دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی
دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی - آنالیز عددی

عنوان:

انتگرال گیری عددی با استفاده از مشتقات تابع

نگارش:

مرجان صادقی

استاد راهنما:

دکتر محمد مسجد جامعی

شهریور ۹۱

تقدیم

به پاس بودنتان

پدر، مادر و همسر عزیزم

اظهارنامه دانشجو

موضوع پایان‌نامه: انتگرال گیری عددی با استفاده از مشتقات تابع

استاد راهنما: دکترمحمد مسجدجامعی

نام دانشجو: مرجان صادقی

شماره دانشجویی: ۸۹۱۷۲۰۴

اینجانب مرجان صادقی دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در این پایان‌نامه توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تایید می‌باشد و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است. همچنین گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان‌نامه آئین نامه مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضاء دانشجو:

تاریخ:

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

تشکر و قدردانی

با چه کلامی سپاست گویم وقتی تک تک واژه هایم در وصف جبروتت لرزانند! چگونه تو را به صفحه بنگارم که خود صفحه ای! تو را از کجا آغاز کنم ای سرآغاز من! که بودنم را معنی تویی، امروزم را سبب تویی، که هستم چون تویی، که من در حضور تو معنا یافت ای تمام من! به هر چه هستم تو را سپاس...

اکنون فرصت را مغتنم شمرده و از زحمات بی دریغ تمامی اساتید گرامی در طول دوران تحصیلم کمال تشکر را دارم که دست رنج تک تک ایشان مرتبه علمی امروز من است. بویژه جناب آقای دکتر محمد مسجد جامعی، استاد راهنمای گرانقدر، که قبول زحمت فرموده و با راهنمایی های ارزنده شان این پایان نامه به اتمام رسید. همچنین از اساتید گرامی آقایان دکتر محمود هادیزاده به عنوان داور داخلی و دکتر محمدرضا اصلاحچی به عنوان داور خارجی که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را پذیرفتند قدردانی نموده و سپاسگزارم.

جایگاه امروز من ثمره حضور پر رنگترین موهبت هایی است که بودن هر لحظه شان تضمین موفقیت من است، پدر و مادر عزیزم که تا زنده ام مدیون محبت های بی دریغشان هستم و همسر عزیزم که در تمامی لحظات پشتوانه من است، قدردان تک تک زحماتتان بوده و بی مرز سپاسگزارم.

چکیده رساله

در این پایان نامه به بررسی روش انتگرال گیری جدیدی بر پایه استفاده از مشتقات تابع می پردازیم. این روش با استفاده از تفاضل تابعی مشتق پذیر از بسط تیلور متناهی آن به عنوان تقریبی از انتگرالده، فرمول انتگرالی را ایجاد می کند که در ساختار آن مشتقات تابع مذکور بکار برده می شود. نشان می دهیم روش نام برده با استفاده از مشتقات mم تابع درجه دقتی معادل حداکثر m بار بیشتر از انتگرال گاوسی دارد. همچنین با استفاده از روش ضرایب نامعین و انتگرال گاوسی معادله ای را برای محاسبه مستقیم اوزان و گره های این قاعده بدست می آوریم و در ادامه به منظور محاسبه صریح تابع وزن مرتبط با این معادله با استفاده از نمایش پئانو تابع انتگرالده به معرفی تعمیمی از این قاعده می پردازیم. همچنین تعمیم دیگری از روش مذکور را ارئه می دهیم که در آن به جای بسط تیلور از تفاضلات تقسیم شده انتگرالده استفاده می شود و از این طریق تعداد نقاط تقریب را افزایش می دهیم. به منظور درک بهتر مطلب مثال های عددی در ضمن معرفی روش ها آورده شده اند. خطای حاصل از این روش نیز مورد بررسی قرار می گیرد. مبنای کار تحقیقاتی در این پایان نامه مراجع [۲]، [۸]، [۱۴]، [۱۸]، [۲۲] و [۲۴] می باشد.

کلمات کلیدی : قاعده انتگرال گیری وزن دار، درجه دقت، چند جمله ای متعامد، تابع وزن، گشتاور، معادله انتگرال، نمایش پئانو، B - اسپلاین

مقدمه

محاسبه انتگرال معین یک تابع داده شده اغلب امری بسیار مشکل است. زیرا در اکثر مواقع لازم است انتگرال تابعی حساب شود که هیچ پادمشتق صریحی نداشته و یا مقادیر پادمشتق آن به آسانی بدست نمی آیند. رفع این مشکل یک مساله کلاسیک است که محققین بسیاری را در این حیطه از علم به فعالیت های پژوهشی واداشته و در نهایت منجر به ایجاد راهکارهایی گشته که از آنها به عنوان روش های انتگرال گیری عددی یاد می کنند. حتی در مواردی که تابع انتگرالده خوش رفتار است باز هم استفاده از روش های انتگرال گیری عددی در زمینه های کاربردی اولویت دارد. اساس این روش ها استفاده از تقریبی مناسب است که بتواند جایگزین معادله انتگرالی داده شده شود. در واقع این روش ها به دنبال بهترین تقریبی هستند که خطا را تا بیشترین حد ممکن به صفر نزدیک کند. بدلیل کاربرد گسترده ای که علم تقریب و بویژه روش های انتگرال گیری عددی در سایر علوم و فنون مهندسی دارند مهم ترین هدف در طراحی این روش های عددی افزایش درجه دقت و در نهایت کاهش خطای ایجاد شده است. حال هر چه روش مورد استفاده گستره بیشتری از توابع تقریب (که می توانند دسته ای از چند جمله ای ها و یا چند جمله ای های درونیاب باشند) از درجات بالاتر را شامل شود درجه دقت بالاتری دارد و مسلما روش موثرتری است.
چند جمله ای ها از بهترین تقریب ها هستند زیرا دو ویژگی اساسی دارند، اول اینکه هر تابع پیوسته را بطور یکنواخت تقریب می کنند و دوم اینکه مشتق و انتگرال آنها به راحتی قابل محاسبه است. روش های انتگرال گیری که بر پایه استفاده از چند جمله ای درونیاب بنا شده اند را روش های انتگرال گیری درونیاب می نامند. فرمول های نیوتن - کاتس که به نوعی آغاز روش های انتگرال گیری عددی می باشند دسته ای از فرمول های انتگرال گیری درونیاب اند که از درونیاب لاگرانژ استفاده می کنند. این فرمول ها به دو دسته باز و بسته تقسیم می شوند و بسته به تعداد نقاط انتگرال گیری صورت هایی چون قاعده سیمپسون، ذوزنقه ای، نقطه میانی و غیره را بوجود می آورند. روش انتگرال گیری گاوس نیز دسته دیگری از روش های انتگرال گیری درونیاب می باشد که درجه دقت بالاتری را نسبت به سایر هم دسته هایش دارد. مبنای این روش را $Gauss$ ریاضیدان بزرگ قرن نوردهم بنا گذاشت و پس از آن ریاضیدانان دیگری چون $Christoffel$ آن را تعمیم دادند. اساس این روش تقریب انتگرالی شامل انتگرالده و یک تابع وزن مثبت با استفاده از حاصل جمع مقادیر تابع در نقاط انتگرالی در اوزان انتگرالی است. لازم به ذکر است انتگرال گاوسی به عنوان یک فرمول انتگرالی درونیاب از درونیاب هرمیت تابع استفاده می کند. با جایگذاری توابع متعامد کلاسیک به عنوان تابع وزن انتگرال، جواب قاعده گاوسی حاصل بهبود می یابد و روش های جدیدی مانند انتگرال گاوس - چبیشف، گاوس - هرمیت، گاوس - لاگور و غیره را نتیجه می دهد [۸].
روش های متفاوتی برای بدست آوردن گره ها و ضرایب وزنی انتگرال گاوسی وجود دارد. برای مثال با قرار دادن تابع وزن متناظر با یک چند جمله ای متعامد در انتگرال گره های حاصل ریشه های آن چند جمله ای متعامد خواهند بود. حقیقی و متمایز بودن ریشه های قاعده گاوسی نتیجه مستقیم یکی بودن ریشه های این قاعده با صفرهای چند جمله ای های متعامد است. همچنین در [۲۱] نشان داده می شود که گره های گاوسی مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبی گاوس

متشکل از ضرایب بازگشتی چند جمله ای های متعامد بوده و ضرایب وزنی نیز توان دوم نخستین عضو بردارهای ویژه این ماتریس اند. الگوریتم $Golub-welsch$ نیز یکی از الگوریتم های کارآمد در محاسبه گره ها و ضرایب وزنی گاوسی می باشد.
رساله حاضر به معرفی روش انتگرال گیری جدیدی بر مبنای استفاده از مشتقات تابع می پردازد. این روش اخیرا توسط محمد مسجد جامعی[۱] در [۱۴] ارائه شده است. اساس این روش استفاده از تفاضل تابعی مشتق پذیر از بسط تیلور مرتبه mام آن به عنوان تقریب انتگرالده می باشد و درجه دقتی حداکثر m بار بیشتر از انتگرال گاوسی معمولی دارد. در این روش لزومی ندارد نقطه ای که بسط تیلور و در واقع تقریب حول آن برقرار می شود حتما در بازه انتگرال گیری قرار گیرد. علاوه بر درجه دقت بالا این از دیگر مزایای روش مذکور است. گره ها و ضرایب این روش نیز با استفاده از روش ضرایب نامعین و انتگرال گاوسی محاسبه می شوند. همچنین تعمیم هایی از این روش ارائه می شود که اولین تعمیم به منظور محاسبه فرمول صریحی برای تابع وزن مرتبط با معادله محاسبه گره ها و اوزان روش، با استفاده از نمایش پئانو تابع انتگرالده بدست می آید[۲۴]. روش تعمیمی دوم نیز تعمیمی از روش اصلی در m نقطه متمایز است که به جای بسط تیلور از تفاضلات تقسیم شده تابع استفاده می کند. هدف اصلی در این پایان نامه معرفی این روش و تعمیم های آن و نیز نحوه محاسبه گره ها و ضرایب وزنی آن می باشد. این پایان نامه در سه فصل بشرح زیر تنظیم گردیده است.
فصل اول به معرفی چند جمله ای های متعامد و ویژگی های اساسی آنها، صورت های نمایشی و نحوه استخراج آنها از توابع توزیع مولد شان و نیز ارتباط آنها با نظریه حداقل مربعات و مسائل اشترم - لیوویل می پردازد. در انتها نیز چند جمله ای های متعامد کلاسیک معرفی می شوند.
در فصل دوم روش های انتگرال گیری عددی را در غالب روش های انتگرال گیری درونیاب در دو دسته فرمول های نیوتن - کاتس و انتگرال گاوسی معرفی می کنیم.
فصل سوم که اساس این پایان نامه می باشد به معرفی روش انتگرال گیری جدید و تعمیم های آن، نحوه محاسبه گره ها و اوزان و تحلیل خطای روش می پردازد. مثال های عددی نیز ضمن توضیح روش ها آورده شده اند.
لازم به ذکر است پایان نامه حاضر به بررسی این روش ها با تابع وزن مثبت بر بازه انتگرال گیری $[\alpha,\beta]$ پرداخته و انتگرال ها نیز بر روی محور حقیقی در نظر گرفته شده اند. اخیرا $Milovanovic$ و $Cvetkovic$ این روش را بر اندازه برل مثبت متناهی نیز تعمیم داده اند [۱۶].

[۱] $Mohammad\ Masjed-Jamei$

فهرست مطالب

فصل ۱

تعامد

مبحث چند جمله ای های متعامد یک مساله کلاسیک است که برای اولین بار با کار های نجومی لژاندر در زمینه بررسی حرکت سیالات پا به عرصه وجود گذاشت. این مقوله با کاربرد های بسیار زیاد در زمینه فیزیک، استاتیک، احتمال و سایر شاخه های ریاضی در سه دهه اول قرن بیستم بطرز شگفت آوری پیشرفت کرد. پس از انتشار مقاله معروف $Szeg\ddot{o}$ توجه سایر ریاضی دانان نیز به افزایش جزئیات در این زمینه جلب شد. امروزه تعامد و بویژه چند جمله ای های متعامد یکی از کاربردی ترین ابزار تقریب بخصوص در روش های انتگرال گیری عددی هستند که با استفاده از آنها می توان با افزایش دقت این روش ها را توسعه داد. با این وجود کاربرد چند جمله ای های متعامد در علوم کامپیوتر، نظریه تقریب و آنالیز عددی قدمت چندانی ندارد و تاریخچه آن به سالهای اخیر بر می گردد. در این فصل به معرفی این چند جمله ای ها، ساختار و صورت نمایشی آنها و برخی ویژگی های اساسی شان می پردازیم.

۱.۱ مفاهیم پایه ای

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم V یک فضای خطی روی میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ باشد. تابع حقیقی مقدار نامنفی $||.||$ یک نرم روی فضای V نامیده می شود هرگاه در شرایط زیر صدق کند :

۱ . برای هر $v \in V$، $||v|| = ۰$ اگر و تنها اگر $v = ۰$

۲ . برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ و $v \in V$ داشته باشیم $||\lambda v|| = |\lambda|||v||$

۳ . برای هر $u, v \in V$ ، $||v + u|| \leqslant ||v|| + ||u||$. (نامساوی مثلث)

فضای خطی V متناظر با یک نرم را فضای خطی نرم دار می نامند. هر نرم روی فضای خطی $V = \mathbb{R}^n$ یک نرم برداری نامیده می شود و در حالت کلی به عنوان نرم - p بصورت زیر نمایش داده می شود :

$$||.||_p = \Big(\sum_{i=۱}^{n} |v_i|^p\Big)^{\frac{۱}{p}}$$

از پر کاربرد ترین نرم های برداری می توان سه نرم برداری $||.||_1$، $||.||_2$ و $||.||_\infty$ را نام برد که بصورت زیر تعریف می شوند.

تعریف ۲.۱.۱. برای بردار $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ داریم :

$$\begin{cases} \text{نرم} - 1: & ||v||_1 = \sum_{i=1}^n |v_i| \\ \text{نرم} - 2: & ||v||_2 = \Big\{ \sum_{i=1}^n |v_i|^2 \Big\}^{\frac{1}{2}} \\ \text{نرم} - \infty: & ||v||_\infty = max_{1 \leqslant i \leqslant n} |v_i| \end{cases}$$

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم V فضای خطی تمام توابع انتگرال پذیر روی محور حقیقی $\mathbb{R}$ باشد و $f \in V$، با تعریف نرم :

$$||f||_p = \Big(\int_a^b |f|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}$$

که نرم - p نامیده می شود این فضا یک فضای نرم دار خواهد بود.

تعریف ۴.۱.۱. تابع f متعلق به فضای $L^p[a, b]$ است اگر و تنها اگر $\int_a^b |f|^p dx$ معین باشد، به عبارت دیگر :

$$\int_a^b |f|^p dx \nrightarrow \infty$$

سومین شرط از تعریف (۱.۱.۱) در حالتیکه نرم تعریف شده نرم - p است منجر به نامساوی خاصی به نام نامساوی مینکوفسکی[1] می شود.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم $1 \leqslant p < \infty$. در این صورت برای توابع $f , g \in L^p[a, b]$ داریم :

$$||f + g||_p \leqslant ||f||_p + ||g||_p$$

نامساوی فوق را نامساوی مینکوفسکی می نامند.

در مبحث توابع ویژه و تقریب نیز سه مقدار $p = 1, 2, \infty$ اهمیت ویژه دارند. به ازای $p = 2$ به فضای ضرب داخلی یا فضای هیلبرت می رسیم و مقادیر $p = 1$ و $p = \infty$ فضای باناخ را می سازند. مبنای توابع متعامد در فضای هیلبرت ساخته می شود.
یکی از معروفترین نامساوی ها در فضای هیلبرت نامساوی کشی - شوارتز[2] است.

[1] Minkowski

[2] Cauchy - Schwarz

تعریف ۶.۱.۱. اگر V فضای خطی توابع انتگرال پذیر با نرم - ۲ باشد آنگاه برای هر $f,\ g \in L^{2}[a,b]$ نامساوی کشی - شوارتز بصورت زیر است :

$$\Big(\int_a^b fg\ dx\Big)^{2} \leqslant \int_a^b f^{2} dx\ .\ \int_a^b g^{2} dx$$

تعمیم نامساوی کشی- شوارتز در فضای $L^p[a,b]$ نیز نامساوی مهمی به نام نامساوی هولدر[3] را ایجاد می کند.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم برای $0 < p < \infty$ و $0 < q < \infty$ توابع $f \in L^p$ و $g \in L^q$ مفروض باشند و نیز داشته باشیم $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$، در این صورت $fg \in L^{1}$ و نامساوی هولدر با رابطه زیر نمایش داده می شود :

$$\int_a^b |fg|\ dx \leqslant \Big(\int_a^b |f|^p\ dx\Big)^{\frac{1}{p}}\ .\ \Big(\int_a^b |g|^q\ dx\Big)^{\frac{1}{q}}$$

دلیل اهمیت این نامساوی در جدا شدن تابع انتگرالده fg به دو قسمت f و g در سمت راست نامساوی است.

تعریف ۸.۱.۱. اگر در نامساوی هولدر قرار دهیم $p = 1$ و $q = \infty$ در این صورت نامساوی زیر را داریم :

$$||fg||_{1} \leqslant ||f||_{1}\ .\ ||g||_{\infty}$$

که به نامساوی باناخ مشهور است.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم $w(x)$ یک تابع وزن مثبت بر بازه $[a,b]$ باشد، در این صورت رابطه :

$$||.||_w^p = \Big(\int_a^b |f|^p w(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

را یک نرم - p وزن دار می نامند.

تعریف ۱۰.۱.۱. برای توابع $f\ ,\ g \in L^{2}[a,b]$ و تابع وزن مثبت $w(x)$ تعریف شده بر $[a,b]$، فضای ضرب داخلی وزن دار عبارت است از :

$$< f\ ,\ g >_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$$

تعریف ۱۱.۱.۱. دنباله $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ را نسبت به تابع وزن مثبت $w(x)$ روی فاصله $[a,b]$ متعامد گوییم هرگاه :

$$\int_a^b \varphi_n(x)\ \varphi_m(x)\ w(x) = \begin{cases} \int_a^b \varphi_n^{2}(x)\ w(x)\ dx = (||\varphi_n||_w^{2})^{2}, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

[3] Holder

۲.۱ تولید چند جمله ای های متعامد با استفاده از روند گرام - اشمیت

فرض کنیم می خواهیم دنباله ای از چند جمله ای ها را بسازیم که در شرایط قضیه زیر صدق کند.

قضیه ۱.۲.۱. *دنباله $\{\varphi_n(x)|n \geqslant ۰\}$ از چند جمله ای های درجه n با شرایط زیر وجود دارد و یکتاست :*

۱ . φ_n ها بر $[a, b]$ نسبت به تابع وزن $w(x)$ متعامد یکه اند؛ به عبارت دیگر :

$$< \varphi_n, \varphi_m >_w = \begin{cases} ۱, & n = m \\ ۰, & n \neq m \end{cases}$$

۲ . ضریب x^n در φ_n ها مثبت است.

برهان. می توان با استفاده از یک روش سازنده و بازگشتی تک تک اعضای این دنباله را بدست آورد. به این منظور فرض کنیم $\varphi_۰(x) = c$ که در آن $c > ۰$ یک ثابت است و نیز $||\varphi_۰||_۲ = ۱$. در این صورت داریم :

$$< \varphi_۰, \varphi_۰ >_w = c^۲ \int_a^b w(x)dx = ۱$$

$$\Longrightarrow c = (\int_a^b w(x)dx)^{-\frac{۱}{۲}}$$

اکنون برای ساختن $\varphi_۱(x)$ از رابطه زیر استفاده می کنیم :

$$\psi_۱(x) = x + a_{۱,۰}\varphi_۰(x)$$

در نتیجه :

$$< \psi_۱, \varphi_۰ >_w = ۰, \qquad \Longrightarrow \qquad ۰ = < x, \varphi_۰ >_w + a_{۱,۰} < \varphi_۰, \varphi_۰ >_w$$

و بنابراین ضریب $a_{۱,۰}$ بصورت زیر بدست می آید :

$$a_{۱,۰} = - < x, \varphi_۰ >_w = -\frac{\int_a^b x\ w(x)\ dx}{(\int_a^b w(x)dx)^{\frac{۱}{۲}}}$$

پس $\varphi_۱(x)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$\varphi_۱(x) = \frac{\psi_۱(x)}{||\psi_۱||_۲}$$

و می بینیم که $||\varphi_۱||_۲ = ۱$ و $<\varphi_۱,\varphi_۰>_w = ۰$ و ضریب x نیز مثبت می باشد. در حالت کلی برای ساختن φ_n، ابتدا رابطه :

$$\psi_n(x) = x^n + a_{n,n-۱}\varphi_{n-۱}(x) + \cdots + a_{n,۰}\varphi_۰(x)$$

را تعریف می کنیم و سپس ثابت ها را طوری انتخاب می کنیم که ψ_n با هر φ_j به ازای $j = ۰,\ldots,n-۱$ متعامد باشد. در نتیجه از $<\psi_n,\varphi_j>_w = ۰$ ضرایب $a_{n,j}$ بصورت زیر حاصل می شوند :

$$a_{n,j} = -<x^n,\varphi_j>_w, \qquad j = ۰,\ldots,n-۱$$

و در نهایت داریم :

$$\varphi_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{||\psi_n||_۲}$$

□

روندی که از آن در اثبات قضیه فوق استفاده شد، روند گرام ـ اشمیت [۴] نام دارد. این روند در واقع یکی از ابزار کاربردی در ساخت چند جمله ای های متعامد می باشد. قضیه زیر گویای این مطلب است.

قضیه ۲.۲.۱. *مجموعه چند جمله ای های $\{\varphi_j\}_{j=۰}^n$ تعریف شده به طریق زیر، بر بازه $[a,b]$ نسبت به تابع وزن $w(x)$ متعامد است :*

$$\varphi_۰(x) \equiv ۱, \qquad \varphi_۱(x) = x - \alpha_۱, \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

که در آن

$$\alpha_۱ = \frac{<x\varphi_۰,\varphi_۰>_w}{<\varphi_۰,\varphi_۰>_w}$$

و وقتی $j \geqslant ۲$ *:*

$$\varphi_j(x) = (x-\alpha_j)\varphi_{j-۱}(x) - \beta_j\varphi_{j-۲}(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

که در آن :

$$\alpha_j = \frac{<x\varphi_{j-۱},\varphi_{j-۱}>_w}{<\varphi_{j-۱},\varphi_{j-۱}>_w}$$

و

$$\beta_j = \frac{<x\varphi_{j-۱},\varphi_{j-۲}>_w}{<\varphi_{j-۲},\varphi_{j-۲}>_w}$$

برهان. مراجعه شود به مرجع [۳]. □

[۴] Gram - Schmidt

بر طبق این قضیه با استفاده از روند گرام - اشمیت می توان ارتباط چند جمله ای های متعامد را با روابطی که ذکر شد بدست آورد. به مجموعه این روابط، رابطه بازگشتی چند جمله ای های متعامد گویند. در واقع اگر چند جمله ای های P_n نسبت به تابع وزن $w(x)$ بر بازه $[a,b]$ متعامد باشد آنگاه در رابطه بازگشتی زیر صدق می کنند :

$$\begin{cases} P_{n+۱}(x) = (x-\alpha_n)P_n(x) - \beta_n P_{n-۱}(x) \\ P_۰(x) = ۱ \\ P_۰(x) = x \end{cases}$$

برای درک بهتر این روند مثال زیر را در نظر می گیریم.

مثال ۳.۲.۱. *می خواهیم مجموعه $\{\varphi_۰, \varphi_۱, \varphi_۲\}$ از چند جمله ای ها را بسازیم که بر بازه $[۰,۱]$ نسبت به تابع وزن $w(x) \equiv ۱$ متعامد باشند. با استفاده از قضیه قبل و نیز روابط بازگشتی چند جمله ای ها داریم :*

$$\varphi_۰(x) \equiv ۱$$

$$\alpha_۱ = \frac{< x\varphi_۰, \varphi_۰ >}{< \varphi_۰, \varphi_۰ >} = \frac{۱}{۲} \Longrightarrow \varphi_۱(x) = (x-\alpha_۱)\varphi_۰ = x - \frac{۱}{۲}$$

$$\alpha_۲ = \frac{< x\varphi_۱, \varphi_۱ >}{< \varphi_۱, \varphi_۱ >} = \frac{۱}{۲}, \qquad \beta_۲ = \frac{< x\varphi_۱, \varphi_۰ >}{< \varphi_۰, \varphi_۰ >} = \frac{۱}{۱۲}$$

$$\Longrightarrow \varphi_۲(x) = (x-\alpha_۲)\varphi_۱(x) - \beta_۲\varphi_۰(x) = (x-\frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۱}{۱۲} = x^۲ - x - \frac{۱}{۶}$$

اکنون به معرفی نوع خاصی از چند جمله ای های متعامد می پردازیم و رابطه بازگشتی آن را توصیف می کنیم.

تعریف ۴.۲.۱. چند جمله ای متعامد P_n را متقارن گویند هرگاه در دو شرط زیر صدق کند :

۱ . فاصله تعامد آن بصورت $[-a,a]$ باشد بطوریکه $۰ < a \leqslant \infty$.

۲ . تابع وزن مربوط به این چند جمله ای زوج باشد؛ به عبارت دیگر $w(-t) = w(t)$.

رابطه بازگشتی چند جمله ای های متعامد متقارن ویژگی خاصی دارد و آن صفر بودن ضریب α_n این رابطه است در حالیکه ضریب β_n آن مخالف صفر می باشد.

۳.۱ سیستم های متعامد با استفاده از نظریه حداقل مربعات

فرض کنیم $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ دنباله ای از توابع حقیقی φ_k باشد در این صورت تقریب تابع بسط پذیر f بر حسب ترکیبات خطی عناصر دنباله $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ را با رابطه زیر نمایش می دهیم :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}C_k\varphi_k+R(x)$$

بطوریکه هرگاه $k\to\infty$ داریم $R\to 0$. در بحث تقریب همواره به دنبال تقریبی هستیم که کمترین خطا را ایجاد کند. پس باید اندازه خطا یعنی :

$$|R(x)|=|f(x)-\sum_{k=0}^{n}C_k\varphi_k|$$

را تا حد امکان کوچک کرد اما با توجه به اینکه تابع قدر مطلق یک تابع بدخیم است به جای آن مربع خطا را در نظر می گیریم. در نتیجه در حالت پیوسته کمیت وزن دار :

$$E=\int_a^b R^2(x)w(x)dx$$

را تعریف می کنیم که در آن $w(x)$ یک تابع وزن همواره مثبت است. در این صورت چنانچه $E\to 0$ آنگاه $R\to 0$. با جایگذاری خطای تقریب در کمیت فوق به تابع $n+1$ متغیره E بصورت زیر می رسیم :

$$E(C_0,\ldots,C_n)=\int_a^b (C_0\varphi_0+\cdots+C_n\varphi_n-f)^2w(x)dx$$

که هدف مینیمم کردن آن است. به این منظور مشتقات جزئی E را نسبت به هر یک از متغیر هایش برابر صفر قرار می دهیم :

$$\frac{\partial E}{\partial C_k}=2\int_a^b \varphi_k(C_0\varphi_0+\cdots+C_n\varphi_n-f)w(x)dx=0,\qquad k=0,\ldots,n$$

که یک دستگاه خطی با مجهولات $C_0,\ldots,C_n$ است و فرم ماتریسی زیر را دارد :

$$\begin{bmatrix} \int_a^b\varphi_0^2w(x) & \int_a^b\varphi_0\varphi_1w(x) & \cdots & \int_a^b\varphi_0\varphi_nw(x)\\ \int_a^b\varphi_1\varphi_0w(x) & \int_a^b\varphi_1^2w(x) & \cdots & \int_a^b\varphi_1\varphi_nw(x)\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ \int_a^b\varphi_n\varphi_0w(x) & \cdots & \cdots & \int_a^b\varphi_n^2w(x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_0\\ C_1\\ \vdots\\ C_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\int_a^b\varphi_0f\,w(x)\\ \int_a^b\varphi_1f\,w(x)\\ \vdots\\ \int_a^b\varphi_nf\,w(x)\end{bmatrix}$$

در نظریه حداقل مربعات وزن دار دستگاه فوق را دستگاه نرمال می نامند. اگر معادله ماتریسی این دستگاه را با $AC = B$ نمایش دهیم، برای حل این دستگاه باید معکوس ماتریس ضرایب یعنی A^{-1} را بیابیم ولی همانطور که پیداست ماتریس A یک ماتریس بدخیم است در نتیجه می توان شرایطی را بر توابع پایه φ_k تحمیل کرد که این ماتریس را براحتی معکوس پذیر کند. ساده ترین راه، اعمال شرط تعامد بر ماتریس ضرایب است که در نتیجه این ماتریس را به یک ماتریس قطری تبدیل می کند. در این صورت خواهیم داشت :

$$C_k = \frac{\int_a^b \varphi_k(x) f(x) w(x)}{\int_a^b \varphi_k^2(x) w(x)} = \frac{< f, \varphi_k >_w}{< \varphi_k, \varphi_k >_w}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

و در نهایت بسط متعامد تابع f بصورت زیر حاصل می شود :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{< f, \varphi_k >_w}{< \varphi_k, \varphi_k >_w} \varphi_k(x)$$

بسط بنیادی فوق حالات متفاوتی دارد که یکی از معروفترین آنها سری های مثلثاتی فوریه است. این نظریه در حالت گسسته نیز برقرار است که در بحث برازش منحنی و بویژه معادلات خطی رگرسیون در آمار کاربرد دارد.

۴.۱ سیستم های متعامد به عنوان جواب هایی از مسائل اشترم - لیوویل

در این بخش با استفاده از نظریه اشترم - لیوویل به معرفی سیستم های متعامد و چند جمله ای های کلاسیک می پردازیم. به این منظور معادله همگن مرتبه دوم زیر را در نظر می گیریم :

$$a(x)y_n''(x) + b(x)y_n'(x) + (\lambda_n p(x) + q(x))\, y_n(x) = 0 \qquad (1.1)$$

که در آن y_nها عناصر دنباله توابع ویژه $\{y_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ متناظر با مقادیر ویژه $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ می باشند و $a(x),\ b(x),\ p(x)$ و $q(x)$ نیز توابع حقیقی مقدارند. مساله اشترم - لیوویل نشان می دهد تحت چه شرایطی جواب معادله فوق نسبت به تابع وزن $w(x)$ در فاصله $[\alpha, \beta]$ متعامد است. به این منظور طرفین معادله (۱.۱) را در تابع وزن مثبت $w(x)$ ضرب می کنیم. داریم :

$$w(x)\Big(a(x)y_n''(x) + b(x)y_n'(x) + (\lambda_n p(x) + q(x))\, y_n(x)\Big) = 0 \qquad (2.1)$$

اکنون باید معادله را به فرم یک معادله خود الحاق[۵] در آوریم. صورت کلی معادلات خود الحاق به شکل :

$$(r(x)y_n')' + (\lambda_n p^*(x) + q^*(x))y_n = 0$$

و یا به عبارتی بصورت :

$$r(x)y_n'' + r'(x)y_n' + (\lambda_n p^*(x) + q^*(x))y_n = 0$$

است. با مقایسه معادله فوق و معادله (۱.۳) داریم :

$$\begin{cases} r(x) = w(x)\ a(x) \\ r'(x) = w(x)\ b(x) \end{cases}$$

از مقایسه روابط فوق صریحا نتایج زیر حاصل می شود :

$$\begin{aligned} &(w(x)\ a(x))' = w(x)\ b(x) \\ &\Longrightarrow w'(x)\ a(x) + w(x)\ a'(x) = w(x)\ b(x) \\ &\Longrightarrow \frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{b(x) - a'(x)}{a(x)} \\ &\Longrightarrow ln\ w(x) = \int \frac{b(x) - a'(x)}{a(x)}\ dx \end{aligned}$$

و در نهایت تابع وزن $w(x)$ با رابطه زیر بدست می آید :

$$w(x) = exp\ (\int \frac{b(x) - a'(x)}{a(x)} dx)$$

با ضرب این تابع در طرفین معادله (۱.۱) آن را خود الحاق کرده و تابع $p^*(x) = p(x)\ w(x)$ را تابع وزن جدید در نظر می گیریم. اکنون برای دو مقدار متمایز m و n معادله خود الحاق بصورت زیر می باشد :

$$\begin{cases} \big(r(x)\ y_n'(x)\big)' + \big(\lambda_n\ p^*(x) + q^*(x)\big)\ y_n = 0 \\ \\ \big(r(x)\ y_m'(x)\big)' + \big(\lambda_m\ p^*(x) + q^*(x)\big)\ y_m = 0 \end{cases}$$

[۵] Self adjoint

حال طرفین رابطه اول را در y_m و رابطه دوم را در y_n ضرب کرده و از هم کم می کنیم و در نهایت با انتگرال گیری از طرفین عبارت حاصل داریم :

$$(\lambda_n-\lambda_m)\int_\alpha^\beta p^*(x)y_n(x)y_m(x)dx=\Big[r(x)\Big(y'_n(x)y_m(x)-y_n(x)y'_m(x)\Big)\Big]_\alpha^\beta$$

اکنون دو حالت برای تابع $r(x)$ بوجود می آید:
حالت اول : اگر تابع $r(x)$ چنان باشد که در نقاط انتهایی بازه انتگرال گیری یعنی α و β بطور خودکار صفر شود به عبارت دیگر $r(\alpha)=r(\beta)=0$ در این صورت تعامد برقرار است. به این نوع مسائل، مسائل اشترم - لیوویل عادی می گویند که مبنای ایجاد نوع خاصی از چند جمله ای های متعامد به نام چند جمله ای های متعامد کلاسیک می باشند.
حالت دوم : اگر شرایط به گونه ای باشد که تساوی سمت راست یعنی $y'_n(x)y_m(x)-y_n(x)y'_m(x)$ صفر شود در این صورت مساله ایجاد شده اشترم - لیوویل غیر عادی است که چند جمله ای های غیر کلاسیک را می سازد.
به عنوان مثالی از مسائل اشترم - لیوویل عادی می توان چند جمله ای های چبیشف[۶] نوع اول تا چهارم را در نظر گرفت که با روابط زیر نمایش داده می شوند :

$$\begin{cases} \text{نوع اول}: & T_n(x)=\cos n\theta & \cos\theta=x\\ \text{نوع دوم}: & U_n(x)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} & \cos\theta=x\\ \text{نوع سوم}: & V_n(x)=\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} & \cos\theta=x\\ \text{نوع چهارم}: & W_n(x)=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} & \cos\theta=x \end{cases}$$

هدف از بیان این فرم خاص استفاده از آن در محاسبه توابع وزن و نرم - ۲ چند جمله ای های متعامد کلاسیک است. به این منظور معادله مرتبه دوم همگن زیر را در نظر می گیریم :

$$(ax^2+bx+c)y''_n+(dx+e)y'_n+\lambda_n y_n=0 \qquad (3.1)$$

که در آن a,b,c,d,e پنج پارامتر حقیقی اند و λ_n مقادیر ویژه متناظر با این معادله است که با رابطه زیر بدست می آید :

$$\lambda_n=-n\,(d+(n-1)\,a)$$

[۶] Chebyshev