بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه‌ی دکتری رشته‌ی ریاضی

گرایش آنالیز هارمونیک

جبرهای فوریه و فوریه-استیلیس روی ابرگروه ها

استاد راهنما:

دکتر لشکریزاده بمی

استادان مشاور:

دکتر علیرضا مدقالچی

دکتر علی رجالی

پژوهشگر:

محمود پورغلامحسین

شهریور ماه ۱۳۸۸

شیوه نگارش پایان نامه رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه دکتری رشته ریاضی محض (آنالیز هارمونیک) آقای محمود پورغلامحسین

تحت عنوان:

جبرهای فوریه و فوریه استیلجس روی ابرگروهها

در تاریخ ... ۸۸/۶/۱۴..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ....خوب.................. به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر محمود لشکری زاده	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۲- استاد مشاور پایان نامه	دکتر علیرضا مدقالچی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۳- استاد مشاور پایان نامه	دکتر علی رجالی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۴- استاد داور داخل گروه	دکتر محبوبه رضایی	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۵- استاد داور داخل گروه	دکترمجید فخار	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۶- استاد داور خارج گروه	دکتر فرید بهرامی	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۷- استاد داور خارج گروه	دکتر رسول نصر اصفهانی	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

سپاسگزاری

نگارنده بر خود لازم می داند از زحمات آقایان دکتر لشکریزاده بمی به عنوان استاد راهنما دکتر مدقالچی و دکتر رجالی به عنوان استادان مشاور که مرا در خلق این اثر هرچند ناچیز با راهنمایی های خود یاری دادند کمال تقدیر و تشکر را بنماید. همچنین جا دارد از داوران محترم خارجی آقایان دکتر بهرامی ودکتر نصر اصفهانی وداوران داخلی آقای دکتر فخار و سرکار خانم رکتر رضایی که با ارایه ی پیشنهاد های ارزنده ی خود به بهبود هر چه بیشتر این رساله کمک نمودند تشکر و قدر دانی نموده و توفیقات روز افزون این سروران را از خداوند منان خواستارم.

تقدیم به پدر و مادر عزیزم که مرا با مهر پروراندند

و

تقدیم به همسر مهربانم که زندگی مرا بهاری کرد

چکیده

در این رساله ما تعریف جدیدی از فضای فوریه روی یک ابرگروه فشرده ی موضعی ارایه می دهیم و ثابت می کنیم که آن یک زیرفضای باناخ از جبر فوریه – استیلیس روی آن ابرگروه است. این تعریف باتعریف امینی و مدقالچی هنگامیکه ابرگروه مورد نظر یک ابرگروه تانسوری باشد منطبق است و همچنین با تعریف رم که تنها برای ابرگروه های فشرده می باشد انطباق دارد. ثابت می کنیم که دوگان جبر فوریه روی یک ابرگروه برابر است با جبر فون – نویمن روی آن ابرگروه. همچنین نشان می دهیم برای یک ابرگروه پونتریاگین جبر فوریه برابر است با پیچش فضای هیلبرت متشکل از تمام توابعی که انتگرال مربع آن ها متناهی است با خودش. علاوه بر آن نشان میدهیم یک نرم معادل روی جبر فوریه ی روی یک ابرگروه وجود دارد که آن را به یک جبر باناخ یکریخت با جبر باناخ متشکل از توابع با انتگرال متناهی روی تبدیل فوریه ی روی آن ابرگروه تبدیل می کند. ما ثابت می کنیم هرگاه یک ابرگروه تانسوری میانگین پذیر باشد آن گاه جبر فوریه ی روی آن دارای یک همانی تقریبی کراندار است. همچنین نشان می دهیم اگر یک زیر جبر از جبر فوریه – استیلیس روی یک ابرگروه تانسوری فشرده ی موضعی ضعیف ستاره بسته پایا نسبت به مزدوج پایا باشد و نقاط آن ابرگروه را از هم جدا کند آنگاه می بایست شامل جبر فوریه ی روی آن ابرگروه باشد.

در آخر دو گونه ی جدید از ابرگروه ها با نام های ابرگروه های حذفی چپ و ابرگروه های انتقال پذیر چپ را معرفی می کنیم . ما به تحقیق در باره ی ویژگی های این نوع از ابرگروه ها می پردازیم و نتایج جدیدی بدست می آوریم که در حالت کلی برای همه ی ابرگروه ها برقرار نیست. همچنین برخی مثال های جالب از این ابرگروه ها را می آوریم .

واژه های کلیدی : ابرگروه، جبر فوریه، ابرگروه میانگین پذیر، حذفی چپ، انتقال پذیر چپ، جبر باناخ

فهرستِ مطالب

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱−۱ مقدمه

. در هنگام مطالعه‌ی گروه‌های فشرده‌ی موضعی، به فضاهایی برمی‌خوریم که گرچه گروه نیستند اما برخی از ساختارهای گروه‌ها را دارند. اغلب این ساختارها بر پایه یک پیچش محض اندازه‌ها بنا شده‌اند . ابرگروه‌ها چنین ساختاری دارند. هرچند گروه‌ها و نیم گروه‌های توپولوژیک ساختار و اهمیت خاص خود را دارند اما بدلایلی چند هم آنالیز هارمونیک و هم نظریه‌ی احتمال بر روی ابرگروه‌ها زمینه‌های تحقیقاتی به سرعت در حال توسعه می‌باشند. یک انگیزه‌ی اساسی برای توسعه‌ی آنالیز هارمونیک و نظریه‌ی نمایش ها ورای رده‌ی نیم گروه‌های فشرده‌ی موضعی وجود دارد، همچنین یک تقاضای ضروری جهت مطالعه‌ی دستگاه‌های دینامیکی تصادفی با ساختارهای توپولوژی جبری که با شرایط پایداری متمایز شده‌اند وجود دارد. یک قدم در پیگیری این دو شاخه از تحقیقات کشف دوباره‌ی ایده‌ی ابرگروه‌هاست که حدودا به سال ۱۹۰۰ یعنی به زمانی که نظریه‌ی گروه‌ها با کار " فربنیوس [۱]" ظهور کرد برمی‌گردد. ابرگروه‌ها به عنوان اشیای جبری توسط " مارتی [۲]" و " وال [۳]" در قرن سیزدهم عمدتاً در ضمن نظریه‌ی گروه‌های ناجابجایی و ساختارهای وابسته به فضاهای رده‌های همنهشتی و" همدسته‌های دوگانه [۴]" مورد مطالعه قرار گرفت . کوشش های زیادی در زمینه‌های مختلف ریاضی از جبر گرفته تا ریاضی فیزیک به عمل آمده است تا با فرموله کردن اصول موضوع لازم همراه با برخی

---

[1] Frobenius

[2] F.Marty

[3] M.S. Wall

[4] Double cosets

صورت های ضعیف تر مانند دستگاه‌های ابرمختلط و ابرگروه‌های علامت دار ملزومات یک اصول نظری مناسب برآورده شود. دسترسی اصولی به این نظریه با پیشرفت در مطالعه‌ی جبرهای " هک [5]" [۱۶] و زوج‌های کوانتومی " گلفاند [6]"[۱۵] قوت گرفت .

اگر به خواهیم دقیق تر صحبت کنیم ما ابرگروه‌ها را به عنوان فضاهای فشرده‌ی موضعی با ساختاری شبیه گروه‌ها در نظر می‌گیریم که در آن اندازه‌های کراندار دارای پیچشی مانند گروه‌های فشرده‌ی موضعی می‌باشند. مثال‌های زیادی در این رابطه وجود دارد اما مثال‌های مهم این چنین ابرگروه‌ها، فضاهای همدسته‌های دوگانه ، فضاهای رده‌های همنهشتی، فضای مدارها، دوگان‌هایی که از رده‌های خاصی از گروه‌های فشرده‌ی موضعی به وجود می آیند و اعمال متناظر روی گروه‌های توپولوژیک می‌باشند .

مثال‌های دیگر عبارتند از فضاهای $\mathbb{R}_+$ و $\mathbb{Z}_+$ از به ترتیب اعداد حقیقی مثبت و اعداد صحیح مثبت، بازه‌ی یکه$\mathbb{I}$ وقرص یکه، با اعمالی مجرد که متفاوت از اعمال معمول به ارث رسیده از اعمال گروهی به ترتیب روی $\mathbb{R}_+$ و $\mathbb{Z}_+$ و اعداد مختلط $\mathbb{C}$ می‌باشند. در واقع یک ابرگروه K را می‌توان به عنوان یک گروه احتمال در نظر گرفت ، به‌این معنی که برای هر زوج x,y از نقاط K یک اندازه‌ی احتمال $\varepsilon_x * \varepsilon_y$ با تکیه‌گاه فشرده روی K وجود دارد که لزوما اندازه‌ی دیراک $\varepsilon_{x.y}$ برای یک ترکیب $x.y$ در K نیست ، اما

$$(x,y) \to \operatorname{supp}(\varepsilon_x * \varepsilon_y)$$

یک نگاشت پیوسته از $K \times K$ به توی فضای زیرمجموعه‌های فشرده‌ی K می‌باشد. پیچش $*$ بین اندازه‌های دیراک به تمام اندازه‌های کراندار روی K توسعه می‌یابد و آنالیز توپولوژی ـ جبری را که صرفاً بر اساس ساختار K بنا شده است به جبر تعمیم یافته‌ی اندازه‌های $M^b(K)$ روی K منتقل می‌کند.

به جای انتقال چپ تابع f بوسیله‌ی x که به طور طبیعی در گروه‌ها موجود می‌باشد، در ابرگروه‌ها ما با یک انتقال (چپ) تعمیم یافته که به صورت

$$T^x f(y) := \int_K f(z)(\varepsilon_x * \varepsilon_y)(dz)$$

برای تمام $y \in K$ تعریف می‌شود، سروکار داریم.

عملگر تعمیم یافته‌ی انتقال T^x بوسیله‌ی " دلسارته [7]" [۱۰] در ارتباط بایک تعمیم فرمول تیلور معرفی شد و توسط " لوتین [8]" [۱۸] برای معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم بکار گرفته شد. درخلال دهه‌ی بعد

[5]Hecke

[6]Gelfand

[7]Delsarte

[8]Levitan

" بوخنر [9]" [۶] و [۵] ایده‌ی انتقالهای تعمیم یافته را در مطالعاتش در باره‌ی معادله‌ی حرارت که به توابع ویژه‌ی " بسل [10]" و " جگنبوآور [11]" مربوط می‌شد به خدمت گرفت.
به دنبال آن، کارهای " اسپکتور [12]" [۲۸] ، " جویت [13]" [۱۴] " دانکل [14]" [۱۱] منجر به چارچوب ریاضی اصول موضوعی برای فضاهای انتقال‌های تعمیم یافته، جبرهای پیچشی و ابرگروه‌ها شد.
برای ابرگروه‌های جابجایی K ، یک بدنه‌ی محکم از آنالیز هارمونیک بر اساس نظریه‌ی گلفاند در باره‌ی جبرهای نرمدار شکل گرفته است . چون دراین حالت K پذیرای یک اندازه‌ی تحت انتقال پایای ω_K (اندازه‌ی هار) می‌باشد لذا جبر ابرگروهی $L^1(K) := L^1(K, \omega_K)$ و جبرهای تابعی مربوطه اجزای کلیدی این قبیل مطالعات می‌باشند. علی رغم آن که فضای دوگان یک ابرگروه لزوماً از ساختار ابرگروهی برخوردار نیست، اما تبدیلات فوریه و" پلنچرال [15]" به عنوان ابزار مهم تکنیکی در دسترس بوده و برخی نظریه‌های دوگان از جمله نظریه‌ی توابع مثبت و منفی معین قابل اثبات است .
چیزی که دراین جا به سختی قابل انتظار است یک نظریه‌ی ساختاری برای ابرگروه‌ها در غالب قضیه‌ی " پونتریاگین -ون کمپل [16]" می باشد .از طرف دیگر به نظر می‌رسد ساختار و آنالیز تمام ابرگروه‌های روی $\mathbb{R}_+$ به شکل یک هدف واقعی به عنوان قدم اول در این راستا می‌باشد. در این رساله ما منحصراً با " جبرهای فوریه [17]" روی ابرگروه‌های توپولوژیک سروکار داریم ، علاوه بر آن روی برخی ابرگروه‌های خاص مانند ابرگروه‌های میانگین پذیر، حذفی چپ، انتقال پذیر چپ و ابرگروه‌های تانسوری تمرکز می‌کنیم. جبرهای فوریه روی ابرگروه‌ها ابتدا توسط " رم [18]" (۱۹۷۹) برای ابرگروه‌های فشرده معرفی شد. امینی و مدقالچی این مفهوم را برای تانسور ابرگروه‌ها تعمیم دادند . دراین رساله تعریف جدیدی از فضای فوریه‌ی $A(K)$ از یک ابرگروه K ارایه می‌دهیم و ثابت می‌کنیم که آن یک زیرفضا از فضای باناخ $B(K)$ است . شایان ذکر است که تعریف ما با آنچه امینی و مدقالچی برای حالتی که K یک تانسور ابرگروه است و همچنین با تعریف " رم" که تنها برای ابرگروه‌های فشرده ارایه شده انطباق دارد.

---

[9] Bochner
[10] Bessel
[11] Gegenbauer
[12] Spector
[13] Jewitt
[14] Dunkl
[15] Plancherel
[16] Pontryagin-van Kampen
[17] Fourier algebras
[18] Vrem

ارایه‌ی مطالب در این رساله به صورت زیر می‌باشد . تعاریف و نمادهای ارایه شده در فصل اول آورده شده اند . فصل دوم اختصاص دارد به جبرهای فوریه بر روی ابرگروه‌های فشرده‌ی موضعی . $A_p(K)$ را برای $1 < p < \infty$ به عنوان فضای تمام توابع h در $C_0(K)$ که حداقل به یک طریق به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} f_n * \check{g_n}$ با فرض $f_n \in L^p(K)$ و $g_n \in L^q(K)$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p \|g_n\|_q < \infty$ قابل نوشتن باشد، تعریف می‌کنیم . برای $h \in A_p(K)$ همچنین تعریف می‌کنیم

$$\| h \|_{A_p(K)} = \inf\{\sum \|f_n\|_p \|g_n\|_q : h = \sum_{n=1}^{\infty} f_n * \check{g_n},\ f_n \in L^p(K), g_n \in L^q(K)\}.$$

با این نرم $A_p(K)$ یک فضای باناخ است . فضای باناخ $A_2(K)$ فضای فوریه‌ی K نامیده شده و با $A(K)$ نشان داده می‌شود . همچنین $PM_p(K)$ را به عنوان بستار " اولترا_ضعیف "[19] $\lambda_p(L^1(K))$ در $\pounds(L^p(K))$ تعریف می‌کنیم . بستار ضعیف $\lambda_2(L^1(K))$ در $\pounds(L^2(K))$ را " جبر فون _نیومن "[20] K ، می‌نامند و با $VN(K)$ نشان داده می‌شود. در این فصل نشان می‌دهیم $A_p(K)^* = PM_q(K)$ و نتیجه می‌گیریم که $A(K)^* = VN(K)$.

همچنین ثابت می‌کنیم برای یک ابرگروه فشرده‌ی موضعی K، $A(K)$ یک زیرفضا از فضای باناخ $B(K)$ است .اگر K یک ابرگروه پونتریاگین باشد، ثابت می‌کنیم

$$A(K) = L^2(K) * L^2(K) = \mathcal{F}(L^1(\widehat{K}))$$

و

$$B(K) = \mathcal{F}(M(\widehat{K}))$$

که در آن $\mathcal{F}$ نشان دهنده‌ی تبدیل فوریه روی $\widehat{K}$ می‌باشد. نشان می‌دهیم یک نرم معادل روی $B(K)$ و $A(K)$ وجود دارد به طوری که همریختی‌های

$$A(K) \cong L^1(\widehat{K})$$

و

$$B(K) \cong M(\widehat{K})$$

به عنوان همریختی‌های جبرهای باناخ برقراراست . در انتهای این فصل طیف گلفاند$A(K)$ را بدست می‌آوریم و ثابت می‌کنیم برای هر ایده‌آل بسته‌ی I از$A(K)$ یک نقطه‌ی $x \in K$ وجود دارد به طوری

[19] ultra-weak

[20] von-Neumann algebra

که برای هر $u \in I$ داریم $u(x) = 0$.

در فصل سوم، جبرهای فوریه را بر روی ابرگروه‌های تانسوری مطالعه کرده و ثابت می‌کنیم اگر K یک ابرگروه تانسوری باشد آن گاه $A(K)$ دارای یک همانی تقریبی کراندار خواهد بود. ما همچنین به کنکاش در باره‌ی زیر جبرهای $B(K)$ پرداخته و نشان می‌دهیم برای یک ابرگروه تانسوری فشرده‌ی موضعی K هرگاه A یک زیر جبر ضعیف ـستاره بسته‌ی پایا از $B(K)$ باشد به طوری که A نسبت به عمل مزدوج پایا بوده و نقاط K را از هم جدا کند آن گاه داریم $A(K) \subseteq A$.

در فصل چهارم دو مفهوم جدید از ابرگروه‌ها با نامهای ابرگروه‌های " حذفی چپ [21]« و " انتقال پذیر چپ [22]« را معرفی کرده و ویژگی‌های آن ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم .در آن جا ثابت می‌کنیم برای یک ابرگروه فشرده‌ی موضعی K هرگاه H یک زیر ابرگروه فشرده‌ی سوپر نرمال K باشد، آن گاه $K//H$ حذفی چپ خواهد بود . ثابت می‌کنیم اگر K کاملاً حذفی چپ در هر نقطه باشد، آن گاه K باید یک گروه باشد. ما به تحقیق در باره‌ی ارتباط بین این دو مفهوم می‌پردازیم . به عنوان مثال ثابت می‌کنیم اگر K کاملاً حذفی چپ در نقطه $t \in K$ باشد، آن گاه K باید انتقال پذیر چپ در t باشد . همچنین ثابت می‌کنیم اگر K انتقال پذیر چپ در $t \in K$ باشد آن گاه می‌بایست K در t حذفی چپ باشد . این دو مفهوم در حالت کلی معادل نیستند هر چند نشان می‌دهیم اگر K یک ابرگروه متناهی باشد آن گاه در $t \in K$ حذفی چپ است اگر و تنهااگر در $t \in K$ انتقال پذیر چپ باشد . ما همچنین ثابت می‌کنیم اگر K یک ابرگروه گسسته بوده به طوری که در $t \in K$ انتقال پذیر چپ باشد آن گاه برای $\mu \in \ell^1(K)$ ، از $\varepsilon_t * \mu = 0$ نتیجه می شود $\mu = 0$. در انتهای این فصل ثابت می‌کنیم هرگاه K یک ابرگروه فشرده‌ی موضعی باشد که در آن برای هر $x, y \in K$ ، مجموعه‌ی $x * y$ متناهی باشد، آن گاه برای هر $x \in K$ و $m \in C_b(K)^*$ داریم $\varepsilon_x . \mid m \mid = \mid \varepsilon_x . m \mid$ ، اگر و تنها اگر K یک گروه باشد.

[21]left cancellative

[22]left shiftable

۱-۲ تعاریف و ساختارهای کلی

تعریف ۱-۲.۱ یک دستگاه استقرایی عبارت است از زوج $(\mathcal{H},\{\mathcal{H}_i, i\in I\})$ به طوری که $\mathcal{H}$ یک فضای برداری، $\mathcal{H}_i$ یک منیفلد خطی از $\mathcal{H}$ که دارای توپولوژی $\mathcal{T}_i$ است به طوری که $(\mathcal{H}_i,\mathcal{T}_i)$ یک فضای موضعاً محدب (LCS) بوده و علاوه برآن شرایط زیر نیز برقرار باشد .

(الف) I یک مجموعه‌ی جهتدار است و $\mathcal{H}_i\subseteq\mathcal{H}_j$ هرگاه $i\leq j$.

(ب) اگر $i\leq j$ و $U_j\in\mathcal{T}_j$ آن گاه $U_j\cap\mathcal{H}_i\in\mathcal{T}_i$.

(ج) $\mathcal{H}=\cup\{\mathcal{H}_i, i\in I\}$.

گزاره ۱-۲.۱ اگر $(\mathcal{H},\{\mathcal{H}_i,\mathcal{T}_i, i\in I\})$ یک دستگاه استقرایی باشد و فرض کنیم $\mathcal{B}$ گردایه‌ی تمام مجموعه‌های محدب و متعادل V باشد که $V\cap\mathcal{H}_i\in\mathcal{T}_i$ برای تمام $i\in I$. همچنین فرض کنیم $\mathcal{T}$ گردایه‌ی تمام مجموعه‌های محدب U از $\mathcal{H}$ باشد به‌طوری که برای هر $x_\circ$ در U یک V در $\mathcal{B}$ وجود داشته باشد با شرط $x_\circ+V\subseteq U$. دراین صورت $(\mathcal{H},\mathcal{T})$ یک LCS (نه لزوماً هاسدورف) است . (یک مجموعه‌ی $A\subseteq\mathcal{H}$ متعادل نامیده می‌شود، هرگاه برای $x\in A$ و $|\alpha|\leq 1$ داشته باشیم $\alpha x\in A$) .

برهان. گزاره‌ی ۵.۳ از [۸] را نگاه کنید .

تعریف ۱-۲.۲ اگر $(\mathcal{H},\{\mathcal{H}_i, i\in I\})$ یک دستگاه استقرایی و $\mathcal{T}$ توپولوژی تعریف شده در گزاره‌ی فوق باشد، آن‌گاه $\mathcal{T}$ توپولوژی حد استقرایی نامیده می‌شود و $(\mathcal{H},\mathcal{T})$ حد استقرایی $\{\mathcal{H}_i\}$ گفته می‌شود .

مثال ۱-۲.۱ فرض کنیم X یک فضای فشرده‌ی موضعی بوده و $\{\mathcal{K}_i, i\in I\}$ گردایه‌ی تمام زیرمجموعه‌های فشرده‌ی X باشد . همچنین فرض کنیم $\mathcal{H}_i$ مجموعه‌ی تمام f هایی در $C(X)$ باشد که $\mathrm{supp}(f)\subseteq\mathcal{K}_i$. دراین صورت $\cup_i\mathcal{H}_i=C_{\circ\circ}(X)$ و اگر هریک از $\mathcal{H}_i$ ها را مجهز به توپولوژی نرم سوپریمم کنیم ، آن گاه $(C_{\circ\circ}(X),\{\mathcal{H}_i\})$ یک دستگاه استقرایی است (مثال ۵.۱۰ از[۸] را نگاه کنید) .

فرض کنیم X یک فضای فشرده‌ی موضعی هاسدورف باشد ما$B(X)$ را برای نشان دادن فضای توابع اندازه پذیر" برل [۲۳]" روی X به‌کار می‌بریم . زیرفضاهای متمایز $B(X)$ شامل $C(X)$، $C_b(X)$، $C_\circ(X)$ و $C_{\circ\circ}(X)$ می‌باشد. این زیرفضاها به ترتیب متشکل از توابع مختلط مقداری پیوسته،

[23] Borel

توابعی که علاوه بر آن کراندار نیز می‌باشند، توابعی که در بی‌نهایت صفر می‌شوند و توابعی که دارای تکیه‌گاه فشرده هستند . مخروط های مثبت این فضاهای برداری با بکار بردن علامت + مشخص می‌شوند. به $C_b(X)$ و $C_\circ(X)$ توپولوژی نرم سوپریمم $\|\ \|_\infty$. نسبت داده می شود، در حالی که به $C_{\circ\circ}(X)$ توپولوژی حد استقرایی فضاهای $\mathrm{C}_E(X) := \{f \in C_{oo}(X) | \operatorname{supp}(f) \subset E\}$ که در آن E فشرده بوده و هر یک نرم سوپریمم را دارا می با شند ، نسبت داده می شود(به مثال ۱ـ۲.۱ نگاه کنید). بااین توپولوژی ها تمام فضاهای فوق تام می‌باشند . توپولوژی زیر نقشی کلیدی درابرگروه‌ها دارد .

" توپولوژی میشل [۲۴]"

فرض کنیم $\wp(X)$ نمایانگر فضای زیرمجموعه‌های فشرده‌ی ناتهی X باشد . برای $A, B \subset X$ قرار می‌دهیم

$$\wp_A(B) := \{C \in \wp(X) \quad : \quad C \cap A \neq \emptyset \quad , \quad C \subset B\}$$

دراین صورت به $\wp(X)$ می‌توان یک توپولوژی را نسبت داد که بوسیله‌ی زیر پایه‌ی متشکل از تمام $\wp_U(V)$ ها که در آن U و V زیرمجموعه‌های باز X هستند ، تولید می‌شود . این توپولوژی که توسط میشل [۱۹] توسعه یافت دارای خواص زیراست .

(الف) اگر X فشرده باشد آن گاه $\wp(X)$ نیز فشرده است .

(ب) $\wp(X)$ یک فضای فشرده‌ی موضعی هاسدورف است .

(ج) نگاشت $\{x\} \longrightarrow x$ یک همانریختی از X بر روی یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی $\wp(X)$ است .

(د) گردایه‌ی زیرمجموعه‌های متناهی و ناتهی X در $\wp(X)$ چگال است .

(هـ) اگر Ω یک زیرمجموعه‌ی فشرده‌از $\wp(X)$ باشد آن گاه مجموعه‌ی $\mathrm{B} := \bigcup\{A : A \in \Omega\}$ یک زیرمجموعه‌ی فشرده از X خواهد بود .

هنگامی که X متریک پذیر با متر d باشد، آن گاه توپولوژی میشل روی $\wp(X)$ قوی تراز توپولوژی هاسدورف داده شده بوسیله‌ی متر ρ می‌باشد ، که برای $A, B \in \wp(X)$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\rho(A, B) := \max\{h(A, B), h(B, A)\}$$

به طوری که در آن داریم $h(A, B) := \sup\{d(x, B) : x \in A\}$.

---

[24] Michael

اندازه‌ها

یک اندازه‌ی (مختلط) " رادون [۲۵] " μ روی X عبارت است از یک تابعک خطی پیوسته روی $C_{oo}(X)$. به این ترتیب برای هر مجموعه‌ی فشرده‌ی $E \subset X$ وجود دارد یک ثابت α_E به طوری که

$$|\mu(f)| \leq \alpha_E \|f\|_\infty \quad (f \in C_E(X)).$$

مجوعه‌ی اندازه‌های رادون روی X را با $M(X)$ نشان می‌دهیم . برای هر اندازه‌ی $\mu \in M(X)$ مزدوج آن یعنی $\bar{\mu}$ تابعکی خطی با دستور $\bar{\mu}(f) = \mu(\bar{f})$ برای هر $f \in C_{\circ\circ}(X)$ تعریف می‌شود . قرار می‌دهیم

$$Re(\mu) := \frac{۱}{۲}(\mu + \bar{\mu})$$

و

$$Im(\mu) := (\frac{۱}{۲i})(\mu - \bar{\mu})$$

در نتیجه

$$\mu = Re(\mu) + iIm(\mu)$$

تجزیه‌ی μ به قسمت های حقیقی و موهومی آن می‌باشد .
$|\mu|$ (قدرمطلق μ) برابر است با کوچک ترین اندازه‌ی ρ به طوری که

$$|\mu(f)| \leq \rho(|f|), \quad \forall f \in C_{\circ\circ}(X)$$

نتایج مشهور زیر را برای $\mu, \nu \in M(X)$ داریم .

(الف) $$|Re(\mu)| \leq |\mu|$$

$$|Im(\mu)| \leq |\mu|$$

$$|\mu| \leq |Re(\mu)| + |Im(\mu)|$$

[25] Radon

(ب)

$$| \mu + \nu | \leq | \mu | + | \nu |$$

(ج) توابع حقیقی g, h وجود دارند به‌طوری که

$$Re(\mu) = g \mid \mu \mid$$

و

$$Im(\mu) = h \mid \mu \mid$$

درجایی که $g^{۲} + h^{۲} = ۱$.

برای هر $\mu \in M(X)$ قرار می‌دهیم

$$\| \mu \| := \sup\{| \mu(f) | : f \in C_{\circ\circ}(X), \|f\|_{\infty} \leq ۱\}$$

یک اندازه‌ی μ کراندار گفته می‌شود هرگاه $\|\mu\| < \infty$. به علاوه μ انقباضی خوانده می‌شود اگر $\|\mu\| \leq ۱$ ، و آن یک اندازه‌ی احتمال است اگر $\mu \geq \circ$ و $\|\mu\| = ۱$.

$M(X)$ دارای زیرمجموعه‌های متمایز مختلفی مانند $M^{(۱)}(X), M_{+}(X), M_{c}(X), M^{b}(X)$ و $M^{۱}(X)$ است که به ترتیب عبارتند از فضاهای اندازه‌های ان کراندار ، ا ندازه‌هایی که تکیه‌گاه فشرده دارند ، اندازه‌های مثبت ، اندازه‌های انقباضی و اندازه‌های احتمال .

برای هر $\mu \in M^{b}(X)$ و $f \in B(X)$ وجود دارد $\mu_k \in M^{b}_{+}(X)$ و $f_k \in B^{+}(X)$ به‌طوری که برای هر k داریم

$$\mu^{(k)} \leq |\mu| \ , f^{(k)} \leq |f|$$

و

$$\mu = \mu^{(۱)} - \mu^{(۲)} + i\mu^{(۳)} - i\mu^{(۴)}$$

و

$$f = f^{(۱)} - f^{(۲)} + if^{(۳)} - if^{(۴)}$$

دراین جا $\mu^{(۱)} - \mu^{(۲)}$ دقیقاً تجزیه‌ی هان $Re(\mu)$ بوده و $\mu^{(۳)} - \mu^{(۴)}$ تجزیه‌ی $Im(\mu)$ است .

$M(X)$ را می‌توان به یک فضای موضعاً محدب تبدیل کرد هرگاه توپولوژی $\sigma(M(X), C_{\circ\circ}(X))$ را به

آن نسبت دهیم. این توپولوژی ، توپولوژی " ویگ [۲۶]" خوانده می‌شود و آنرا می‌توان به وسیله‌ی نیم نرم های

$$\mu \to \sup\{|\mu(f_i)| : ۱ \leq i \leq n\}$$

با $f_i \in C_{\circ\circ}(X)$ و $i = ۱, ۲, ..., n$ برای $n \in N$ ، تعریف کرد.

فضاهای برداری $M^b(X)$ و $C_b(X)$ تشکیل یک زوج دوگان می‌دهند. توپولوژی $\sigma(M^b(X), C_b(X))$ ، توپولوژی ضعیف روی $M^b(X)$ خوانده می شود (به‌این توپولوژی، توپولوژی برنولی هم گفته می‌شود واگراین توپولوژی روی $M^b(K)_+$ درنظر گرفته شود به آن توپولوژی مخروطی نیز می‌گویند).

توپولوژی‌های ویگ و ضعیف به ترتیب با τ_w, τ_v نشان داده می‌شوند .

این نکته مهم است که توجه نماییم ، هر تابعک خطی به طور ضعیف پیوسته‌ی F روی $M^b(X)$ را می‌توان به‌صورت $F(\mu) = \int_X f d\mu$ برای یک $f \in C_b(X)$ نمایش داد .

نکته‌ی مهم دیگری که در خلال این بحث وجود دارد ، تطابق بین همگرایی تورهای اندازه‌ها و قسمت های مثبت آن ها می‌باشد. ابتدا ما به این نکته توجه می نماییم که اگر $\mu_\iota, \mu \in M^b(X)$ در روابط

$$\tau_w\text{-}lim\mu_\iota = \mu$$

و

$$\|\mu_\iota\| \to \|\mu\|$$

صدق کند آن گاه

$$\|Re(\mu_\iota)\| \to \|Re(\mu)\|$$

و

$$\|Im(\mu_\iota)\| \to \|Im(\mu)\|$$

یک نتیجه‌ی فوری آن است که اگر

$$\tau_w - lim\mu_\iota = \mu$$

[26] vague

و

$$\|\mu_\iota\| \to \|\mu\|$$

آن گاه

$$\tau_w - lim_\iota \mu_\iota^{(k)} = \mu^{(k)}$$

برای هر $k = ۱, ۲, ۳, ۴$. بنابراین هر سؤال در باره‌ی همگرایی ضعیف یک تور از اندازه‌ها را می‌توان با در نظر گرفتن سؤال مشابه درباره‌ی اندازه‌های مثبت پاسخ داد .