری بر منابع ذکر شده در بخش بررسی منابع و بیان مفاهیم پایه و مورد نیاز در فصلهای آتی می‌باشد. بنابراین در بخش نخست چهارچوب بحث را مشخص و سپس مفاهیم مرتبط با بحث را تعریف خواهیم کرد. بعضی مفاهیم و قضایای اولیه بدون اثبات بیان خواهند شد چرا که هدف یادآوری مفاهیمی است که بعداً به آنها نیاز خواهد شد. در تمامی این پایان‌نامه، تمام گروه‌ها متناهی هستند.

۱.۱ تعاریف و قضایای مورد نیاز گروه‌های متناهی

تعریف ۱.۱.۱. مفاهیم π−عدد، π− گروه و π−زیرگروه هال را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

۱. فرض کنیم π یک مجموعه از اعداد اول باشد. در اینصورت عدد صحیح n را یک π−عدد گوییم، هرگاه همه اعداد اولی که n را عاد می‌کنند در مجموعه π قرار گیرند.

۲. گروه H را یک π− گروه می‌نامیم هرگاه $|H|$ یک π−عدد باشد.

۳. اگر $H \leqslant G$ آنگاه گروه H را یک π−هال گروه گوییم هرگاه $|H|$ یک π−عدد و $|G:H|$ یک π'−عدد باشد که π'، متمم مجموعه π در مجموعه اعداد اول است. واضح است اگر $H \in Hall_\pi(G)$ آنگاه

$$(|H|, |G:H|) = ۱$$

که در آن

$$Hall_\pi(G) = \{H \leqslant G \mid \text{است } G \text{ یک } \pi - \text{ زیرگروه هال } H\}.$$

لم ۲.۱.۱. *اگر G یک p−گروه غیربدیهی باشد، آنگاه مرکز G غیربدیهی است.*

تعریف ۳.۱.۱. یک سری مرکزی برای گروه G، یک زنجیر از زیرگروههای K_i است که در شرایط زیر صدق کند:

۱. $۱ = K_۰ \leqslant K_۱ \leqslant K_۲ \leqslant ... \leqslant K_n = G$،

۲. $K_i \trianglelefteq G$ برای هر i، $۰ \leqslant i \leqslant n$،

۳. $K_{i+۱}/K_i \leqslant Z(G/K_i)$.

تعریف ۴.۱.۱. گروه G پوچ‌توان است اگر و تنها اگر دارای یک سری مرکزی باشد.

لم ۵.۱.۱. (ددکیند). *فرض کنیم H، K و L زیرگروه‌های G باشند بطوریکه H زیرگروه K است. در این‌صورت*

$$H(K \cap L) = K \cap HL.$$

تعریف ۶.۱.۱. فرض می‌کنیم N زیرگروه G باشد. در این‌صورت N را $p-$متمم G می‌گوییم هرگاه p، $|N|$ را عاد نکند اما اندیس N در G توانی از p باشد. به عبارت دیگر، N یک $p-$متمم گروه G است اگر و فقط اگر N یک $p'-$زیرگروه هال G باشد.

لم ۷.۱.۱. *فرض کنیم G گروه متناهی و H و K زیرگروه‌های نرمال G باشند. در این صورت نگاشت $\varphi : G \longrightarrow \frac{G}{H} \times \frac{G}{K}$ با ضابطه $\varphi(g) = (Hg, Kg)$ که در آن $g \in G$، یک همومورفیسم است و $Ker\varphi = H \cap K$.*

تعریف ۸.۱.۱. گروه G را $p-$پوچتوان گوییم هرگاه G دارای زیرگروه $p-$متمم نرمال باشد.

تعریف ۹.۱.۱. گروه متناهی G را حل‌پذیر گوییم اگر و تنها اگر $n \in N$ای موجود باشد بطوریکه $[G^{n-1}, G^{n-1}] = 1$.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم A زیرگروه نرمال G باشد. در اینصورت زیرگروه B از گروه G را مکمل A گوییم هرگاه $G = AB$ و $A \cap B = 1$.

قضیه ۱۱.۱.۱. $(Schur - Zassenhaus\ theorem)$

فرض کنیم N زیرگروه نرمال G باشد بطوریکه $(|N|, |G : N|) = 1$. در اینصورت داریم:

۱) N دارای مکمل در G می‌باشد یعنی $H \leqslant G$ موجود است که $G = NH$ و $N \cap H = 1$.

۲) اگر حداقل یکی از N یا G/N حل‌پذیر باشند، آنگاه هر دو مکمل برای N در G مزدوج هستند

اثبات. رجوع شود به قضیه 3.5 از [۷]. □

لم ۱۲.۱.۱. *فرض کنیم G گروه متناهی باشد و H زیرگروه نرمال G و $P \in Syl_p(G)$. در این صورت $P \cap H \in Syl_p(H)$.*

لم ۱۳.۱.۱. *فرض کنیم G گروه متناهی و $x, u, v \in G$. آنگاه*

۱. $[uv, x] = [u, x]^v[v, x] = [u, x][u, x, v][v, x]$

۲. $[x, uv] = [x, v][x, u]^v = [x, v][x, u][x, u, v]$.

لم ۱۴.۱.۱. *فرض کنیم G گروه متناهی باشد و P, N زیرگروه‌های G هستند بطوریکه $G = PN$ و $P \cap N = 1$. در اینصورت مشتق گروه G عبارت است از $G' = N'[N, P]P'$. همچنین $[P, NP] = [P, P][N, P] = P'[N, P]$.*

اثبات. می‌دانیم که $P', [N, P], N' \leq G'$ و لذا $N'[N, P]P' \leq G'$. برای اثبات عکس، چون $G = PN$، لذا فرض می‌کنیم $g_1 = a_1 b_1, g_2 = a_2 b_2$ اعضای دلخواهی از G باشند بطوریکه $a_1, a_2 \in P$ و $b_1, b_2 \in N$. با استفاده از ۱۳.۱.۱، داریم:

$$\begin{aligned}[g_1, g_2] &= [a_1 b_1, a_2 b_2] = [a_1, a_2 b_2]^{b_1}[b_1, a_2 b_2] = ([a_1, b_2][a_1, a_2^{b_2}])^{b_1}[b_1, b_2][b_1, a_2]^{b_2} \\ &= [a_1, b_2]^{b_1}[a_1, a_2]^{b_2 b_1}[b_1, b_2][b_1, a_2]^{b_2} = [a_1^{b_1}, {b_2}^{b_1}][a_1, a_2]^{b_2 b_1}[b_1, b_2][b_1^{b_2}, a_2^{b_2}].\end{aligned}$$

از آنجاییکه P زیرگروه نرمال G و $a_1^{b_1}, a_2^{b_2} \in P$. از اینرو

$$[a_1^{b_1}, b_2^{b_1}], [b_1^{b_2}, a_2^{b_2}] \in [P, N],$$

زیرا که $b_1, b_2 \in N$ و لذا واضح است که $b_1^{b_2}, b_2^{b_1} \in N$. همچنین چون P زیرگروه نرمال G و P' زیرگروه مشخصه P می‌باشد، پس P' زیرگروه نرمال G است. از آنجاییکه $[a_1, a_2] \in P'$. لذا $[a_1, a_2]^{b_2 b_1} \in P'$. بالاخره واضح است که $[b_1, b_2] \in N'$. بنابراین

$$[g_1, g_2] = [a_1^{b_1}, {b_2}^{b_1}][a_1, a_2]^{b_2 b_1}[b_1^{b_2}, a_2^{b_2}] \in [P, N]P'N'.$$

چون $G' = \langle [g_1, g_2] \mid g_1, g_2 \in G \rangle$، نتیجه می‌گیریم که $G' \leq N'[N, P]P'$ و از اینرو حکم بدست می‌آید.

حال نشان می‌دهیم که $[P, NP] = P'[N, P]$. می‌دانیم که $P' = [P, P] \leq [P, NP]$ و

$$[P, N] \leq [P, NP]$$

و لذا $P'[P, N] \leq [P, NP]$. از طرف دیگر، فرض می‌کنیم $x, y \in P$ و $z \in N$ دلخواه باشند. با بکار بردن ۱۳.۱.۱، داریم:

$$[x, yz] = [x, z][x, y]^z = [x, z][x^z, y^z] \in [P, N]P',$$

زیرا که چون P زیرگروه نرمال G است، پس $x^z, y^z \in P$ و لذا $[x^z, y^z] \in P'$. نتیجه می‌گیریم که $[P, PN] = [P, NP] \leq [P, N]P'$. بنابراین $[P, PN] = [P, N]P'$ و حکم بدست می‌آید. □

تعریف ۱.۱.۱۵. اشتراک همه $p-$زیرگروه‌های سیلوی G را با نماد $O_p(G)$ نشان می دهیم . واضح است که $O_p(G)$ بزرگترین $p-$زیرگروه نرمال G است و لذا زیرگروه مشخصه G می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱۶. بزرگترین زیرگروه نرمال پوچ‌توان G را زیرگروه فیتینگ G می‌نامیم و آنرا با $F(G)$ نشان می‌دهیم. از آنجاییکه حاصل‌ضرب دو زیرگروه نرمال و پوچ‌توان یک زیرگروه نرمال و پوچ‌توان است، پس برای هر گروه متناهی G، زیرگروه $F(G)$ موجود می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱۷. $O^p(G)$ کوچکترین زیرگروه نرمال G است بطوریکه $G/O^p(G)$ یک $p-$گروه باشد.

قضیه ۱.۱.۱۸. اتحاد هال-ویت. *فرض کنیم X ، Y و Z زیرگروه‌های گروه دلخواه G باشند. آنگاه برای هر $x \in X$، $y \in Y$ و $z \in Z$.*

$$[x, y^{-۱}, z]^y[y, z^{-۱}, x]^z[z, x^{-۱}, y]^x = ۱.$$

لم ۱.۱.۱۹. (سه زیرگروه).*فرض کنیم X, Y و Z زیرگروه‌هایی از گروه دلخواه G باشند. فرض می‌کنیم $[X, Y, Z] = ۱$ و $[Y, Z, X] = ۱$، آنگاه $[Z, X, Y] = ۱$.*

اثبات. رجوع شود به لم 4.9 از [۷]. □

قضیه ۱.۱.۲۰. *اگر H روی G عمل کند و K یک زیرگروه نرمال G باشد که تحت عمل H پایا است، آنگاه H روی گروه خارج‌قسمت G/K عمل می‌کند.*

اثبات. باید نشان دهیم که برای هر $h \in H$ و هر $Kg \in G/K$، رابطه $(Kg)^h = Kg^h$ خوش تعریف است. برای این کار، فرض می‌کنیم $Kg_۱ = Kg_۲ \in G/K$. پس $g_۱g_۲^{-۱} \in K$ و در نتیجه برای هر $h \in H$، $(g_۱g_۲^{-۱})^h \in K$. زیرا که K تحت عمل H پایا می‌باشد. از اینرو $Kg_۱^h(g_۲^h)^{-۱} = K$ و نتیجه می‌گیریم که $Kg_۱^h = Kg_۲^h$ و حکم بدست می‌آید. □

یادآوری. اگر A و G گروه‌هایی متناهی باشند و A روی G عمل کند، آنگاه

$$C_G(A) = \{g \in G | \forall a \in A \;\; g^a = g\}$$

و

$$[G, A] = \langle x^{-۱}g^x | x \in G, y \in A \rangle.$$

لم ۲۱.۱.۱. *فرض کنیم A و G گروه‌هایی متناهی باشند و A روی G عمل کند. همچنین فرض می‌کنیم A یا G حل‌پذیر باشند و $(|G|,|A|) = 1$. در این صورت:*

$$G = C_G(A)[G, A].$$

اثبات. به لم 4.28 از [۷]، مراجعه شود. □

لم ۲۲.۱.۱. *فرض کنیم A و G گروه‌هایی متناهی باشند و A روی G عمل کند. همچنین فرض می‌کنیم $(|G|,|A|) = 1$. در این صورت:*

$$[G, A, A] = [G, A].$$

اثبات. به لم 4.29 از [۷]، مراجعه شود. □

قضیه ۲۳.۱.۱. (فیتینگ) [۱]. *فرض کنیم A و G گروه‌هایی متناهی باشند و A روی G عمل کند. همچنین فرض می‌کنیم $(|G|,|A|) = 1$. اگر G آبلی باشد، آنگاه*

$$G = C_G(A) \times [G, A].$$

اثبات. به قضیه 4.34 از [۷]، مراجعه شود. □

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنیم گروه H روی K عمل می‌کند. این عمل را باوفا گوییم هرگاه هسته عمل برابر زیرگروه بدیهی باشد.

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنیم گروه H روی K عمل کند. این عمل را تحویل‌ناپذیر می‌نامیم هرگاه زیرگروهی از K موجود نباشد بطوریکه تحت H پایا باشد. به عبارت دیگر زیرگروه $1 < L < K$ وجود نداشته باشد که به ازای هر $t \in H$ و هر $x \in L$، $x^t \in L$.

تعریف ۲۶.۱.۱. فرض می‌کنیم G گروه متناهی باشد. در این‌صورت اشتراک همه زیرگروه‌های ماکزیمال G را زیرگروه فراتینی [۲] می‌نامیم و با علامت $\Phi(G)$ نشان می‌دهیم.

---

[۱] Fitting

[۲] Frattini

قضیه ۲۷.۱.۱. *فرض کنیم P یک $p-$گروه باشد. در این صورت $P/\Phi(P)$ یک $p-$گروه آبلی مقدماتی است و اگر N زیرگروه نرمال P باشد، آنگاه P/N آبلی مقدماتی است اگر و تنها اگر*

$$\Phi(P) \leqslant N.$$

اثبات. رجوع شود به لم 4.5 از [۷]. $\square$

قضیه ۲۸.۱.۱. *فرض کنیم G گروهی متناهی باشد و $M \trianglelefteq N \trianglelefteq G$. اگر $M \subseteq \Phi(G)$ و N/M پوچ‌توان باشد، آنگاه N پوچ‌توان است.*

اثبات. چون N/M پوچ‌توان است، لذا $F(N/M) = N/M$. از طرفی چون $M \subseteq \Phi(G)$، می‌دانیم که $F(N/M) = F(N)/M$. بنابراین $N/M = F(N)/M$ و در نتیجه $N = F(N)$. از اینرو N پوچ‌توان است. $\square$

قضیه ۲۹.۱.۱. *فرض کنیم G گروهی متناهی و $\alpha \in Aut(G)$ بطوریکه $(o(\alpha), |G|) = ۱$. اگر α روی $G/\Phi(G)$ بصورت بدیهی عمل کند، آنگاه α روی G نیز بدیهی عمل می‌کند.*

اثبات. به 3D.4 از [۷]، مراجعه شود. $\square$

قضیه ۳۰.۱.۱. *فرض کنیم G گروه متناهی پوچ‌توان باشد، در این صورت $G' \leqslant \Phi(G)$.*

لم ۳۱.۱.۱. *فرض کنیم G گروه متناهی و H و K زیرگروه‌های G باشند بطوریکه*

$$(|G:H|, |G:K|) = ۱.$$

در این صورت $G = KH$.

اثبات. به 1A.3.(b) از [۷]، مراجعه شود. $\square$

لم ۳۲.۱.۱. *فرض کنیم G گروه متناهی و H زیرگروه G باشد بطوریکه*

$$G = \bigcup_{g \in G} H^g.$$

در این صورت $G = H$.

اثبات. می‌دانیم که تعداد مزدوجهای متمایز H در G برابر $|G:N_G(H)|$ است. بنابراین، چون $G=\bigcup_{g\in G}H^g$ نتیجه می گیریم که

$$\begin{aligned}|G| &= |\bigcup_{g\in G}H^g| = |\{1\}\cup\bigcup_{g\in G}(H^g-\{1\})|\\ &\leq 1+|\bigcup_{g\in G}(H^g-\{1\})\\ &\leq 1+|G:N_G(H)|(|H|-1)\\ &\leq 1+|G:H|(|H|-1)\\ &= 1+|G|-|G:H|.\end{aligned}$$

بنابراین $|G|\leq 1+|G|-|G:H|$ و لذا $|G:H|\leq 1$. از اینرو $|G:H|=1$ و $G=H$. □

تعریف ۱.۱.۳۳. فرض می‌کنیم G گروه متناهی باشد و $Z_0=1$ و $Z_1=Z(G)$. به ازای $n>0$، Z_n عبارت است از زیرگروهی از G بطوریکه $Z_n/Z_{n-1}=Z(G/Z_{n-1})$. در این صورت سری

$$1=Z_0\leq Z_1\leq Z_2\leq \dots$$

را سری مرکزی بالایی G گوییم. لازم به ذکر است که این سری ممکن است که هرگز به کل گروه G نرسد مگر اینکه G یک گروه پوچ‌توان باشد. اما چون G گروه متناهی است، لذا $n_0>0$ موجود است بطوریکه $Z_{n_0}=Z_{n_0+1}=Z_{n_0+2}=\dots$ که در این حالت Z_{n_0} را با $Z_\infty(G)$ نشان می‌دهیم و آن را زیرگروه فرامرکز G گوییم.

قضیه ۱.۱.۳۴. *فرض کنیم G گروه متناهی و p یک عدد اول باشد و $S_p(G)$ اجتماع همه کلاس‌های تزویجی از G باشد که طول آنها توانی از p است. در این صورت $|S_p(G)|_p=|Z_\infty(G)|_p$ و لذا $|S_p(G)|_p$ یک مقسوم‌علیه $|G|_p$ می‌باشد.*

اثبات. رجوع شود به گزاره ۱ از [۲]. □

قضیه ۱.۱.۳۵. *فرض کنیم G گروه متناهی و N زیرگروه نرمال و آبلی غیربدیهی G باشد بطوریکه $N\cap\Phi(G)=1$. در این‌صورت زیرگروه K از G موجود است بطوریکه $G=NK$ و $N\cap K=1$.*

اثبات. رجوع شود به قضیه III.4.4 از [۴]. □

قضیه ۳۶.۱.۱. *فرض کنیم G گروه متناهی باشد. در این‌صورت $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$ حاصل‌ضرب زیرگروه‌های نرمال مینیمال $G/\Phi(G)$ است.*

اثبات. رجوع شود به قضیه III.4.5 از [۴]. □

قضیه ۳۷.۱.۱. *فرض کنیم G و A گروه‌های متناهی باشند بطوریکه A روی G به وسیله اتومورفیسم‌ها عمل کند و همچنین فرض می‌کنیم که N زیرگروه نرمال G باشد که تحت عمل A پایاست. فرض می‌کنیم که $(|A|,|N|) = ۱$ و حداقل A یا N حل‌پذیر باشد. قرار می‌دهیم $\overline{G} = G/N$. در این صورت $C_{\overline{G}}(A) = \overline{C_G(A)}$.*

اثبات. رجوع شود به نتیجه 3.28 از [۷]. □

۲.۱ تعاریف و قضایای مورد نیاز کاراکترها

تعریف ۱.۲.۱. فرض می‌کنیم G گروه متناهی است و $X : G \longrightarrow Gl_n(\mathbb{C})$ یک هomomorfیسم گروهی باشد که در آن $GL_n(\mathbb{C})$ گروه ضربی ماتریس‌های $n \times n$ معکوس‌پذیر روی میدان اعداد مختلط است. در این صورت X را یک نمایش از G می‌گوییم. همچنین کاراکتر χ ارائه شده بوسیله X توسط نگاشت $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ با ضابطه $\chi(g) = Tr(X(g))$ تعریف می‌شود. که در آن $Tr(X(g))$ برابر است با مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس $X(g)$ می‌باشد.

کاراکترها روی کلاسهای تزویج ثابت هستند زیرا

$$\begin{aligned}\chi(h^{-1}gh) &= Tr(X(h^{-1}gh))\\ &= Tr(X(h^{-1})X(g)X(h))\\ &= Tr(X(g)X(h^{-1})X(h))\\ &= Tr(X(g)) = \chi(g).\end{aligned}$$

تعریف ۲.۲.۱. $\chi(1)$ را درجه کاراکتر χ تعریف می‌کنیم. هر کاراکتر از درجه ۱ را کاراکتر خطی گوییم.

تعریف ۳.۲.۱. کاراکتر χ را تحویل‌ناپذیر گوییم هرگاه نتوان آنرا بصورت مجموع دو کاراکتر دیگر نوشت. مجموعه کاراکترهای تحویل‌ناپذیر G را با $Irr(G)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۴.۲.۱. *گروه G آبلی است اگر و تنها اگر همه کاراکترهای تحویل‌ناپذیر G خطی باشد. مجموعه کاراکترهای خطی را با $Lin(G)$ نشان می‌دهیم که با ضرب معمولی توابع یک گروه است. طبق فصل دوم از [۷]، می‌دانیم که $G/G' \cong Lin(G)$.*

قضیه ۵.۲.۱. *اگر G گروه متناهی باشد. آنگاه $|Irr(G)|$ برابر تعداد کلاس‌های تزویج G می‌باشد و $|G| = \sum_{\chi\in Irr(G)} \chi(1)^2$.*

اثبات. به قضیه 2.7 از [۶]، مراجعه شود. □

تعریف ۶.۲.۱. یک تابع کلاسی روی G عبارت است از نگاشت $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ بطوریکه برای هر $g, h \in G$، $\varphi(g) = \varphi(g^h)$. از اینرو همه کاراکترها توابع کلاسی هستند.

قضیه ۷.۲.۱. *هر تابع کلاسی φ از G بصورت منحصربفرد توسط $\varphi = \sum_{\chi\in Irr(G)} a_\chi \chi$ نمایش داده می‌شود که در آن $a_\chi \in \mathbb{C}$.*

اثبات. به قضیه 2.8 از [۶]، مراجعه شود. □

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنیم χ یک کاراکتر G باشد بطوریکه $\chi = \sum_{i=1}^{n} m_i\chi_i$. که در آن$m_i$ها اعداد صحیح نامنفی هستند و $Irr(G) = \{\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n\}$. در این صورت χ_iهایی که به ازای آنها $m_i > 0$ موسس‌های تحویل‌ناپذیر χ نامیده می‌شوند.

تعریف ۹.۲.۱. اگر χ کاراکتری از G باشد مرکز و هسته χ را به ترتیب با $Z(\chi)$ و $Ker(\chi)$ نشان می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z(\chi) = \{g \in G| \ |\chi(g)| = \chi(1)\},$$

$$Ker(\chi) = \{g \in G| \ \chi(g) = \chi(1)\}.$$

بدیهی است که $Ker(\chi) \subseteq Z(\chi)$.

لم ۱۰.۲.۱. *فرض کنیم G گروه متناهی و χ کاراکتری از G باشد بطوریکه $\chi = \sum m_i\chi_i$ که در آن $\chi_i \in Irr(G)$ ها و $m_i > ۰$. در این‌صورت*

$$Ker\chi = \bigcap_{\chi_i \in Irr(G), m_i > ۰} Ker\chi_i.$$

بویژه $\bigcap_{۱ \leq i \leq n} Ker\chi_i = ۱$ که در آن $Irr(G) = \{\chi_۱, \chi_۲, ..., \chi_n\}$ مجموعه کاراکترهای تحویل‌ناپذیر G است.

اثبات. رجوع شود به لم 2.21 از [۶]. $\square$

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض می‌کنیم N زیرگروه نرمال G و $\lambda \in Irr(N)$. در این صورت $Irr(G \mid \lambda)$ عبارت است از مجموعه همه کاراکترهای تحویل‌ناپذیر χ از G بطوریکه λ یک موسس تحویل‌ناپذیر χ_N می‌باشد.

تعریف ۱۲.۲.۱. کاراکتر القا شده: فرض کنیم H زیرگروه G باشد و ϕ تابع کلاسی روی H باشد. در اینصورت ϕ^G، تابع کلاسی القا شده روی G بوسیله:

$$\phi^G(g) = \frac{۱}{|H|}\sum_{x\in G} \phi^\circ(xgx^{-۱})$$

تعریف می‌شود که در آن اگر $h \in H$، $\phi^\circ(h) = \phi(h)$ و در غیر اینصورت $\phi^\circ(h) = ۰$.

مشاهده می‌کنیم که ϕ^G واقعا یک تابع کلاسی روی G است و $\phi^G(۱) = |G : H|\phi(۱)$.

نمایش دیگر این فرمول که با انتخاب یک تراگرد T از هم مجموعه‌های راست H در G (یعنی یک مجموعه از نماینده‌های این هم مجموعه‌ها) بدست می‌آید صورت زیر است:

$$\phi^G(g) = \sum_{t\in T} \phi^\circ(tgt^{-۱}).$$

همچنین می‌دانیم که اگر ϕ کاراکتری از H باشد، آنگاه ϕ^G نیز کاراکتری از G می‌باشد.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض می‌کنیم G گروه متناهی و $\chi \in Irr(G)$ کاراکتر القا شده توسط نمایش $X : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ باشد. در این‌صورت می‌دانیم که $detX : G \longrightarrow \mathbb{C}$ با ضابطه

$$(detX)(g) = det(X(g)),$$