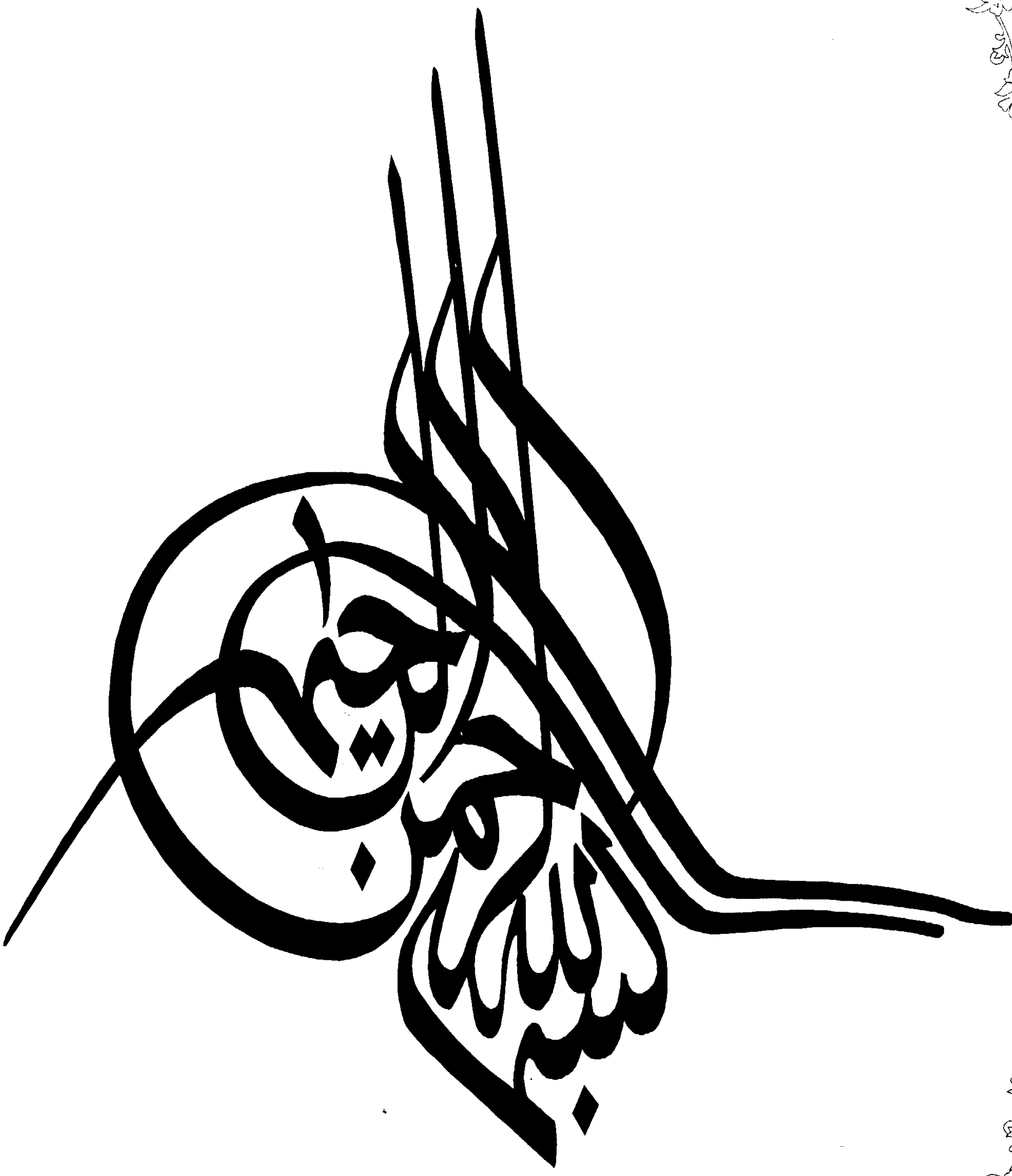
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه سیستان و بلوچستان
تحصیلات تکمیلی
دانشکده علوم (گروه ریاضی)

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان :

بررسی ساختار مونوئیدهایی که تمام سیستم های راست دوری بطور ضعیف هموار آنها در شرط (P) صدق می کنند .

استاد راهنما :

دکتر اکبر گلچین

۳۰ /۱۰/ ۱۳۸۲

تحقیق و نگارش :

پریسا رضائی

۵۸۱۴۲

شهریور ۸۲

بسمه تعالی

صفحه الف

این پایان‌نامه با عنوان **دسته‌بندی مونوئیدهایی که سیستم‌های راست دوری بطور ضعیف هموار آنها در شرط (P) صدق می‌کنند** قسمتی از برنامه آموزشی دوره کارشناسی ارشد **ریاضی محض** گرایش **جبر** توسط دانشجو **پریسا رضائی** تحت راهنمائی استاد پایان‌نامه آقای **دکتر اکبر گلچین** تهیه شده است.

استفاده از مطالب آن بمنظور اهداف آموزشی با ذکر مرجع و اطلاع کتبی به حوزه تحصیلات تکمیلی دانشگاه سیستان و بلوچستان مجاز می‌باشد٪

امضاء دانشجو

این پایان‌نامه ۶ شش واحد درسی شناخته می‌شود و در تاریخ ۱۳۸۲/۰۷/۲۰ توسط هیئت داوران بررسی و نمره ۱۹٫۲۵ با درجه عالی به آن تعلق گرفت٪

نام و نام خانوادگی		امضاء	تاریخ
۱ـ استاد راهنما:	**دکتر اکبر گلچین**		
۲ـ استاد مشاور:	---		
۳- داور ۱:	**دکتر شهاب‌الدین ابراهیمی آتانی**		
۴ـ داور ۲:	**دکتر رجبعلی برزوئی**		
۵ـ تحصیلات تکمیلی:	**دکتر غلامرضا رضائی**		
۶ـ داور ۳:	دکتر عبداله...		

تقدیم به:

دو وجود مهربان و فداکار « پدر و مادرم »

که هر آنچه اکنون به آن افتخار می کنم از زحمات بی دریغ ایشان است .

و تقدیم به:

امید امروز و فرداهایم « همسر فداکارم »

که همواره شریک غمها و شادیهایم بوده و با همفکری و حمایت های معنوی خود در اتمام این پایان نامه مرا یاری نموده اند .

تقدیر و تشکر :

اینک که به یاری پروردگار متعال ، توفیق به پایان رسیدن این پایان نامه فراهم گشته است، وظیفه خود می دانم که مراتب تشکر و قدردانی خود را از همه اساتیدی که طی تحقیق با راهنمایی ، همکاری و همفکری ، اینجانب را مورد لطف و عنایت قرار داده اند ، ابراز نمایم . از استاد محترم و عالیقدر جناب آقای دکتر اکبر گلچین که همواره با گشاده رویی و بردباری تمام و با دقت نظر خاص خویش در تمام مراحل راهنما و مشوق من بودند کمال تشکر و قدردانی را دارم . از درگاه خداوند متعال طول عمر با عزت و توفیق روز افزون برای ایشان مسئلت دارم .

همچنین از اساتید گرانقدر جناب آقای دکتر برزوئی ، جناب آقای دکتر ابراهیمی و جناب آقای دکتر گرامی که زحمت داوری این پایان نامه را بعهده داشته اند، نهایت تشکر و سپاسگذاری را دارم .

چکیده

خواص سیستمها روی مونوئیدها حدوداً از سال ۱۹۷۰ مورد تحقیق و بررسی قرار گرفته اند .

ضرب تانسوری سیستمها و روابط آن با همواری از جمله : همواری ضعیف ، همواری وهمواری قوی برای اولین بار توسط استنستروم وکیلپ مورد توجه قرار گرفت . بررسی خواص سیستمها تاکنون منجر به نتایج ذیل گردیده است :

آزاد ← پروژکتیو ← بطور قوی هموار ← شرط (P) ← هموار ← بطور ضعیف هموار ← بطور اساسی ضعیف هموار

عکس روابط فوق در حالت کلی برقرار نیست . در این پایان نامه سعی بر این است که ساختار مونوئیدهایی که تمام سیستم های راست دوری بطور ضعیف هموارآنها ، در شرط(P)صدق می کنند، مورد بررسی قرار گرفته و یک دسته بندی از چنین مونوئیدهایی ارائه گردد .

مقدمه

این پایان نامه شامل سه فصل است .

فصل اول را با تعاریف و مفاهیم اولیه ای که در فصلهای بعد مورد استفاده قرار می گیرند، آغازمی کنیم.

در فصل دوم سه بخش ارائه شده است. در بخش اول سیستم های (بطور ضعیف) هموار را مورد بررسی قرار می دهیم ، در بخش دوم به بررسی ارتباط بین شرط (P) و همواری سیستمها پرداخته ، بدین ترتیب که اگر سیستمی در شرط (P) صدق کند ، هموار است ، اما عکس آن لزوماً برقرار نیست ودر بخش سوم ابتدا خواصی از سیستم های (تک) دوری ودرپایان یک دسته بندی از مونوئیدهایی که سیستم های راست تک دوری (بطور ضعیف) هموارآنها ، درشرط(P) صدق می کنند ارائه می دهیم .

فصل سوم شامل سه بخش است که درآنها به بررسی مونوئید های خاصی از قبیل مونوئیدهای راست مقدماتی (جزء) ، راست (چپ) PP ، متناوب و ... پرداخته وبا اعما ل شرایطی روی آنها ، یک دسته بندی از آنها را ارائه خواهیم داد بطوریکه سیستم های راست دوری بطور ضعیف هموارشان ، در شرط (P) صدق کنند .

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

فصل اول

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل برخی از تعاریف و مفاهیم مقدماتی که در این پایان نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند بیان شده است.

نیمگروه ها و مونوئیدها

تعریف ۱-۱) به مجموعه غیرتهی S که یک عمل دوتایی شرکتپذیر مانند * روی آن تعریف شده باشد، نیمگروه گفته می شود. به عبارت دیگر نگاشت $S \times S \to S$: * تعریف شده باشد بقسمی که :

$$\forall x,y,z \in S \qquad x*(y*z)=(x*y)*z$$

از این به بعد برای راحتی به جای $x*y$ از $x.y$ یا xy استفاده می کنیم.

اگر در نیمگروه S داشته باشیم: $\forall x,y \in S \;;\; xy=yx$ ، آنگاه S را تعویض پذیر نامیم.

اگر نیمگروه S شامل عنصر 1 با این خاصیت باشد که بازاء هر $x \in S$ ، $x1=1x=x$. آنگاه 1 را عنصر همانی S و S را نیمگروه یکدار یا مونوئید نامیم.

اگر S عنصر همانی نداشته باشد آنگاه به آسانی می توان با اضافه کردن 1 به S آنرا یکدار نمود.

$$1s=s1=s \qquad \forall s\in S \qquad , \qquad 11=1$$

در این صورت $S\cup\{1\}$ مونوئید خواهد بود و

$$S^1=\begin{cases} S & if \;\; 1\in S \\ S\cup\{1\} & if \;\; 1\notin S \end{cases}$$

را نیمگروه حاصل از الحاق عنصر همانی به S گوئیم.

اگر نیمگروه S با حداقل دو عضو، شامل عنصر 0 چنان باشد که: $0x=x0=0$، آنگاه 0 را عضو صفر نیمگروه S نامیم.

مثال هایی از نیمگروه ها و مونوئیدها:

مثال ۱) $(N,.)$ یک مونوئید و $(N,+)$ یک نیمگروه می باشد.

مثال۲) $(Z,\gcd)$ با عمل دوتایی $z_1.z_2=\gcd(z_1,z_2)$ ، که در آن gcd بزرگترین مقسوم علیه مشترک می باشد، یک نیمگروه است.

مثال۳) $(Mat_n(k),\cdot)$ متشکل از تمام ماتریس های $n\times n$ با ضرایب در میدان K، تحت ضرب معمولی ماتریس ها یک مونوئید می باشد.

مثال٤) فرض کنید S یک نیمگروه (مونوئید) و X یک مجموعه باشد. آنگاه $S^X=Map(X,S)$ تحت عمل دوتایی $\alpha,\beta\in S^x:(\alpha\beta)(x)=\alpha(x).\beta(x) \quad , \quad \forall x\in X$ یک نیمگروه (مونوئید) می باشد. (اگر $1\in S$ آنگاه $C_1:X\to S$ عنصر همانی S^x است.)

زیرگروه ها، مجموعه های مولد، ایده الها:

تعریف ۱-۲) زیرمجموعه غیر تهی T از نیمگروه S یک زیرنیمگروه از S نامیده می‌شود اگر $T^2\subseteq T$.

اگر S یک مونوئید با عنصر همانی 1 باشد آنگاه زیرنیمگروه T، زیرمونوئید است اگر $1\in T$.

تعریف ۱-۳) برای هر زیرمجموعه غیر تهی A از نیمگروه S، کوچکترین زیرنیمگروه S شامل A، عبارتست از $<A>=\bigcup_{n=1}^{\infty}A^n$ که آنرا زیرنیمگروه تولید شده توسط A نامیم.

اگر $<A>=S$ آنگاه A مجموعه عناصر مولد S نامیده می شود.

تبصره : اگر $A=\{a\}$ و $<A>=<a>=S$ آنگاه S تک مولدی یا نیمگروه دوری نامیده می شود.

تعریف ۱-٤) زیرمجموعه ناتهی $K\subseteq S$ ایده آل چپ (راست) S نامیده می‌شود اگر $SK\subseteq K \quad (KS\subseteq K)$.

اگر K هم ایده ال چپ و هم ایده ال راست باشد، آنرا ایده ال دوطرفه یا ایده ال S نامیم.

واضح است که هر ایده ال (یک طرفه یا دو طرفه) از S یک زیرنیمگروه S می‌باشد، اما عکس آن لزوماً برقرار نیست.

به عنوان مثال تمام ماتریس های۲×۲ تحت عمل ضرب معمولی ماتریس‌ها یک نیمگروه خواهد بود. (S) و اگر K را ماتریس های ۲×۲ با دترمینان ۱ در نظر بگیریم در این صورت K زیرنیم گروه S خواهد بود. زیرا :

$$if\ A,B\in K \Rightarrow |A|=|B|=1 \quad , \quad |AB|=|A||B|=1 \quad \Rightarrow \quad AB\in K$$

درحالیکه K ایده ال S نمی باشد، زیرا اگر A ماتریسی از S با دترمینان مخالف ۱ و B ماتریسی از K باشد آنگاه :

$$|AB|=|A||B|=|A|\neq 1 \quad \Rightarrow \quad AB\notin K$$

تبصره : اگر $\{\rho_i \mid i\in I\}$ خانواده ناتهی از رابطه های هم ارزی روی مجموعه X باشد، آنگاه واضح است که $\bigcap\{\rho_i \mid i\in I\}$ نیز یک رابطه هم ارزی روی X است. اگر R یک رابطه دلخواه روی X باشد، آنگاه خانواده رابطه های هم ارزی روی X شامل R ناتهی است. (چون $X\times X$ یک چنین هم ارزی است.) بنابراین اشتراک تمام هم ارزی های روی X شامل R کوچکترین رابطه هم ارزی منحصر به فرد شامل R است. چنین هم ارزی روی X را هم ارزی تولید شده بوسیله R گوئیم و با R^e نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۵) اگر S یک رابطه روی X باشد، S^∞ را بست متعدی S نامیده و بصورت زیر تعریف میکنیم:

$$S^\infty=\bigcup_{n=1}^{\infty}S^n$$

لم ۱-٦) اگر S یک رابطه روی مجموعه X باشد، آنگاه S^∞ کوچکترین رابطه متعدی روی X و شامل S است.

برهان : اولاً، S^∞ متعدی است زیرا اگر $(x,y),(y,z)\in S^\infty$، آنگاه اعداد صحیح و مثبت m,n وجود

دارند بطوریکه $(y,z)\in S^n ,(x,y)\in S^m$. بنابراین $(x,z)\in S^m o S^n = S^{m+n} \subseteq S^\infty$ همچنین واضح است که S^∞ شامل $S = S^1$ نیز می‌باشد. حال اگر T رابطه متعدی دیگری روی X و شامل S باشد آنگاه $S^2 = SoS \subseteq ToT \subseteq T$. بطور کلی برای $n = 1,2,3,...$، $S^n \subseteq T$ و درنتیجه $S^\infty \subseteq T$. بنابراین S^∞ کوچکترین رابطه متعدی روی X و شامل S است.

قضیه ۱-۷) اگر R یک رابطه روی مجموعه X باشد، آنگاه $R^e = \left[R \cup R^{-1} \cup 1_X\right]^\infty$

برهان : با استفاده از لم قبل رابطه $E = \left[R \cup R^{-1} \cup 1_X\right]^\infty$ متعدی و شامل R است. بعلاوه چون $1_X \subseteq R \cup R^{-1} \cup 1_X \subseteq E$ نتیجه می شود E انعکاسی است. همچنین چون $S = R \cup R^{-1} \cup 1_X$ متقارن است، پس برای هم $n \in N$، $S^n = (S^{-1})^n = (S^n)^{-1}$، یعنی S^n نیز متقارن است. بنابراین :

$$\begin{aligned}(x,y)\in E \quad &\Rightarrow (\exists n\in N) \quad (x,y)\in S^n \\ &\Rightarrow (\exists n\in N) \ (y,x)\in S^n \\ &\Rightarrow (y,x)\in E\end{aligned}$$

لذا E متقارن است. در نتیجه E یک رابطه هم ارزی روی X و شامل R است. حال اگر σ رابطه هم ارزی دیگری روی X و شامل R باشد، آنگاه $1_X \subseteq \sigma \quad , \quad R^{-1} \subseteq \sigma^{-1} = \sigma$. بنابراین $S = R \cup R^{-1} \cup 1_X \subseteq \sigma$. چون $SoS \subseteq \sigma.\sigma \subseteq \sigma$، پس به ازای هم $n \in N$، $S^n \subseteq \sigma$، و درنتیجه $S^\infty \subseteq \sigma$. پس $E \subseteq \sigma$. پس $E = \left[R \cup R^{-1} \cup 1_X\right]^\infty$ کوچکترین رابطه هم ارزی روی X شامل R می باشد که بنا به تعریف با R^e نشان می دهیم.

حال با توجه به مطالب فوق داریم :

لم ۱ – ۸) اگر R یک رابطه روی مجموعه X و R^e کوچکترین رابطه هم ارزی روی X و شامل R باشد ، آنگاه $(x,y)\in R^e$ اگر و فقط اگر $x=y$ یا برای $n\in N$ ی، یک دنباله انتقالات بصورت $x=z_1\to z_2\to \ldots \to z_n=y$ موجود باشد ، بقسمی که برای $i\in\{1,2,\ldots,n-1\}$ ، $(z_i,z_{i+1})\in R$ یا $(z_{i+1},z_i)\in R$.

همنهشتی ها و نیمگروه های خارج قسمتی :

تعریف ۱–۹) فرض کنید $\rho\subseteq S\times S$ یک رابطه هم ارزی روی S باشد. در اینصورت ρ همنهشتی چپ روی S نامیده می شود. اگر:

$$\forall\quad s,t,u\in S \qquad s\rho t \quad\Rightarrow\quad (us)\rho(ut)$$

آنرا همنهشتی راست گوئیم هرگاه:

$$\forall\quad s,t,u\in S \qquad s\rho t \quad\Rightarrow\quad (su)\rho(tu)$$

و آنرا همنهشتی دو طرفه نامیم هرگاه:

$$\forall\quad s,t,u\in S \qquad s\rho t \quad\Rightarrow\quad (us)\rho(ut)\ ,\ (su)\rho(tu)$$

یا بطور معادل رابطه هم ارزی ρ یک همنهشتی روی S نامیده می شود اگر:

$$\forall\quad s,t,u,v\in S \qquad (s\rho t),(u\rho v) \quad\Rightarrow\quad (su)\rho(tv)$$

لم ۱–۱۰) مجموعه $S/\rho=\{[a]:a\in S\}$ تحت عمل $[s][t]=[st]$ یک نیمگروه است که به آن نیمگروه خارج قسمتی گوئیم. اگر S یک مونوئید باشد آنگاه S/ρ نیز یک مونوئید با عنصر همانی $[1]$ می باشد.

تبصره : فرض کنیم I یک ایده آل حقیقی و ρ یک همنهشتی روی نیمگروه S باشد . در اینصورت $\rho_I=(I\times I)\cup\{I_S\}$ یک همنهشتی روی S می باشد.

با توجه به تعریف ρ_I بدیهی است که $x\rho_I y$ اگر و فقط اگر $x = y$ یا x و y هر دو در I باشند.

حال S/ρ_I را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$S/\rho_I = \{I\} \cup \{\{x\}: x \in S - I\}.$$

عمل ضرب دو عضو از S/ρ_I را اینگونه درنظر می گیریم که اگر نماینده آنها در $S - I$ قرار گرفت، مشابه ضرب آنها در S و در غیر اینصورت برابر I باشد. با توجه به مطالب فوق بدیهی است که S/ρ_I یک نیمگروه می باشد.

S/ρ_I را ترجیحاً با S/I نشان می دهیم و به آن نیمگروه خارج قسمتی ریز می گوئیم.

ایده ال های اصلی و قوانین گرین :

تعریف ۱-۱۱) فرض کنیم S یک نیمگروه باشد کوچکترین ایده ال چپ از S شامل $a \in S$، $Sa \cup \{a\} = S^1 a$ می باشد که ایده ال چپ اصلی تولید شده توسط a نامیده می شود.

بطور مشابه $aS \cup \{a\} = aS^1$ را ایده ال راست اصلی تولید شده توسط a نامیم و ایده ال اصلی تولید شده توسط a عبارتست از: $SaS \cup aS \cup Sa \cup \{a\} = S^1 a S^1$

تعریف ۱-۱۲) نیمگروه S یک نیمگروه با ایده ال اصلی نامیده می شود اگر تمام ایده الهای آن، اصلی باشند.

تعریف ۱-۱۳) روابط زیر را روی نیم گروه S تعریف می کنیم :

$\forall s,t \in S :$

$s\,L\,t \quad if \quad S^1 s = S^1 t$

$s\,R\,t \quad if \quad sS^1 = tS^1$

$s\,J\,t \quad if \quad S^1 s S^1 = S^1 t S^1$

$s\,H\,t \quad if \quad S^1 s = S^1 t \quad , \quad sS^1 = tS^1$