بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم پایه

رساله دوره دکتری ریاضی(محض)

عنوان

رده های خاصی از مشتق ها روی جبرهای باناخ

نگارش

هوگر قهرمانی

استاد راهنما

دکتر غلامحسین اسلام زاده

استاد مشاور

دکتر سید احمد موسوی

مهر ۱۳۸۷

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

بسمه تعالی

تاییدیه اعضای هیات داوران حاضر در جلسه دفاع از رساله دکتری

آقای هوگر قهرمانی رساله واحدی خود را باعنوان: «رده‌های خاصی از مشتقها روی جبرهای باناخ» در تاریخ ۸۷/۷/۱۶ ارائه کردند.

اعضای هیات داوران نسخه نهایی این رساله را از نظر فرم و محتوا تایید کرده است و پذیرش آنرا برای تکمیل درجه دکتری پیشنهاد می کند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	آقای دکتر غلامحسین اسلام‌زاده	دانشیار	
۲- استاد مشاور	آقای دکتر سیداحمد موسوی	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	خانم دکتر فرشته سعدی	استادیار	
٤- استاد ناظر داخلی	آقای دکتر عباس حیدری	استادیار	
٥- استاد ناظر خارجی	آقای دکتر علیرضا مدقالچی	استاد	
٦- استاد ناظر خارجی	آقای دکتر عبدالرسول پورعباس	دانشیار	
۷- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	خانم دکتر فرشته سعدی	استادیار	

بسمه‌تعالی

آیین‌نامهٔ چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس، مبیّن بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

مادّهٔ ۱ در صورت اقدام به چاپ پایان‌نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اطلاع دهد.

مادّهٔ ۲ در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد /رسالهٔ دکتری نگارنده در رشتهٔ آنالیز ریاضی است که در سال ۱۳۸۷ در دانشکدهٔ علوم پایه دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم /جناب آقای دکتر غلامحسین ، مشاورهٔ سرکار خانم /جناب آقای دکتر سید مهدی موسوی و مشاورهٔ سرکار خانم /جناب آقای دکتر اسلام زاده از آن دفاع شده است.»

مادّهٔ ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

مادّهٔ ۴ در صورت عدم رعایت مادّهٔ ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ‌شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرّس، تأدیه کند.

مادّهٔ ۵ دانشجو تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادّهٔ ۴ را از محلّ توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

مادّهٔ ۶ اینجانب هوگر مهرداد دانشجوی رشته آنالیز ریاضی مقطع دکتری تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام‌خانوادگی: هوگر مهردادی

تاریخ و امضا: ۱۳۸۷/۶/۳۱

دستورالعمل حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیات علمی، دانشجویان، دانش آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی که با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد ذیل را رعایت نمایند:

ماده ۱- حقوق مادی و معنوی پایان نامه‌ها / رساله‌های مصوب دانشگاه متعلق به دانشگاه است و هرگونه بهره‌برداری از آن باید با ذکر نام دانشگاه و رعایت آیین‌نامه‌ها و دستورالعمل‌های مصوب دانشگاه باشد.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و استاد راهنما مسئول مکاتبات مقاله باشند.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب حاصل از نتایج پایان نامه / رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی دانشگاه باید با مجوز کتبی صادره از طریق حوزه پژوهشی دانشگاه و بر اساس آئین نامه های مصوب انجام می‌شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق حوزه پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این دستورالعمل در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۱۳۸۴/۴/۲۵ در شورای پژوهشی دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب لازم الاجرا است و هرگونه تخلف از مفاد این دستورالعمل، از طریق مراجع قانونی قابل پیگیری خواهد بود.

تقديم به

پدر ومادرم

قدردانی

از پدر و مادر عزیزم به خاطر حمایت های مداومشان تشکرمی کنم.
از اساتید محترم بخش ریاضی که در طول تحصیل از محضر ایشان بهره مند شده ام،تشکر و قدردانی می نمایم. مراتب سپاس و عمیق ترین قدردانی خویش را از سر صدق و اخلاص به محضر استاد گرانقدرجناب آقای دکتر غلامحسین اسلام زاده به عنوان استادراهنما وآقای دکترسید احمد موسوی به عنوان استاد مشاور که در نهایت سعه صدر و خالصانه همواره با رهنمودهای ارزشمند و سازنده خود اینجانب را در تدوین و نگارش رساله مورد محبت خویش قرار داده اند، ابراز می دارم.

چکیده

در این رساله به مطالعه مشتق ها روی حلقه ها و جبرهای باناخ و مدول ها با سه هدف اساسی پرداخته شده است. هدف اول تعمیم مفهوم مشتق به روی مدول ها است که مفهوم مشتق‌های تعمیم یافته روی مدول ها را معرفی کرده و برخی از مفاهیم و نتایج مهم در مورد مشتق ها روی جبرها را برای مشتق های تعمیم یافته روی مدول ها بیان می‌کنیم. هدف دوم ارائه تعمیم دیگری از مشتق ها به نام (α,β)ـ مشتق روی جبرها می‌باشد که با توجه به آن مفاهیم (α,β)ـ گروه کوهمولوژی اول جبرهای باناخ با ضرایب در یک مدول دلخواه و (α,β)ـ میانگین‌پذیری ضعیف جبرهای باناخ را معرفی کرده و بررسی می‌کنیم و نیز مفهوم (α,β)ـ مشتق جردن را به عنوان تعمیم مفهوم مشتق جردن بیان می‌کنیم، آخرین هدف بررسی ساختار همریختی های حلقه‌ای و مشتق ها روی حلقه ماتریس های بالا مثلثی صوری می‌باشد که با استفاده از این مطالب ساختار حلقه چند جمله‌ای های دیفرانسیل روی حلقه ماتریس های بالا مثلثی صوری را تعیین می‌کنیم و مفهوم مدول چند جمله‌ای های دیفرانسیل را معرفی می‌کنیم. در نهایت نشان می‌دهیم که تحت شرایط مناسب هر (α,β)ـ مشتق جردن روی جبر ماتریس های بالا مثلثی صوری یک (α,β)ـ مشتق است.

واژگان کلیدی: مشتق، مشتق تعمیم یافته، جبر باناخ، میانگین‌پذیر ضعیف، حلقه چند جمله‌ای های دیفرانسیل، حلقه ماتریس های بالا مثلثی صوری ، مشتق جردن

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

پیشگفتار

موضوع اصلی این رساله مطالعه روی مشتق ها می‌باشد. معرفی و مطالعه مشتق ساختمان های جبری بیش از هفتاد سال مورد توجه و مطالعه بسیاری از ریاضیدانان بوده است. این مفهوم از ابعاد مختلف مورد مطالعه و تعمیم قرار گرفته و در شاخه‌های مختلف علوم مورد بررسی واقع شده است. امروز مشتق (از هر نوع) نه تنها در آنالیز بلکه در بسیاری از زمینه‌های دیگر همچون جبر، آمار، فیزیک و مکانیک نیز مورد تحقیق و استفاده قرار می‌گیرد. ما دو تعمیم جالب از مفهوم مشتق را ارائه داده و سپس به بررسی برخی از مفاهیم و نتایج مهم در مورد مشتق ها برای این تعمیم ها می‌پردازیم و همچنین به بررسی حلقه ماتریس های بالا مثلثی صوری و ارتباط مشتق با آنها می‌پردازیم.

رساله در ۴ فصل تنظیم شده است. در فصل اول مقدمات و پیشنیازهایی که در ۳ فصل بعد مورد استفاده قرار گرفته است را بیان کرده‌ایم. در فصل دوم مفهوم مشتق‌های تعمیم یافته روی مدول ها را به عنوان تعمیمی از مفهوم مشتق به روی مدول ها ارائه می‌دهیم و برخی از نتایج مقدماتی در مورد مشتق ها را برای مشتق های تعمیم یافته بیان می‌کنیم و سپس به مسأله وجود مشتق های تعمیم یافته روی مدول ها می‌پردازیم. در ادامه این فصل ارتباط مشتق های تعمیم یافته روی مدول ها را با زیر مدول های اول مورد مطالعه قرار می‌دهیم و در نهایت به بحث پیوستگی خودکار مشتق های تعمیم یافته و ارتباط آن با پیوستگی خودکار مشتق ها می‌پردازیم. از این فصل مقاله زیر استخراج شده است.

- G.H ESSLAMZADEH AND H. GHAHRAMANI EXISTENCE, AUTOMATIC CONTINUITY AND INVARIANT SUBMODULES OF GENERALIZED DERIVATIONS ON MODULES.

در فصل سوم تعمیم دیگری از مشتق ها روی جبرها به نام (α,β)ـ مشتق ها را بیان کرده و مورد بررسی قرار می‌دهیم که ابتدا مطالب مقدماتی را در مورد (α,β)ـ مشتق ها به دست آورده و سپس به معرفی (α,β)ـ گروه کوهمولوژی اول جبرهای باناخ با ضرایب در یک مدول دلخواه با استفاده از مفهوم (α,β)ـ مشتق ها می‌پردازیم که تعمیمی از گروه کوهمولوژی اول جبرهای باناخ با ضرایب در یک مدول دلخواه می‌باشد و ارتباط (α,β)ـ گروه کوهمولوژی اول جبرهای باناخ را به ازای همریختی های جبری پیوسته مختلف α و β باهم بررسی می‌کنیم و در ادامه این بحث به معرفی (α,β)ـ میانگین‌پذیری ضعیف جبرهای باناخ به عنوان تعمیم میانگین‌پذیری ضعیف جبرهای باناخ می‌پردازیم و نتایجی را در این راستا به دست می‌آوریم و نشان می‌دهیم که (α,β)ـ میانگین‌پذیری ضعیف متمایز از میانگین‌پذیری ضعیف می‌باشد. در نهایت مفهوم (α,β)ـ مشتق جردن را به عنوان تعمیم مشتق جردن بیان می‌کنیم و خواص مقدماتی آنرا بررسی می‌کنیم. مقاله‌ای نیز در مورد این فصل در دست تهیه می‌باشد.

سرانجام در فصل چهارم مفهوم حلقه ماتریس های بالا مثلثی صوری را معرفی کرده و ابتدا ساختار همریختی های حلقه‌ای و مشتق ها را روی این حلقه در کلی ترین حالت تعیین کرده و برخی از نتایج را در مورد حلقه ماتریس های بالا مثلثی صوری یکدار به دست می‌آوریم و با استفاده از این نتایج اثباتی متفاوت و ساده‌تر برای تعیین ساختار مشتق ها روی حلقه ماتریس های بالا مثلثی ارائه می‌دهیم. در ادامه ساختار حلقه چند جمله‌ای های دیفرانسیل روی حلقه ماتریس های بالا مثلثی صوری یکدار را تعیین می‌کنیم و نشان می‌دهیم که این حلقه نیز ساختاری به صورت حلقه ماتریس های بالا مثلثی صوری دارد و با استفاده از این مطلب مفهوم مدول چند جمله‌ای های دیفرانسیل را به عنوان تعمیمی از مفهوم حلقه چند جمله‌ای های دیفرانسیل تعریف می‌کنیم و برخی از نتایج مقدماتی را در مورد آن به دست می‌آوریم. در انتهای این فصل نشان می‌دهیم که

هر (α,β)- مشتق جردن روی حلقه ماتریس های بالا مثلثی صوری تحت شرایط مناسب یک (α,β)- مشتق می‌باشد. مقالات زیر از این فصل استخراج شده‌اند.

- HOGER GHAHRAMANI AND A-MOUSSAVI, DIFFERENTIAL POLYNOMIAL RINGS OF TRIANGULAR MATRIX RINGS, BULLETIN OF IRANIAN MATHEMATICAL SOCIETY, ISI
- HOGER GHAHRAMANI AND A-MOUSSAVI, HOMOMORHISMS AND (α,β)- JORDAN DERIVATIONS OF TRIANGULAR ALGEBRAS .

فصل اول

پیشنیازها

مقدمه

در این فصل نمادها، تعاریف و قضایایی را که در فصل های بعد به آنها نیاز داریم، معرفی می‌کنیم. در تمام فصول فضاهای برداری و جبرها را روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم و نماد I اگر برای نمایش یک نگاشت به کار رود منظور نگاشت همانی می‌باشد و اگر I نگاشت همانی را نشان ندهد با توجه به محتوا مفهوم آن مشخص می‌باشد.

این فصل در ۳ بخش تنظیم شده است که بخش اول به آنالیز تابعی و بخش دوم به جبرها و بخش سوم به جبرهای باناخ اختصاص دارند.

۱-۱- آنالیز تابعی

در این بخش به معرفی بعضی از مفاهیم آنالیز تابعی می‌پردازیم. این مطالب رامی توان در هر مرجع استاندارد در زمینه آنالیز تابعی یافت، مثلاً می‌توان به [۱۵] مراجعه کرد.

اگر E یک فضای برداری باشد و $S\subseteq E$ آنگاه زیر فضای تولید شده توسط S را با linS نشان می‌دهیم که عبارتست از:

$$\mathrm{lin}S=\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i:\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{C}\ ,x_1,\dots,x_n\in S,\ n\in\mathbb{N}\}$$

اگر E و F فضاهای برداری باشند آنگاه نگاشت $T:E\to F$ را خطی گوییم اگر

$$T(\lambda x+\gamma y)=\lambda T(x)+\gamma T(y)\qquad(\lambda,\gamma\in\mathbb{C},x,y\in E)$$

نگاشت های خطی را عملگر خطی نیز می‌نامیم و مجموعه همه نگاشت های خطی از E به F را با $L(E,F)$ نشان می‌دهیم و اگر $E=F$ آن را با $L(E)$ نشان می‌دهیم.

اگر $T:E\to F$ یک نگاشت خطی باشد آنگاه

$$\ker T=\{x\in E:T(x)=0\}$$

۱-۱-۱- تعریف

اگر E یک فضای برداری باشد آنگاه نگاشت $\|\cdot\|: E \to R$ را یک نرم روی E می‌نامیم در صورتی که شرایط زیر برقرار باشد.

(i) به ازای هر $x \in E$ داشته باشیم $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$

(ii) به ازای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $x \in E$ رابطه $\|\lambda x\| = |\lambda| . \|x\|$ برقرار باشد.

(iii) به ازای هر $x, y \in E$ داشته باشیم $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

فضای برداری E همراه با یک نرم $\|\cdot\|$ را فضای نرمدار می‌نامیم. هر نرم روی یک فضای نرمدار یک متر به صورت $d(x, y) = \|x - y\|$ القاء می‌کند. اگر فضای نرمدار E تحت متر القاء شده از نرمش کامل باشد، آنرا فضای باناخ می‌نامیم.

۱-۱-۲- قضیه

اگر E و F فضاهای نرمدار و $T: E \to F$ یک نگاشت خطی باشد آنگاه حکم های زیر هم ارزند.

(i) T پیوسته است.

(ii) T در ۰ پیوسته است.

(iii) $K \geq 0$ وجود داردکه به ازای هر $x \in E$ داریم $\|T(x)\| \leq K\|x\|$ که در این حالت می‌گوییم T کراندار است.

مجموعه همه نگاشت های خطی کراندار از E به F را با B(E, F) نشان می‌دهیم که این مجموعه یک زیر فضای خطی L(E, F) می‌باشد و با نرم زیر یک فضای نرمدار است.

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| \qquad (T \in B(E, F))$$

اگر F فضای باناخ باشد آنگاه B(E, F) هم یک فضای باناخ است، پس به ازای فضای باناخ E، B(E, E)=B(E) یک فضای باناخ است. اگر F فضای باناخ با بعدمتناهی باشد آنگاه به ازای هر فضای نرمدار E، B(E, F) =L(E, F) می‌باشد.

برای فضای نرمدار E, $B(E,\mathbb{C})$ را با E^* نمایش داده و دوگان E می‌نامیم. هر عضو E^* یک تابعک خطی کراندار روی E نامیده می‌شود. به ازای هر عضو $f\in E^*$ و $x\in E$ اسکالر $f(x)$ را با نماد $<f, x>$ نمایش می‌دهیم. E^* یک فضای باناخ می‌باشد.

۱-۱-۳- قضیه (گراف بسته)

فرض می‌کنیم E و F فضاهای باناخ باشند و $T\in B(E,F)$. در این صورت حکم های زیر هم ارزند.

(i) T کراندار است.

(ii) گراف T در $E\times F$ بسته است.

(iii) اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله در E باشد به طوری که $x_n\to 0$ در E و $T(x_n)\to y$ در F آنگاه $y=0$ باشد.

در این قضیه منظور از گراف T مجموعه $\{(x,T(x)):x\in E\}$ به عنوان زیر فضایی از $E\times F$ می‌باشد و $E\times F$ را با توپولوژی حاصلضربی در نظر می‌گیریم.

اگر E و F فضاهای باناخ باشند آنگاه $E\oplus F$ با $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_\infty$ فضای باناخ است که این نرم ها روی $E\oplus F$ معادلند و اگر فضای باناخ E جمع مستقیم دو زیر فضای بسته خودش باشد آنگاه نرم E با $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_\infty$ روی E معادل است.

اگر E یک فضای باناخ باشد آنگاه به ازای هر $x\in E$، $\hat{x}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود یک تابعک خطی روی E^* می‌باشد.

$$\hat{x}:E^*\to\mathbb{C}\ ;\quad \hat{x}(f)=f(x)$$

کوچکترین توپولوژی روی E^* را که به ازای آن همه تابعک های $\{\hat{x}:x\in E\}$ روی E^* پیوسته‌اند توپولوژی ضعیف ستاره می‌نامیم و با ω^*- توپولوژی نشان می‌دهیم. یک تور $\{f_\lambda\}$ در E^* در ω^*- توپولوژی به $f\in E^*$ همگراست اگر و تنها اگر به ازای هر $x\in E$ داشته باشیم $\mathrm{Lim}_\lambda f_\lambda(x)=f(x)$.

گوی یکه فضای باناخ E عبارتست از مجموعه $\{x\in E:\|x\|\le 1\}$ و آنرا با E_1 نشان می‌دهیم.

۱-۱-۴- قضیه (باناخ ـ آلا اوغلو)

اگر E یک فضای باناخ باشد آنگاه گوی یکه E_1^* با ω^* - توپولوژی، فشرده است.

۱-۱-۵- قضیه (هان ـ باناخ)

اگر E یک فضای باناخ و F یک زیر فضای آن و f یک تابعک خطی پیوسته روی F باشد آنگاه $\Lambda \in E^*$ چنان یافت می‌شود که $\Lambda_{|F} = f$.

در ادامه به معرفی ضرب تانسوری فضاهای برداری و ضرب تانسوری تصویری فضاهای باناخ می‌پردازیم.

ضرب تانسوری فضاهای برداری E و F یک فضای برداری $E\otimes F$ همراه با نگاشت دوخطی $\tau : E\times F \to E\otimes F$ ؛ $\tau(x,y) = x\otimes y$ می‌باشد به طوری که هرگاه W یک فضای برداری و $T : E\times F \to W$ یک نگاشت دو خطی باشد، یک نگاشت خطی یکتای $\hat{T} : E\otimes F \to W$ وجود دارد به طوری که $\hat{T} o \tau = T$ می‌باشد.

می‌توان نشان داد که همیشه $E\otimes F$ وجود دارد و در حد یکریختی یکتاست.

هر $u \in E\otimes F$ را می‌توان به صورت $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ بیان کرد که در آن $(x_i)_{i=1}^{n} \subseteq E$ و $(y_i)_{i=1}^{n} \subseteq F$ و $n \in \mathbb{N}$ است. این نمایش منحصر به فرد نمی‌باشد.

وقتی E و F فضاهای نرمدار باشند می‌خواهیم یک نرم روی $E\otimes F$ قرار دهیم که آنرا به یک فضای نرمدار تبدیل کند که اینجا فقط به ذکر نرم تانسوری تصویری می‌پردازیم و ضرب تانسوری تصویری را معرفی می‌کنیم.

۱-۱-۶- تعریف

فرض می‌کنیم E و F فضاهای نرمدار باشند. نرم تانسوری تصویری $\|\cdot\|_\pi$ روی $E\otimes F$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\|u\|_\pi = \inf\{\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|.\|y_i\| :\ u=\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i,\ n\in \mathbb{N}\}$$

$\|\cdot\|_\pi$ روی $E\otimes F$ یک نرم می‌باشد و به ازای هر $x\in E$ و $y\in F$ داریم $\|x\otimes y\|=\|x\|\|y\|$ کامل سازی فضای نرمدار $(E\otimes F,\|\cdot\|_\pi)$ یک فضای باناخ می‌باشد که آنرا ضرب تانسوری تصویری E و F می‌نامیم و با $E\hat{\otimes}F$ نشان می‌دهیم. هر عضو $u\in E\hat{\otimes}F$ را می‌توان به صورت $u=\sum_{i=1}^{\infty} x_i\otimes y_i$ بیان کرد که در آن به ازای هر $i\in\mathbb{N}$ ، $x_i\in E$ و $y_i\in F$ می‌باشد.

اگر E و F فضاهای نرمدار و W یک فضای باناخ باشد و $S:E\times F\to W$ یک نگاشت دوخطی پیوسته باشد، آنگاه یک نگاشت خطی پیوسته یکتای $T:E\hat{\otimes}F\to W$ وجود دارد به طوری که

$$T(x\otimes y)=S(x,y) \qquad (x\in E, y\in F)$$

اگر S یک مجموعه ناتهی باشد آنگاه مجموعه زیر را در نظر می‌گیریم

$$\ell^1(S)=\{f:S\to\mathbb{C} : \text{کراندار باشد } f\}$$

این مجموعه با جمع و ضرب اسکالر نقطه‌ای و نرم $\|f\|=\sup_{s\in S}|f(s)|$ یک فضای باناخ می‌باشد.

۱-۲- جبرها

در این بخش به معرفی جبرها و مدول ها روی جبرها می‌پردازیم و برخی از ویژگی های آنها و تعاریف مربوط را ارائه می‌دهیم. مباحث در مورد حلقه ها هم اعتبار دارد، برای مطالعه بیشتر می‌توان به [۱۶] مراجعه کرد.

۱-۲-۱- تعریف

جبر A یک فضای برداری همراه با یک عمل دوتایی $\cdot : A\times A \to A$ می‌باشد که این عمل دوتایی شرکت‌پذیر است و به ازای هر $c, a, b \in A$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ داریم

$$a.(b+c)=a.b+a.c, \qquad (a+b).c=a.c+b.c$$
$$\lambda(a.b)=(\lambda a).b=a.(\lambda b)$$

این عمل را ضرب A می‌نامیم و به جای $a.b$ می‌نویسم ab.

جبر A را جابجایی می‌نامیم اگر به ازای هر $b \in A$ و a داشته باشیم $ab=ba$.

(۰) یک جبر می‌باشد. یک زیر مجموعه جبر A یک زیر جبر A نامیده می‌شود اگر با اعمال روی A یک جبر باشد. یک عضو e_A همانی نامیده می‌شود اگر $e_A \neq 0$ و به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم $ae_A = e_A a = a$ و اگر فقط $e_A a = a$ برقرار باشد آنرا همانی چپ می‌نامیم و همانی راست هم به صورت مشابه تعریف می‌شود. عضو همانی را معمولاً با ۱ نشان می‌دهیم. یک جبر A با یک همانی را جبر یکدار می‌نامیم. یک عضو $a \in A$ را وارون پذیر می‌نامیم اگر $b \in A$ موجود باشد که $ab=ba=1$.
عضو $a \in A$ را خودتوان می‌نامیم اگر $a^2=a$.

اگر A یک جبر باشد آنگاه فضای برداری $\mathbb{C}\times A$ با ضرب زیر به یک جبر تبدیل می‌شود.

$$(\lambda, a)(\gamma, b)=(\lambda\gamma, \lambda b+\gamma a+ab) \qquad (\lambda, \gamma \in \mathbb{C}, a, b \in A)$$

اگر A یکدار باشد آنگاه $A^{\#}=A$ را می‌گیریم و اگر A یکدار نباشد آنگاه $A^{\#}=\mathbb{C}\times A$ را با ضرب فوق در نظر می‌گیریم. (۰و۱) عضو همانی $A^{\#}=\mathbb{C}\times A$ می‌باشد. $A^{\#}$ را یکانی سازی A می‌نامیم.

اگر S و T زیر مجموعه‌های غیر تهی جبر A باشند آنگاه ST را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$ST=\text{lin}\{ab : a\in S, b\in T\}$$

نماد aT را به جای $\{a\}T$ به کار می‌بریم و بقیه حالت ها هم به همین ترتیب. اگر S یک زیر مجموعه ناتهی A باشد آنگاه S^n عبارتست از:

$$S^n=\text{lin}\{a_1 \dots a_n : a_1, \dots, a_n \in S\}$$

۱-۲-۲- تعریف

اگر A و B جبر باشند آنگاه همریختی جبری $\theta : A \to B$ عبارتست از نگاشتی خطی که به ازای هر $a,b \in A$ رابطه $\theta(ab)=\theta(a)\theta(b)$ برقرار باشد.

اگر همریختی $\theta : A \to B$ یک به یک و پوشا باشد آنرا یکریختی می‌نامیم. هر یکریختی $\theta : A \to A$ را خودریختی می‌نامیم.

اگر A یکدار و $c \in A$ وارون پذیر باشد آنگاه نگاشت $\varphi_c : A \to A$ که به صورت $\varphi_c(a)=ca^{-1}c$ تعریف می‌شود یک خودریختی است که آنرا خودریختی درونی می‌نامیم.

۱-۲-۳- تعریف

یک کاراکتر روی جبر A یک همریختی غیر صفر از A به $\mathbb{C}$ است. مجموعه همه کاراکترها روی A را فضای کاراکتر A می‌نامیم و با $\Delta(A)$ نشان می‌دهیم.

اگر A یکدار باشد و $\varphi \in \Delta(A)$ آنگاه $\varphi(1)=1$ و به ازای هر عضو وارون پذیر a داریم $\varphi(a) \neq 0$.

۱-۲-۴- تعریف

فرض می‌کنیم A یک جبر باشد. زیر فضای برداری E از A را یک ایده‌آل چپ (راست) می‌نامیم اگر به ازای هر $a \in A$ و $x \in I$ داشته باشیم $ax \in I$ $(xa \in I)$ اگر I هم ایده‌آل چپ و هم ایده‌آل راست باشد آنرا ایده‌آل می‌نامیم.

A و (۰) ایده‌آل های بدیهی می‌باشند. یک ایده‌آل (چپ یا راست) I اکید است اگر $I \neq A$.

اگر I و J ایده‌آل هایی در A باشند آنگاه I+J و IJ و I^n ، $n \in \mathbb{N}$ ایده‌آل هایی در A هستند. فضای خارج قسمتی A/I با ضرب $(a+I)(b+I)=ab=I$ $(a,b \in A)$ یک جبر می‌باشد که آنرا جبر خارج قسمتی می‌نامیم.