دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم

گروه ریاضی

عنوان پایان نامه (رساله)

اسپلاین درجه شش غیر چند جمله ای برای حل مسائل مقدار مرزی مرتبه پنجم

پایان نامه (رساله) :

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

مولف

اعظم گل محمدی

استاد راهنما

دکتر جلیل رشیدی نیا

استاد مشاور

دکتر شهریار فرهمند

فهرست مطالب

فهرست جدولها

چکیده:

در این پایان نامه به کاربرد اسپلاین درجه ششم غیر چند جمله ای برای حل مسائل مقدار مرزی مرتبه پنجم می پردازیم. اساس کار برمبنای کاربرد اسپلاین درمرجع [۱] استوار است .درفصل اول به تعاریف وکلیات اولیه مورد نیاز می پردازیم ودر فصل دوم ابتدا به فرمول بندی اسپلاین درجه ششم چند جمله ای و آنالیز خطای روش وکاربرد روش حاصله روی مسائل مقدارمرزی می پردازیم ونتایج حاصله را با طول گامهای متفاوت برای مثالهای مورد نظر درجداول آورده ایم .نتایج نشان می دهد که روش حاصله از لحاظ دقت وکاربرد آن درحل مسائل برجسته می باشد . فصل سوم به فرمول بندی اسپلاین درجه ششم غیر چند جمله ا ی وبدست آوردن روابط سازگار مفید اسپلاین جهت گسسته سازی مسئله مقدارمرزی مرتبه پنجم اختصاص دارد.فرمول هایی برای شرایط مرزی بدست می آیدوهمگرایی روش رابحث وبررسی می کنیم. درپایان فصل نیز روشهای حاصله را روی چندین مسئله بکار می بریم ونتایج حاصله را در جدولهایی درج کرده ایم که نشانگر افزایش دقت روش نسبت به سایر روشهای مورد مقایسه دارد.وسرانجام نتیجه گیری کلی آورده شده و لیست مراجعی که مورد استفاده قرار گرفته است آورده شده است.

مقدمه:

حل مسائل مقدار مرزی مرتبه پنجم مورد توجه بسیاری از محققان می باشدودر برخی ازعلوم، نظیر علوم فنی ومهندسی کاربرد دارد.افراد بسیاری این نوع مسائل را به کمک ر وشهای متعارف حل کرده اند. دراین پایان نامه روشی رابا استفاده از اسپلاین درجه شش غیر چند جمله ای ارائه کرده ایم که در مقایسه با روشهای ذکر شده ،ازتقریب بهتری برخوردار است . همچنین این روش با درنظر گرفتن مقادیر متفاوت برای پارامترهای مدل ، همگراازمرتبه دوم وچهارم است.

فصل اول:

۱-۱مقدمه:

دراین فصل ،بعضی از تعاریف ومفاهیمی که در این پایان نامه مورد استفاده قرار گرفته است را معرفی می کنیم.کلیات و تعاریف اسپلاین در این فصل ازمرجع [۲]و [۳]آورده شده است .برای مطالعه بیشتر می توان به آن مراجعه کرد.

۱-۲تعاریف وقضایای مقدماتی:

معادله دیفرانسیل:هررابطه ای که شامل متغیر یا متغیر های مستقل وتابع وابسته ویا مشتقات مراتب مختلف آن باشد، را یک معادله دیفرانسیل می نامیم.اگر رابطه شامل یک متغیر مستقل باشد ،آن رایک معادله دیفرانسیل معمولی می گویندواگر شامل بیش از یک متغیر مستقل باشد، آن رایک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می خوانیم.

معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n ام: شکل کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی از مرتبه nام به صورت زیر است:

$$f(x,y,y',y'',..,y^{n})=0$$

منحنی هموار:

تابع f راهموار گوئیم هرگاه مشتق آن پیوسته باشد.ازنقطه نظر درونیابی ،همواری به معنی آن است که باتعداد کمی نقطه درونیابی بتوانیم تقریب مناسبی از منحنی مفروض به دست آوریم.

نرم ماتریسی:

نرم یک ماتریس تابعی حقیقی از فضای $R^{n\times n}$ به R با خواص زیر است:

۱) $\|A\| > ۰$

۲) $\|A\| = ۰ \Leftrightarrow A = ۰$

۳) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$

۴) $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$

$۵)\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

که درآن $A \in R^{n\times n}$ و $\alpha \in R$ هر ماتریس ومقدار دلخواه می باشند.

تابع چند جمله ای تکه ای:

فرض کنید $\xi := \left(\xi_i\right)_1^{l+1}$ دنباله ای اکیدا" صعودی ازنقاط و k عدد صحیح مثبت باشد.اگر $p_1,\ldots,p_l$ دنباله ای از l چند جمله ای با درجه کمتراز k باشد.آنگاه چند جمله ای تکه ای ازدرجه k رابصورت زیر تعریف می کنیم:

$$f(x) := p_i(x) \qquad \xi_i < x < \xi_{i+1}; \quad i = 1,\ldots,l$$

نقاط ξ_i رانقاط شکستگی f نامیده می شوند.

۱-۳حل عددی معادلات دیفرانسیل:

معادلات دیفرانسیل یکی از مباحث مهم ریاضیات است ،که کاربرد فراوانی نیز در سایرعلوم فنی ومهندسی دارد .نظریه معادلات دیفرانسیل شامل وجود جواب ویکتایی جواب وتجزیه وتحلیل معادلات دیفرانسیل ویادگیری فنون وروشهای تحلیلی برای به دست آوردن جواب می باشد.این کاربادسته بندی معادلات انجام می گیردونشان داده می شود که دسته خاصی ازمعادلات رامی توان به روش تحلیلی حل کرد .اما، دسته زیادی از معادلات دیفرانسیل فراوانی وجود دارند که نمی توان به روش تحلیلی حل کردو جواب آنها را به دست آورد.حتی گاهی اوقات ،بعضی معادلات دیفرانسیل ساده جوابی بسیار پیچیده دارند.به عنوان مثال جواب

$$y' = \frac{x+y}{x-y} \qquad ,y(1)=0$$

که پس از محاسبات زیادی به دست می آید ،عبارت است از:

$$\log_e^{(x^2+y^2)} = 2arctg(\frac{y}{x})$$

که اگربخواهید به ازای مقدار مفروضی از x مقدار y را به دست آورید،به زحمت خواهید افتاد.از این رو ،استفاده از روشهای عددی ، حتی درمواردی که جواب تحلیلی موجود است ،توصیه می شود.

۱-٤تابع اسپلاین :کلمه "تابع اسپلاین" ازطرح ابتدایی آن مشتق شده است وآن عبارت است از یک تکه چوب یا فلزنازک بسیاربلند که به هر شکل دلخواه ومورد نظردرمی ایدبطوریکه از آن می توان یک منحنی هموار درست کرد.

توابع قطعه ای [۱]چند جمله ای [۲]به ویژه توابع اسپلاین[۳]، بسیار مشهور هستند.تعریف اسپلاین ابتدا در سال **۱۹۴۶**درمقاله معروف شوئنبرگ[۴] ارائه شده است.از آن زمان تا کنون بطور قابل ملاحظه ای در زمینه های تئوری و کاربردی مورد توجه محققان قرار دارد.کاربرد توابع اسپلاین به مثابه تقریب زدن[۵]، درون یابی کردن وبرازش کردن منحنی بسیار موفقیت آمیزمی باشد.بطور اخص اسپلاین درجه سه[۶] دارای نقش مهمی در تحقیقات کاربردی است، زیرا سهولت در محاسبات ،همواری در درون یابی[۷] ،همگرایی[۸] سریع در تقریب و دارای خواص نرم[۹] حداقل می باشد.دراین تحقیق نشان خواهیم داداسپلاین یک وسیله کارا برای تقریب ودرون یابی است.از حدود سال **۱۹۶۰**توابع قطعه ای چند جمله ای به خصوص توابع اسپلاین به سرعت عمومیت پیدا کرده است. در این فصل ابتدا تعریف کلی توابع اسپلاین را ارائه می دهیم سپس اسپلاین درجه شش را مورد بحث قرار خواهیم داد.

تعریف(۱-٤-۱): فرض کنید که:

$$\Delta : a = x_{۰} < x_{۱} < x_{۲} < \ldots < x_n = b$$

یک زیرتقسیم ازفاصله $[a,b]$باشد. یک تابع اسپلاین ازدرجه m با نقاط گره ای $x_{۰}, x_{۱},.., x_n$، یک تابع نظیر $s_{\Delta}(x)$ با خواص زیر است:

۱- درهر زیر $\left[x_i, x_{i+۱}\right]$و $۰ < i < n$، $s_{\Delta}(x)$ یک چند جمله ای درجه mام است.

۲- $s_{\Delta}(x)$و $(m-۱)$ مشتق آن در فاصله $[a,b]$ پیوسته هستند.

---

۱ -Piecewise function
۲ -Polynomial
۳ -Spline
٤ -Schoenberg
٥ -Approximate(approximation)
٦ -Cubic spline
۷ -Interpolation
۸ -Convergence
۹ -Norm

اگرتابع $s_{\Delta}(x)$ فقط $(m-k)$ مشتق پیوسته داشته باشد.آنگاه k رادقت تعریف می کنیم ومعمولا"تابع رابصورت $s_{\Delta}(m,k)$ نمایش میدهند.

بنابراین تابع اسپلاین، یک تابع چند جمله ای تکه ای است که درشرایط فوق صدق می کند.بطورکلی $s(x)$ درمحل برخوردبازه های $(x_{i-1},x_i),(x_i,x_{i+1})$ با چند جمله ایهای متفاوت داده می شود ودر بسیاری از حالات خاص $s(x)$ تنها با یک چند جمله ای روی کل محور حقیقی تعریف می شود. توجه داریم که بر عکس یک چند جمله ای درون یاب، درجه ی اسپلاین ها با افزایش تعداد نقاط زیاد نمی شود. ودر ا ین حالت درجه ثابت می ماند وتعداد تکه ها را افزایش می دهیم .

مزیت توابع اسپلاین : چند جمله ایها اساسا"به دلیل خواص ریاضی ساده شان در بسیاری از جاها برای تقریب توابع دیگرمورد استفاده قرار می گیرند .بدیهی است که چند جمله ایهای از درجه بالا زیاد نوسان می کنند ودر بسیاری ازموارد تقریبهای ضعیفی به وجود می آورند .با انتخاب یک اسپلاین ازدرجه پایین ،تابعی بدست می آوریم که تاحد ممکن هموار باشد،به این معنا که بدون آنکه درحالت کلی یک چند جمله ای باشد ،دارای بیشترین پیوستگی باشد.

قضیه مینیمم نرم ۱-٤-۱: شبکه $\Delta: a=x_1<x_2<\ldots<x_N=b$ و تابع $f(x)$ رابربازه $[a,b]$ درنظر بگیرید ، $f(x)$ تابعی دلخواه است و n-1 مشتق اولیه آن در a,b موجودمی باشد.آنگاه ،برای همه ی توابعی چون $g(x)\in k^n(a,b)$ که $f(x)$ را بر Δ، درون یابی می کند ، اسپلاین $S_{\Delta}(f;x)$ از نوع " II ،انتگرال $\int_a^b \{g^{(n)}(x)\}^2 dx$ را مینیمم می کند.اثبات این قضیه در مرجع [۲]می باشد.

قضیه ۱-٤-۲: هر اسپلاین از درجه n با گره های $x_1<x_2<\ldots\ldots<x_k$ ،دارای نمایشی به صورت زیر می باشد:

$$s(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i+\sum_{i=0}^{n} c_i (x-x_i)_+^n$$

که در آن

$$(x-x_i)_+^n=(x-x_i)^n \qquad x\geq x_i$$
$$(x-x_i)_+^n=0 \qquad x<x_i$$

اثبات: درهر بازه (x_i,x_{i+1}) و $i=0,1,2,\ldots,k$ که $x_0=-\infty$ و $x_{k+1}=\infty$ و $s(x)$ یک چند جمله ای از درجه n

می باشد.فرض کنید

$$s(x) = p_i(x) \qquad x \in [x_i, x_{i+1}) \qquad i = ۰,۱,...,k$$

که هر $p_i(x)$،یک چند جمله ای ازدرجه n است.

فرض کنید $p_۰(x) = \sum_{i=۰}^{n} a_i x^i$. چون $s(x) \in C^{n-۱}$، لذا خواهیم داشت :

$$p_۰^{(r)}(x_۱) = p_۱^{(r)}(x_۱) \qquad r = ۰,۱,۲,..,n-۱$$

این رابطه نتیجه می دهد که

$$p_۱(x) = p_۰(x) + c_۱(x - x_۱)^n$$

وبطور مشابه ،داریم :

$$p_۱^{(r)}(x_۲) = p_۲^{(r)}(x_۱) \qquad r = ۰,۱,۲,..,n-۱$$

از این رابطه خواهیم داشت :

$$p_۲(x) = p_۱(x) + c_۲(x - x_۲)^n$$

و بطورکلی رابطه

$$p_{i-۱}^{(r)}(x_i) = p_i^{(r)}(x_i) \qquad r = ۰,۱,۲,..,n-۱$$

نتیجه می دهد که

$$p_i(x) = p_{i-۱}(x) + c_i(x - x_i)^n \qquad i = ۱,۲,..,k$$

قضیه ۱-٤-۳: تابع درونیاب اسپلاین های چند جمله ای متناوب ازدرجه فرد کمتراز N بریک شبکه یکنواخت همیشه موجود است و اسپلاین های چند جمله ای غیر متناوب ازدرجه زوج کمتریامساوی N وجود دارد اگر N بر بازه های شبکه، فرد باشد، موجود است. اثبات این قضیه در مرجع [۲]می باشد.

قضیه ۱-٤-٤(سری نویمان):

هرگاه W ماتریسی N بعدی باشدبطوریکه $\|W\| < ۱$ دراین صورت $I - W$ وارون پذیر است وداریم:

$$(I - W)^{-۱} = \sum_{k=۰}^{\infty} W^K$$

اثبات:فرض می کنیم $I-W$ وارون پذیر نباشددرنتیجه($\exists x\neq 0$) بطوریکه $(I-W)x=0$ و فرض کنید $\|x\|=1$

$$(I-W)x=0 \Rightarrow Ix-Wx=0 \Rightarrow x=Wx$$

$$1=\|x\|=\|Wx\|\leq\|W\|\|x\|\leq\|W\|\Rightarrow\|W\|>1$$

به تناقض می رسیم پس $I-W$ وارون پذیر است.

برای اثبات قسمت دوم نشان می دهیم که دنباله های جزیی $s_n=\sum_{k=0}^{n}W^k$ به $(I-W)^{-1}$ همگراست.

$$(I-W)s_n=(I-W)\sum_{k=0}^{n}W^k=(I-W)(I+W+W^2+W^3+\ldots+W^n)=I-W^{n+1}$$

اگر از طرفین حد بگیریم داریم: $\lim_{n\to\infty}(I-W)s_n=\lim_{n\to\infty}(I-W^{n+1})=I$

نتیجه می گیریم که:

$$\|(I-W)^{-1}\|\leq\sum_{k=0}^{\infty}\|W^k\|\leq\sum_{k=0}^{\infty}\|W\|^k\leq\frac{1}{1-\|W\|}$$

۱- ۵ کاربرد معادلات مرتبه پنجم درمدل سازی ریاضی سیالات ویزکو الاستیک: [۴,۵]

اخیرا" تحقیقات زیادی دربررسی وشبیه سازی عددی مدل سازی ریاضی سیالات ویزکوالاستیک[1] بامعادلات دیفرانسیل پیوسته ازنوع $Oldroyd-Maxwell$ انجام گرفته است.برای بررسی سیالات تراکم ناپذیر[2] ،این مدلها ارتباط بالایی با دستگاههای دیفرانسیل جزئی شبه خطی از نوع نیمی بیضوی،نیمی هیپربولیک[3] دارد. تقریبا"تمام سیالات ویزکوالاستیک غیر بدیهی با چنین مدلهایی بررسی می گردند،که دارای شیب زیادی درسرعت وفشاروجنبش هستند که بحث کردن به وسیله تفاضلات متناهی[4]وعناصر متناهی[5] را مشکل می سازد.یا به عبارت دیگر روشهای تفاضلی متعارف رابا مشکل مواجه می سازد.همینطور پارامتر

[1] Viscoelastic flows
[2] Incompresshble flows
[3] Hyperbolic-elliptic
[4] Finite difference
[5] Finite elements

کشسانی، که در این مدل معادلات وجود داردباعث افزایش اختلال ساختگی[۱] یا نقاط حدی می شود، که به انتخاب فاصله بندی وتوابع آزمون[۲] وفرمول بندی مسئله بستگی دارندوافزایش وانباشتگی خطا رابه همراه دارد.

در یک فرمول بندی عناصر متناهی ترکیبی ، مارشال وکروچت[۳] نشان دادند که حضور نقاط حدی ساختگی می توانندنسبت به یک حد قطعی، از مقادیر بزرگتر پارامتر کشسانی، در صورت استفاده از توابع آزمونی مرتبه بالا اجتناب کنند. این نظریه رابا استفاده از توابع آزمونی کلی مرتبه خیلی بالا با فرمول بندی گالرکین طیفی[۴] پیش می بریم.

برای این منظور مسئله یک بعدی(مسئله مقدار مرزی دو نقطه ای غیر خطی مرتبه پنجم):

$$(۱+\varepsilon \frac{du}{dx}\frac{d}{dx})\frac{d^۴u}{dx^۴} = f \qquad (۱)$$

که $u=u(x),\ f = f(\varepsilon;x)$ بربازه $-\frac{۱}{۲} < X < \frac{۱}{۲}$ تعریف شده اند و u درشرایط مرزی

$$u(\pm\frac{۱}{۲}) = \frac{du}{dx}(\pm\frac{۱}{۲}) = ۰ \qquad (۲)$$

$$\frac{d^۲u}{dx^۲}(-\frac{۱}{۲}) = c \qquad (۳)$$

صدق می کندو ε و c به ترتیب پارامتر کشسانی و مرز جنبش[۵] هستند، درنظر گرفته شده است.معادلات (۲)شرایط مرزی غیرلایه رانشان می دهند.درمرجع [۴] روش های گالرکین طیفی برای حل مسئله (۱)-(۳)بحث شده اند.دو مجموعه توابع آزمونی متعامد مقایسه شده آند، یکی، توابع بیم[۶] که توابع فرد از عملگر دیفرانسیل مرتبه چهارم است که در (۱) ودر شرایط مرزی وابسته(۲) صدق می کندودیگری چند جمله ایهای چبیچف[۷] هستند.جزئیات این عملیات برای مسائل خطی مرتبه چهارم درمرجع های [۶]و [۷] یافت می شوند.معادلات جبری خطی-غیر خطی مختلط برای تعیین ضرایب مبتنی بر توابع بیم-گالرکین به آسانی فرمول بندی می گردد .زیرا که انتگرال های حاصله به صورت تحلیلی قابل حل هستند وبه آسانی می توان

---

۱ Spurious bifurcation
۲ Trial function
۳ Marchal &Crochet
٤ Spectral Galerkin formulation
٥ Boundary stress
٦ Beam function
۷ Chebyshev polynomials

دستگاه حاصله رابرای مثالهای عددی مورد مطالعه، وقتی که پارامتر εبسیار کوچک باشد ،محاسبه کرد.همان اندازه که سطح غیرخطی[۱] افزایش می یابد، مشکل افزایش می یابد وسرانجام یافتن ریشه های دستگاههای جبری با استفاده ازروشهای غیرخطی استاندارد وقتی که عملیاتی کامل از حل مسئله ابتدایی برحسب توابع بیم وجودداردغیرممکن می شود.درطرف دیگردر تقریب چبیچف- گالرکین معادلات جبری ترکیبی برای بسط ضرایب مشکلات بسیار بیشتری برای فرموله کردن دارند زیرا از روابط برگشتی مرتبه بالا برای نمایش مشتقات چند جمله ایهای چبیچف استفاده می شود.پیدا کردن یک ژاکوبین [۲]دقیق برای حل دستگاههای غیرخطی کسل کننده است .با وجود این روش محاسباتی بر اساس روش چبیچف جالب است.در حالتی که $۱۰^{۳} > \varepsilon > ۱۰^{-۳}$ باشد یافتن ریشه های معادلات جبری برای تعیین ضرایب بدون مشکل خواهد بود . درمرجع [۴] روش طیفی[۳] رابا یک مجموعه متفاوت یعنی توابع دیراک[۴] امتحان کرده است ونشان داده است که (۱)به طور دقیق در یک مجموعه انتخاب شده از نقاط هم محلی[۵] صدق می کند . دستگاه غیرخطی از معادلات جبری برای تعیین ضرایب در روش طیفی افزایش می یابد.نتایج عددی دراین دو مرجع [۴]و[۵] نشان می دهد که روش چبیچف- هم محلی[۶] تقریب بهتری برای مسئله (۱) درمقایسه با تقریب روش چبیچف- گالرکین[۷] می باشد.

---

[۱] Level of non-linearity
[۲] Jacobian
[۳] Spectral representation
[۴] Translated Dirac delta function
[۵] Collocation point
[۶] Chebyshev-collocation
[۷] Chebyshev-Galerkin

فصل دوم:

۲-۱مقدمه:

در این فصل به کاربرد اسپلاین درجه ششم چند جمله ای برای حل مسئله مقدار مرزی مرتبه پنجم

$$y^{(v)} = g(x)y + q(x) \qquad (۱-۲)$$

با شرایط مرزی

$$y(a) = A_0, y'(a) = A_1, y''(a) = A_2, y(b) = B_0, y'(b) = B_1$$

که در آن A_0, A_1, A_2, B_0, B_1 و a,b مقادیر حقیقی وثابت وتوابع $g(x)$ و $q(x)$،توابعی پیوسته بر بازه $[a,b]$هستند، می پردازیم. در ابتدا فرمول بندی اسپلاین درجه ششم چند جمله ای وسپس مدل سازی مسئله ، بررسی خطای آن وحل مسئله بیان شده است.درآخر ماکزیمم خطا با روشهای ارائه شده توسط $Khan$ [۱۱]و $Fyfe$ [۹]بااستفاده از توابع اسپلاین چندجمله ای درجه دوم و $Ca\lg ar$ [۱۰]با توابع B -اسپلاین درجه شش مقایسه گردیده است.

این گونه مسائل در مدل سازی ریاضی[۱] سیالات ویز کوالاستیک کاربرد دارند.

در [۴,۵]دو الگوریتم عددی مبتنی بر روش های گالرکین وهم محلی طیفی بطور مجزا جهت بدست آوردن جواب عددی این گونه مسائل ارائه گردیده است. اما در این فصل ما به بررسی اسپلاین درجه ششم وکاربرد آن برای مسئله (۲-۱) می پردازیم.

[۱] Modeling

۲-۲ اسپلاین :

ریاضی دانان تلاش می کنند روشی برای حل مسائل ارائه دهند که دقت را افزایش داده وخطا را کاهش دهند یعنی برای حل مسائلی که جواب واقعی ندارند یک جواب تقریبی با بیشترین دقت وکمترین خطا رابه دست آورند.یکی از مشکلات درون یابی با استفاده از چند جمله ای با درجه بالا نوسان آنهاست. این نوسان ممکن است باعث دور شدن چند جمله ای درون یاب از تابع درون یابی شده در بازه مورد نظر شود. یکی از راههای حل این مشکلات عبارت است از تقسیم بازه درون یابی به چند زیر بازه و سپس تشکیل چند جمله ایهای تقریب با درجه پایین روی هریک اززیر بازه ها، این نوع تقریب را درون یابی تکه ای چند جمله ای می گویند.اغلب پدیده های علمی و مهندسی با انتقال از یک محیط فیزیکی به یک محیط دیگر اندازه گیری می شوند . داده های بدست امده از این اندازه گیری راتابع تکه ای پیوسته بهتر می توان نمایش داد.

۲-۳تابع اسپلاین درجه شش چند جمله ای:

تعریف۲-۳-۱: یک تابع اسپلاین درجه شش $s_\Delta(x)$ که تابع $y(x)$ رادرنقاط افرازشده دربازه $[a,b]$ $\Delta:\{a=x_۰<x_۱<\ldots<x_{n+۱}=b\}$ درونیابی می کند بصورت زیر تعریف می شود:

(۱) برهر بازه $[x_i,x_{i+۱}]$ یک چند جمله ای حداکثر درجه شش است

(۲) مشتقات مرتبه اول تا پنجم آن بر $[a,b]$ پیوسته است

(۳) $S_\Delta(x_i)=y(x_i)$ ، $i=۰,۱,\ldots,N$

تابع $S_\Delta(x)$ را بر $x\in[x_i,x_{i+۱}]$ تعریف می کنیم

$$\begin{aligned}S_\Delta(x)&=a_i(x-x_i)^۶+b_i(x-x_i)^۵+c_i(x-x_i)^۴+d_i(x-x_i)^۳\\&+e_i(x-x_i)^۲+f_i(x-x_i)+g_i \qquad i=۰,۱,\ldots,N+۱\end{aligned} \qquad (۲-۲)$$

که $a_i,b_i,c_i,d_i,e_i,f_i,g_i$ ضرایب حقیقی متناهی و k پارامتر آزاد است.

ما بایستی مقادیر ضرایب را تعیین نماییم وبه همین منظورشرایط زیر را تعریف می کنیم :

$$p_i(x_i) = y_i \qquad , p_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \qquad , p'_i(x_i) = z_i \qquad , p'_i(x_{i+1}) = z_{i+1}$$
$$p''_i(x_i) = M_i \qquad , p_i^{v}(x_i) = s_i \qquad , \ p_i^{v}(x_{i+1}) = s_{i+1}$$

در نتیجه برای محاسبه ضرایب خواهیم داشت :

$$p_i(x_i) = g_i$$
$$p_i(x_i) = y_i \Rightarrow g_i = y_i$$
$$p_i(x_{i+1}) = a_i(x_{i+1} - x_i)^6 + b_i(x_{i+1} - x_i)^5 + c_i(x_{i+1} - x_i)^4 +$$
$$d_i(x_{i+1} - x_i)^3 + e_i(x_{i+1} - x_i)^2 + f_i(x_{i+1} - x_i) + g_i = y_{i+1}$$
$$y_{i+1} = a_i h^6 + b_i h^5 + c_i h^4 + d_i h^3 + e_i h^2 + f_i h + g_i \qquad (1)$$
$$p'_i(x_i) = 6a_i(x - x_i)^5 + 5b_i(x - x_i)^4 + 4c_i(x - x_i)^3 + 3d_i(x - x_i)^2 + 2e_i(x - x_i) + f_i$$

$$p'_i(x_i) = f_i \Rightarrow f_i = z_i$$

$$p'_i(x_{i+1}) = 6a_i h^5 + 5b_i h^4 + 4c_i h^3 + 3d_i h^2 + 2e_i h + f_i \ , \ p'_i(x_{i+1}) = z_{i+1}$$

$$6a_i h^5 + 5b_i h^4 + 4c_i h^3 + 3d_i h^2 + 2e_i h + f_i = z_{i+1} \qquad (2)$$

$$p'''_i(x) = 30a_i(x - x_i)^4 + 20b_i(x - x_i)^3 + 12c_i(x - x_i)^2 + 6d_i(x - x_i) + 2e_i$$
$$p'''_i(x_i) = 2e_i , p'''_i(x_i) = M_i \Rightarrow e_i = \frac{M_i}{2}$$
$$p^{v}_i(x) = 720a_i(x - x_i) + 120b_i , p^{v}_i(x_i) = s_i \Rightarrow b_i = \frac{s_i}{120}$$
$$p^{v}_i(x_{i+1}) = 720a_i(x_{i+1} - x_i) + 120b_i , p^{v}_i(x_{i+1}) = s_{i+1} \Rightarrow a_i = \frac{(s_{i+1} - s_i)}{720h}$$

با قرار دادن معلومات در رابطه (۲)مقدار c_i به دست می آید .

$$c_i = \frac{-(-3s_i h^5 + h^5 s_{i+1} - 120M_i h^2 - 480z_i h - 240hz_{i+1} - 720y_i + 720y_{i+1})}{240h^3}$$

با قرار دادن معلومات در رابطه (۱)مقدار d_i به دست می آید .

$$d_i = \frac{(2s_i h^5 + h^5 s_{i+1} - 360M_i h^2 - 1080z_i h - 360hz_{i+1} - 1440y_i + 1440y_{i+1})}{360h^3}$$

با استفاده از پیوستگی مشتقات دوم و سوم و چهارم در نقطه $x = x_i$ ما روابط زیر را به دست می آوریم:

$$P_{i-1}^{(n)}(x_i) = P_i^{(n)}(x_i)$$
$$i = ۲,۳,۴$$

از پیوستگی مشتق دوم داریم:

$$P_{i-1}''(x_i) = P_i''(x_i) \Rightarrow ۳۰a_{i-1}(x_i - x_{i-1})^۴ + ۲۰b_{i-1}(x_i - x_{i-1})^۳$$
$$+۱۲c_{i-1}(x_i - x_{i-1})^۲ + ۶d_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + ۲e_{i-1} = ۳۰a_i(x_i - x_i)^۴ + ۲۰b_i(x_i - x_i)^۳$$
$$+۱۲c_i(x_i - x_i)^۲ + ۶d_i(x_i - x_i) + ۲e_i \Rightarrow ۳۰a_{i-1}h^۴ + ۲۰b_{i-1}h^۳ + ۱۲c_{i-1}h^۲ +$$
$$۶d_{i-1}h + ۲e_{i-1} - ۲e_i = ۰ \qquad \frac{(s_i - s_{i-1})h^۳}{۲۴} + \frac{s_{i-1}h^۳}{۶} + M_{i-1} - M_i$$
$$\frac{(۳s_{i-1}h^۵ - h^۵ s_i + ۱۲۰M_{i-1}h^۲ + ۴۸۰z_{i-1}h + ۲۴۰hz_i + ۱۲۰y_{i-1} - ۷۲۰y_i)}{۲۰h^۲} +$$
$$\frac{(۲s_{i-1}h^۵ + h^۵ s_i - ۳۶۰M_{i-1}h^۲ - ۱۰۸۰z_{i-1}h - ۳۶۰hz_i - ۱۴۴۰y_{i-1} + ۱۴۴۰y_i)}{۶۰h^۳} = ۰$$

نهایتا"داریم:

$$\frac{h^۳}{۱۲۰}(s_{i-1} + s_i) + (M_{i-1} - M_i) + \frac{۶}{h}(z_i + z_{i-1}) + \frac{۱۲}{h^۲}(y_{i-1} - y_i) = ۰ \qquad (۳-۲)$$

از پیوستگی مشتق سوم رابطه ذیل را خواهیم داشت:

$$P_{i-1}^{(۳)}(x_i) = P_i^{(۳)}(x_i) \Rightarrow ۱۲۰a_{i-1}(x_i - x_{i-1})^۳ + ۶۰b_{i-1}(x_i - x_{i-1})^۲ + ۲۴c_{i-1}(x_i - x_{i-1})$$
$$+۶d_{i-1} = ۳۰a_i(x_i - x_i)^۳ + ۶۰b_i(x_i - x_i)^۲ + ۲۴c_i(x_i - x_i) + ۶d_i \Rightarrow$$
$$۱۲۰a_{i-1}h^۳ + ۶۰b_{i-1}h^۲ + ۲۴c_{i-1}h + ۶d_{i-1} - ۶d_i = ۰ \Rightarrow \frac{(s_i - s_{i-1})h^۲}{۶} + \frac{s_{i-1}h^۲}{۲} +$$
$$\frac{(-۳s_{i-1}h^۵ - h^۵ s_i + ۱۲۰M_{i-1}h^۲ + ۴۸۰z_{i-1}h + ۲۴۰hz_i + ۱۲۰y_{i-1} - ۷۲۰y_i)}{۱۰h^۲}$$
$$\frac{+(۲s_{i-1}h^۵ + h^۵ s_i - ۳۶۰M_{i-1}h^۲ - ۱۰۸۰z_{i-1}h - ۳۶۰hz_i - ۱۴۴۰y_{i-1} + ۱۴۴۰y_i)}{۶۰h^۳} -$$

$$\frac{(۲s_ih^{۵}+h^{۵}s_{i+۱}-۳۶۰M_ih^{۲}-۱۰۸۰z_ih-۳۶۰hz_{i+۱}-۱۴۴۰y_i+۱۴۴۰y_{i+۱})}{۶۰h^{۳}}=۰$$

$$\frac{s_ih^{۲}}{۶}-\frac{s_{i-۱}h^{۲}}{۶}+\frac{s_{i-۱}h^{۲}}{۲}-\frac{۳s_{i-۱}h^{۳}}{۱۰}-\frac{h^{۳}s_i}{۱۰}+۱۲M_{i-۱}+\frac{۴۸z_{i-۱}}{h}+$$

$$\frac{۲۴z_i}{h}+\frac{۱۲y_{i-۱}}{h^{۲}}\frac{-۷۲y_i}{h^{۲}}+\frac{s_{i-۱}h^{۲}}{۳۰}+\frac{h^{۲}s_i}{۶۰}-\frac{۶M_{i-۱}}{h}-\frac{۱۸z_{i-۱}}{h^{۲}}-\frac{۶z_i}{h^{۲}}$$

$$-\frac{۲۴y_{i-۱}}{h^{۳}}+\frac{۲۴y_i}{h^{۳}}\frac{-s_ih^{۲}}{۳۰}+\frac{h^{۲}s_{i+۱}}{۶۰}-\frac{۶M_i}{h}\frac{-۱۸z_i}{h^{۲}}-\frac{۶z_{i+۱}}{h^{۲}}-\frac{۲۴y_i}{h^{۳}}+\frac{۲۴y_{i+۱}}{h^{۳}}=۰$$

بنابراین داریم:

$$\frac{h^{۲}}{۶۰}(۴s_{i-۱}+۳s_i-s_{i+۱})+\frac{۶}{h}(M_{i-۱}+M_{i+۱})$$
$$+\frac{۶}{h^{۲}}(۵z_{i-۱}+z_{i+۲})+\frac{۲۴}{h^{۳}}(۲y_{i-۱}-y_i-y_{i+۱})=۰ \qquad (۴-۲)$$

از پیوستگی مشتق چهارم رابطه ذیل را خواهیم داشت:

$$P_{i-۱}^{(۴)}(x_i)=P_i^{(۴)}(x_i)\Rightarrow ۳۶۰a_{i-۱}(x_i-x_{i-۱})^{۲}+۱۲۰b_{i-۱}(x_i-x_{i-۱})+۲۴c_{i-۱}=$$

$$۳۶۰a_i(x_i-x_i)^{۲}+۱۲۰b_i(x_i-x_i)+۲۴c_i\Rightarrow ۳۶۰a_{i-۱}h^{۲}+۱۲۰b_{i-۱}h^{۲}$$

$$+۲۴c_{i-۱}-۲۴c_i=۰ \qquad ۳۶۰\frac{(s_i-s_{i-۱})}{۷۲۰h}+s_{i-۱}h+$$

$$\frac{(-۳s_{i-۱}h^{۵}-h^{۵}s_i+۱۲۰M_{i-۱}h^{۲}+۴۸۰z_{i-۱}h+۲۴۰hz_i+۷۲۰y_{i-۱}-۷۲۰y_i)}{۱۰h^{۴}}$$

$$\frac{-(-۳s_ih^{۵}-h^{۵}s_{i-۱}+۱۲۰M_ih^{۲}+۴۸۰z_ih+۲۴۰hz_{i+۱}+۷۲۰y_i-۷۲۰y_{i+۱})}{۱۰h^{۴}}=۰$$

$$\frac{-s_{i-۱}h}{۲}+\frac{s_ih^{۲}}{۲}+s_{i-۱}h-\frac{۳s_{i-۱}h}{۱۰}-\frac{hs_i}{۱۰}+\frac{۱۲M_{i-۱}}{h^{۲}}+\frac{۴۸z_{i-۱}}{h^{۳}}+\frac{۲۴z_i}{h^{۳}}+\frac{۷۲y_{i-۱}}{h^{۴}}$$
$$-\frac{۷۲y_i}{h^{۴}}+\frac{۳s_ih}{۱۰}+\frac{hs_{i+۱}}{۱۰}-\frac{۱۲M_i}{h^{۲}}-\frac{۴۸z_i}{h^{۳}}-\frac{۲۴z_{i+۱}}{h^{۳}}-\frac{۷۲y_i}{۱۰h^{۴}}+\frac{۷۲y_{i+۱}}{h^{۴}}=۰$$

پس ازساده کردن نتیجه می گیریم که:

$$h^5(7s_i+2s_{i-1}+s_{i+1})+12h^2(M_{i-1}-10M_i)+240h(2z_{i-1}-z_i-z_{i+1})$$
$$+120(y_{i-1}-12y_i+6y_{i+1})=0 \tag{5-2}$$

با تبدیل i به $i-2$ و $i-1$ و $i+1$ درمعادلات(۲-۳)و(۲-۴)و(۲-۵)معادلات زیر راخواهیم داشت:

$$\frac{h^3}{120}(s_{i-3}+s_{i-2})+\frac{6}{h}(z_{i-3}+z_{i-2})+\frac{12}{h^2}(y_{i-3}-y_{i-2})+(-M_{i-2}+M_{i-3})=0 \tag{6-2}$$

$$\frac{h^3}{120}(s_{i-2}+s_{i-1})+\frac{6}{h}(z_{i-2}+z_{i-1})+\frac{12}{h^2}(y_{i-2}-y_{i-1})+(-M_{i-1}+M_{i-2})=0 \tag{7-2}$$

$$\frac{h^3}{120}(s_i+s_{i+1})+\frac{6}{h}(z_i+z_{i+1})+\frac{12}{h^2}(y_i-y_{i+1})+(-M_{i+1}+M_i)=0 \tag{8-2}$$

$$\frac{h^2}{60}(4s_{i-3}+3s_{i-2}-s_{i-1})+\frac{6}{h}(M_{i-3}+M_{i-1})+\frac{6}{h^2}(5z_{i-3}+z_i)$$
$$+\frac{24}{h^3}(2y_{i-3}-y_{i-2}-y_{i-1})=0 \tag{9-2}$$

$$\frac{h^2}{60}(4s_{i-2}+3s_{i-1}-s_i)+\frac{6}{h}(M_{i-2}+M_i)+\frac{6}{h^2}(5z_{i-2}+z_{i+1})+\frac{24}{h^3}(2y_{i-2}-y_{i-1}-y_i)=0 \tag{10-2}$$

$$\frac{h^2}{60}(4s_i+3s_{i+1}-s_{i+2})+\frac{6}{h}(M_i+M_{i+2})+\frac{6}{h^2}(5z_i+z_{i+3})+\frac{24}{h^3}(2y_i-y_{i+1}-y_{i+2})=0 \tag{11-2}$$

$$h^5(7s_{i-2}+2s_{i-3}+s_{i-1})+12h^2(M_{i-3}-10M_{i-2})+240h(2z_{i-3}-z_{i-2}-z_{i-1})$$
$$+120(y_{i-3}-12y_{i-2}+6y_{i-1})=0 \tag{12-2}$$

$$h^5(7s_{i-1}+2s_{i-2}+s_i)+12h^2(M_{i-2}-10M_{i-1})+240h(2z_{i-2}-z_{i-1}-z_i)$$
$$+120(y_{i-2}-12y_{i-1}+6y_i)=0 \tag{13-2}$$

$$h^5(7s_{i+1}+2s_i+s_{i+2})+12h^2(M_i-10M_{i+1})+240h(2z_i-z_{i+1}-z_{i+2})$$
$$+120(y_i-12y_{i+1}+6y_{i+2})=0 \tag{14-2}$$