بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام‌نور

مرکز مشهد

گروه ریاضی

عنوان پایان‌نامه

پوشش‌های یکدست گرنشتاین برای مدولهایی با حلقهٔ زمینهٔ گرنشتاین

پایان‌نامه

برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد

در رشتهٔ ریاضی محض گرایش جبر

استاد راهنما

جناب آقای دکتر کاظم خشیارمنش

مؤلف

ابراهیم زنگویی‌زاده

شهریور ۸۴

تقدیم به روح پاک مادرم ،

همت والای پدرم ،

و تقدیم به او که بودن را به من آموخت

جمهوری اسلامی ایران

وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور

تاریخ: ....

شماره: ....

پیوست: ....

بسمه تعالی

تصویب نامه پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان: پوشش های همبند گسسته برای مدول های با حلقه زمینه ی گسسته

که توسط آقای ابراهیم زنگولی زاده تهیه و به هیئت داوران ارائه گردیده است مورد تائید می باشد.

تاریخ دفاع: ۱۶/۶/۸۴ نمره: ۱۹/۵ نوزده و نیم درجه ارزشیابی: عالی

اعضای هیئت داوران :

نام و نام خانوادگی	هیئت داوران	مرتبه علمی	امضاء
دکتر کاظم هشیار خسروی	استاد راهنما	دانشیار	
—	استاد راهنمای همکار یا مشاور		
دکتر محمود یاسی	استاد ممتحن	استادیار	
دکتر علی جلیلیان عطار	نماینده گروه آموزشی	استادیار	

سپاس

سپاس خداوند متعال را که موهبت بودن به من ارزانی داشت و با یاد او که ارزش بودن را به من فهماند.

پاکترین احساسات برای روح پاک مادرم که در زمان حیات وجودش و هم اکنون یادش تکیه‌گاه من برای بهتر بودن است.

عمیق‌ترین بندگی از جانب من برای پدرم که براستی والاترین همت و غیرت را به پای من ریخت.

مراتب امتنان و قدردانی از جناب آقای دکتر کاظم خشیارمنش که با راهنمایی‌های بی‌شائبهٔ خود در زمینهٔ این پایان‌نامه در معنای واقعی برای من مرید و راهنما بودند.

نهایت تقدیر از جناب آقای دکتر محمود یاسی که زحمت داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند و سرکار خانم دکتر ثریا طالبی و آقای دکتر علی جلیلیان که قبول زحمت فرموده، بعنوان ناظر در جلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ بنده حضور داشتند.

کمال تشکر از دوستان عزیزم آقایان جعفر چاوشان و سید حامد عظیمی که در تایپ، تنظیم و ارائـــهٔ این پایان‌نامه کمال همکاری را داشته‌اند.

چکیدهٔ پایان‌نامه

در ایـن مقالـه با ارائـهٔ تعریف حلقه‌های گرنشتاین با مدولهای یکدست گرنشتاین، تصویری گرنشـتاین و انژکتـیو گرنشتاین آشنا خواهیم شد. این مدولها در واقع به ترتیب تعمیمی از مدولهای یکدست، تصویری و انژکتیو هستند.

در فصل اول نکات اساسی و مقدمات اولیه برای شروع بحث را ارائـه خواهیم داد.

در فصـل دوم مدولهـای تصویری گرنشتاین را مورد بحث قرار می‌دهیم و مسألهٔ وجود پیش‌پوشش تصـویری گرنشـتاین را بررسـی مـی‌کنـیم. نکـتهٔ قـابل ذکر این است که همواره وجود پیش‌پوشش تصویری گرنشتاین مستلزم وجود پوشش تصویری گرنشتاین نمی‌باشد.

در فصـل سـوم ثابت می‌کنیم که هر مدول روی یک حلقهٔ گرنشتاین یک پوشش یکدست گرنشتاین دارد. ترتیب یافتن این پوشش بدین صورت است که در ابتدا یک پیش‌پوشش تصویری گرنشتاین از مـدول M بدسـت آورده و سـپس بـا داخـل کـردن این نتیجه در نمودار ویژه‌ای که می‌سازیم نتیجهٔ مطلوب را بدست می‌آوریم.

کلمات کلیدی

۱ـ مدولهای یکدست گرنشتاین

۲ـ مدولهای تصویری گرنشتاین

۳ـ مدولهای انژکتیو گرنشتاین

٤ـ پوشش

٥ـ پیش‌پوشش

٦ـ پـوش

۷ـ پیش‌پوش

فهرست مطالب

فصل صفر: مقدمات و پیشنیازها ۱

فصل اول: پوش‌ها و پوشش‌ها ۲۰

فصل دوم: مدول‌های تصویری گرنشتاین ۴۰

فصل سوم: پوشش‌های یکدست گرنشتاین ۶۲

مراجع ۸۲

فهرست علائم ۸۳

واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی ۸۴

واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی ۸۷

فصل صفر: مقدمات و پیشنیازها

۰ـ۱ تعریف: فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یکدار و S زیر مجموعه‌ای از R باشد در اینصورت S را یک مجموعه بسته ضربی می‌نامیم هرگاه $1 \in S$ و اگر a,b اعضای S باشند آنگاه $ab \in S$

۰ـ۲ تعریف: فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یکدار و S یک زیر مجموعه بسته ضربی از آن باشد. رابطه $\sim$ را روی $R \times S$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم
$(r,s) \sim (r',s')$ اگر و تنها اگر $t \in S$ موجود باشد بطوریکه $trs' = tr's$. به سادگی می‌توان دید که$\sim$ روی $R \times S$ یک رابطه هم ارزی است. حال به ازای هر $(r,s) \in R \times S$ کلاس هم‌ارزی $[(r,s)]$ را با نماد r/s نشان داده و تعریف می‌کنیم $S^{-1}R = \{r/s \mid r \in R, s \in S\}$. اگر دو عمل جمع و ضرب را روی $S^{-1}R$ بصورت $r/s \cdot r'/s' = rr'/ss'$ و $r/s + r'/s' = \dfrac{rs' + r's}{ss'}$ در نظر بگیریم مشاهده می‌شود که $S^{-1}R$ با این دو عمل یک حلقه جابجایی و یکدار است که آنرا حلقه کسرهای R نسبت به مجموعه بسته ضربی S می‌نامیم.

۰ـ۳ تعریف: فرض کنید R یک حلقه جابجایی و یکدار، M یک R مدول و S زیر مجموعه بسته ضربی از R باشند. رابطه$\sim$ را روی $M \times S$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم.
$(m,s) \sim (m',s')$ اگر و تنها اگر $t \in S$ موجود باشد بطوریکه $ts'm = tsm'$. براحتی می‌توان نشان داد که$\sim$ یک رابطه هم ارزی روی $M \times S$ است. حال به ازای هر $(m,s) \in M \times S$ کلاس هم ارزی $[(m,s)]$ را با نماد m/s نشان داده و تعریف می‌کنیم $S^{-1}M = \{m/s \mid m \in M, s \in S\}$.
اکنون ملاحظه می‌کنیم که $S^{-1}M$ با جمع و ضرب زیر یک $S^{-1}R$ مدول می‌باشد که آنرا مدول کسرهای M نسبت به S می‌گوئیم

$$m/s + m'/s' = \frac{ms' + m's}{ss'} \quad \text{و} \quad r/s \cdot m/s' = rm/ss'$$

٠ــ٤ تبصره: بنا به تعریف ایده‌آل اول واضح است که اگر P یک ایده‌آل اول از حلقه R باشد، $R-P$ یک مجموعه بسته ضربی است. حال اگر، M یک R مدول باشد و $S=R-P$ آنگاه $S^{-1}M$ را با نماد M_P و $S^{-1}R$ را با نماد R_P نشان می‌دهیم. R_P را موضعی‌سازی R در P می‌نامیم.

٠ــ٥ تعریف: یک کتگوری مانند C تشکیل شده از

١. خانواده‌ای از اشیاء که آن را با نماد $Ob\,(C)$ نشان می‌دهیم.

٢. به ازای هر دو شیء B,A در C یک خانواده از مجموعه‌های از هم جدا که با نماد $Hom(A,B)$ نشان داده می‌شود.

٣. به ازای هر سه شیء C,B,A در C تابعی‌بصورت $Hom(B,C)\times Hom(A,B)\rightarrow Hom(A,C)$، که به ازای هر عضو f از $Hom(A,B)$ و عضو g از $Hom(B,C)$ با ضابطه $(g,f)\mapsto gof$ مشخص می‌شود و در دو اصل شرکت‌پذیری و عضو همانی صدق می‌کند یعنی اگر $f\in Hom(A,B)$، $g\in Hom(B,C)$ و $h\in Hom(C,D)$ آنگاه $ho(gof)=(hog)of$ و به ازای هر شیء A در C عضو 1_A از $Hom(A,A)$ موجود است بطوریکه به ازای هر $f\in Hom(A,B)$ و $g\in Hom(B,A)$ داریم $fo1_A=f$ و $1_A og=g$. 1_A را ریخت همانی می‌نامند.

لازم به ذکر است که عضوهای $Hom(A,B)$ ریخت از A به B نامیده می‌شوند. ضمناً ریخت $f:A\rightarrow B$ یک تعادل نامیده می‌شود در صورتیکه ریخت $g:B\rightarrow A$ موجود باشد بطوریکه $fog=1_B$ و $gof=1_A$

٠ــ٦ تبصره: یکی از کتگوریهای معروف کتگوری R مدولها می‌باشد که در آن اشیاء همان R مدولها هستند و به ازای هر دو R مدول B,A اعضای $Hom(A,B)$، $R-$ همریختی‌هایی از A به B می‌باشند.

تعریف‌ها و قضایای زیر از مرجع [8] گردآوری شده‌اند و در آنها همواره R را یک حلقه فرض می‌کنیم.

۰ــ۷ تعریف: فرض کنیم C و D دو کتگوری باشند. یک فانکتور همورد از C به D ضابطه‌ای مانند F است که در شرایط زیر صدق کند.

۱. اگر A شیئی از C باشد آنگاه FA شیئی از D خواهد بود.

۲. اگر f عضوی از $Hom(A,B)$ در کتگوری C باشد Ff عضوی از $Hom(FA,FB)$ در کتگوری D باشد.

۳. اگر $f \in Hom(A,B)$ و $g \in Hom(B,C)$ ریختیهایی در کتگوری C باشند آنگاه $F(gof) = (Fg)o(Ff)$

٤. برای هر شیء A از کتگوری C اگر 1_A را ریخت همانی از $Hom(A,A)$ در نظر بگیریم آنگاه $F(1_A) = 1_{FA}$

۰ــ۸ تعریف: فرض کنیم C و D دو کتگوری باشند. یک فانکتور پادورد از C به D ضابطه‌ای مانند F است که در شرایط مشابه تعریف بالا صدق می‌کند. با این تفاوت که در شرط دوم باید Ff عضوی از $Hom(FB,FA)$ باشد و در شرط سوم باید داشته باشیم $F(gof) = (Ff)o(Fg)$

۰ــ۹ تعریف: فرض کنیم R یک حلقه و یکدار باشد. اگر A یک R مدول راست، B یک R مدول چپ و G یک گروه آبلی جمعی باشد آنگاه یک تابع R دو خطی تابعی است مانند $f : A \times B \to G$ که به ازای هر $a, a' \in A$ و هر $b, b' \in B$ و هر $r \in R$ در شرایط زیر صدق کند.

۱. $f(a+a',b) = f(a,b) + f(a',b)$

۲. $f(a,b+b') = f(a,b) + f(a,b')$

۳. $f(ar,b) = f(a,rb)$

۰ــ۱۰ تعریف: فرض کنیم A یک R مدول راست و B یک R مدول چپ باشند. حاصلضرب تانسوری از A و B گروهی آبلی با نمایش $A \otimes_R B$ است همراه با یک تابع R دو خطی مانند $h : A \times B \to A \otimes_R B$ بطوریکه به ازای هر گروه آبلی دیگر مانند G و هر تابع R دو خطی مانند $f : A \times B \to G$ همریختی منحصربفرد $f' : A \otimes_R B \to G$ موجود باشد بطوریکه نمودار زیر را بصورت یک نمودار جابجایی کامل کند.

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr] \arrow[dr] & & A \otimes_R B \arrow[dl] \\ & G & \end{tikzcd}$$

۰-۱۱ قضیه: به ازای هر دو R مدول دلخواه A و B حاصلضرب تانسوری $A\otimes_R B$ موجود است و در حد یکریختی منحصربفرد است.

۰-۱۲تعریف: فرض کنیم $f:A\to A'$ و $g:B\to B'$ همریختیهای R مدولی باشند. نگاشت $f\otimes g:A\otimes_R B\to A'\otimes_R B'$ را با ضابطه $f\otimes g(a\otimes b)=f(a)\otimes g(b)$ تعریف می‌کنیم. می‌توان نشان داد که $f\otimes g$ خوشتعریف می باشد. ضمناً اگر $A\xrightarrow{f}A'\xrightarrow{f'}A''$ و $B\xrightarrow{g}B'\xrightarrow{g'}B''$ همریختیهای R مدولی باشند. داریم:

$$(g'\otimes f')o(g\otimes f)=(g'og)\otimes(f'of)$$

۰-۱۳تبصره: اگر A یک R مدول راست باشد می‌توان فانکتور هموردی بصورت $A\otimes_R -$ از کتگوری R مدولهای چپ به کتگوری گروههای آبلی تعریف کرد بدین‌صورت که به ازای هر R مدول چپ B و هر همریختی از R مدولهای چپ مانند $f:B\to B'$ داریم:

$$(A\otimes_R -)(B)=A\otimes_R B;(A\otimes_R -)(f)=1_A\otimes f:A\otimes_R B\to A\otimes_R B'$$

به همین ترتیب به ازای هر R مدول چپ B می‌توان فانکتور هموردی از کتگوری R مدولهای راست به کتگوری گروههای آبلی با نماد $-\otimes_R B$ تعریف کرد بطوریکه به ازای هر R مدول راست A و هر همریختی از R مدولهای راست مانند $f:A\to A'$ داریم

$$(-\otimes_R B)(A)=A\otimes_R B;(-\otimes_R B)(f)=f\otimes 1_B:A\otimes_R B\to A'\otimes_R B$$

۰-۱٤تبصره: فرض کنیم C یک کتگوری دلخواه و $Sets$ کتگوری همه مجموعه‌ها باشد. اگر A یک شیء از کتگوری C باشد می‌توان فانکتور همورد $Hom(A,-):C\to Sets$ را بدین صورت تعریف کرد که اگر B یک شیء از C و $f:B\to B'$ یک عضو از $Hom(B,B')$ باشد داریم:

$$Hom(A,-)(B)=Hom(A,B);Hom(A,-)(f):Hom(A,B)\to Hom(A,B'),Hom(A,-)(f)(g)=fog$$

به همین ترتیب اگر B یک شیء از کتگوری C باشد فانکتور پادورد $Hom(-,B):C\to Sets$ را خواهیم داشت بطوریکه اگر $f:A\to A'$ یک ریخت در C باشد آنگاه

$$Hom(-,B)(f):Hom(A',B)\to Hom(A,B),Hom(-,B)(f)(g)=gof$$

حالت خاص برای این فانکتورها زمانی است که در تعریف فانکتور $Hom(A,-)$، C کتگوری R مدولهای راست و در تعریف فانکتور $Hom(-,B)$، C کتگوری R مدولهای چپ باشد.

۰-۱۵تعریف: فرض کنیم M ، M' و M'' ، R مدول و $f:M'\to M$ و $g:M\to M''$ همریختیهای R مدولی باشند. گوئیم g و f در M دقیق هستند هرگاه $\operatorname{Im} f = Ker g$. حال فرض کنیم $\dots\to M_{n+1}\xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1}\to\dots$ یک دنبالهٔ دقیق از R همریختیها باشد. این دنباله را دقیق می نامیم در صورتیکه در هر جفت از همریختیهای متوالی دقیق باشد.

۰-۱٦تعریف: فرض کنید $\{A_j : j\in J\}$ خانواده‌ای از مدولها باشد. حاصلضرب این خانواده را با نماد $\prod_{j\in J} A_j$ بصورت حاصلضرب دکارتی این خانواده تعریف می‌کنیم. به عبارتی $\prod_{j\in J} A_j = \{(a_j)_{j\in J} : \forall j\in J, a_j\in A_j\}$ به همین ترتیب مجموع این خانواده را زیر مجموعه‌ای از $\prod_{j\in J} A_j$ تعریف می‌کنیم که در آن هر عضو تنها تعداد متناهی از مؤلفه‌های غیر صفر دارد و آنرا با نماد $\coprod_{j\in J} A_j$ نمایش می‌دهیم. حاصلضرب یک خانواده از R مدولها خود نیز یک R مدول است و مجموع یک خانواده از R مدولها زیر مدول حاصلضرب این خانواده خواهد بود.

مجموع خانواده $\{A_i : i\in I\}$ از R مدولها را اغلب با نماد $\oplus_{i\in I} A_i$ نمایش می‌دهند واگر $B=\oplus_{i\in I} A_i$ هر یک از A_iها را یک جمعوند از B می‌نامیم. گاهی از عبارات حاصلضرب مستقیم و مجموع مستقیم بجای حاصلضرب مجموع استفاده می‌شود.

۰-۱۷ قضیه: فرض کنیم $\{A_i : i\in I\}$ خانواده‌ای از R مدولها و B یک R مدول باشد در اینصورت $Hom(B,\prod A_i)\cong\prod Hom(B,A_i)$ ؛ $Hom(\coprod A_i,B)\cong\prod Hom(A_i,B)$

۰-۱۸ تعریف: دنبالهٔ دقیق $0\to A\xrightarrow{i} B\xrightarrow{p} C\to 0$ از R مدولها یک دنبالهٔ دقیق کوتاه نامیده می‌شود. ضمناً این دنباله را یک دنبالهٔ شکافنده می‌نامیم در صورتیکه همریختی $j:B\to A$ موجود باشد بطوریکه $ji=1_A$ یا معادلاً اینکه همریختی $q:C\to B$ موجود باشد بطوریکه $pq=1_C$. همچنین شکافنده بودن این دنباله معادل این است که داشته باشیم $B\cong A\oplus C$

۰-۱۹ تبصره: اگر $0\to A\to B\to C\to 0$ یک دنباله شکافنده باشد آنگاه A جمعوندی از B است و ضمناً C نیز جمعوندی از B می‌باشد.

۰–۲۰ قضیه: فرض کنیم A یک R مدول راست و $\{B_j : j \in J\}$ خانواده‌ای از R مدولهای چپ باشد در اینصورت $A \otimes_R \coprod B_j \cong \coprod (A \otimes_R B_j)$. به همین ترتیب اگر B یک R مدول چپ و $\{A_i : i \in I\}$ خانواده‌ای از R مدولهای راست باشد خواهیم داشت $\coprod A_i \otimes_R B \cong \coprod (A_i \otimes_R B)$.

۰–۲۱ تعریف: فانکتور پادورد F دقیق چپ است در صورتیکه اگر F را بر دنبالهٔ دقیق $A \to B \to C \to 0$ اثر دهیم دنباله دقیق $0 \to F(C) \to F(B) \to F(A)$ بدست آید. ضمناً F فانکتور دقیق راست نامیده می شود در صورتیکه اگر آنرا بر دنبالهٔ دقیق $0 \to A \to B \to C$ اثر دهیم دنبالهٔ دقیق $F(C) \to F(B) \to F(A) \to 0$ بدست آید. به همین ترتیب اگر F یک فانکتور همورد باشد گوئیم F دقیق راست است در صورتیکه اگر آنرا بر دنبالهٔ دقیق $A \to B \to C \to 0$ اثر دهیم دنبالهٔ دقیق $F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ بدست آید و F دقیق چپ نامیده می‌شود در صورتیکه اگر آنرا بر دنبالهٔ دقیق $0 \to A \to B \to C$ اثر دهیم دنبالهٔ دقیق $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$ را بدست آوریم.

فانکتوری که هم دقیق چپ و هم دقیق راست باشد یک فانکتور دقیق نامیده می‌شود.

برای مثال اگر A یک R مدول راست و B یک R مدول چپ باشد فانکتور $Hom_R(A,-)$ همورد و دقیق چپ و فانکتور $Hom_R(-,B)$ پادورد و دقیق چپ است. همچنین فانکتورهای $A \otimes_R -$ و $- \otimes_R B$ همورد و دقیق راست هستند

۰–۲۲ تبصره: هر مجموعه مرتب جزئی مانند I را می‌توان به عنوان یک کتگوری در نظر گرفت که اشیاء آن همان عضوهای I هستند و به ازای هر $i,j \in I$ داریم

$$Hom(i,j) = \begin{cases} \{x_j^i\} & i \le j \\ \phi & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

یک کتگوری باشد.

۰–۲۳ تعریف: فرض کنید I یک مجموعه مرتب جزئی و C یک کتگوری باشد. فانکتور همورد $F: I \to C$ را یک دستگاه مستقیم در C با مجموعه اندیسگذار I می‌نامیم. واضح است که اگر i عضوی از I باشد فانکتور F به آن عضوی از کتگوری C را نسبت می‌دهد که آنرا با F_i نشان می‌دهیم و اگر $i \to j$ یک ریخت در I باشد فانکتور F به آن ریخت $F_i \to F_j$ را نسبت می‌دهد که آنرا با φ_j^i مشخص می‌کنیم.

با این نمادگذاریها دستگاه مستقیم F در کتگوری C با مجموعه اندیس‌گذار I را اغلب موارد با نماد $\{F_i, \varphi_j^i\}_{\substack{i,j \in I \\ i \le j}}$ نمایش می‌دهیم.

۰ـ۲۴ تعریف: فرض کنیم $F=\{F_i,\varphi_j^i\}$ یک دستگاه مستقیم در کتگوری C باشد. حد مستقیم این دستگاه با نماد $\varinjlim F_i$ عضوی از کتگوری C همراه با خانواده‌ای از ریختها بصورت $\alpha_i:F_i\to\varinjlim F_i$ می‌باشد که در شرایط زیر صدق کند

۱. به ازای هر $i,j\in I$ اگر $i\le j$ آنگاه $\alpha_i:\alpha_j\varphi_j^i$

۲. اگر X عضو دیگری از C همراه با ریختیهای $\beta_i:F_i\to X$ باشرط $i\le j\Rightarrow\beta_i=\beta_j\varphi_j^i$ باشد آنگاه ریخت منحصربفردموجود باشد $\theta:\varinjlim F_i\to X$ موجود باشد بطوریکه نمودار کامل شده زیر جابجایی است.

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim F_i \arrow[rr, dotted] & & X \\
& F_i \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[d] & \\
& F_j \arrow[uul] \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

۰ـ۲۵ قضیه: حد مستقیم هر خانواده مستقیم از مدولها موجود است.

۰ـ۲۶ تعریف: مجموعه مرتب جزئی I جهتدار نامیده می‌شود درصورتیکه به ازای هر $i,j\in I$ عضو k از I موجود باشد بطوریکه $j\le k$ و $i\le k$

۰ـ۲۷ قضیه: فرض کنیم I یک مجموعه مرتب جزئی جهتدار و $\{A_i,\varphi_j^i\}$، $\{B_i,\psi_j^i\}$ و $\{C_i,\theta_j^i\}$ دستگاههای مستقیم از مدولها باشند. ضمناً فرض کنیم خانواده‌های $\{t_i:A_i\to B_i\}$ و $\{s_i:B_i\to C_i\}$ از همریختیها موجود باشند بطوریکه به ازای هر $i\in I$ دنباله $0\to A_i\xrightarrow{t_i}B_i\xrightarrow{s_i}C_i\to 0$ دقیق است. در اینصورت دنباله دقیق زیر از مدولها را خواهیم داشت.

$$0\to\varinjlim A_i\to\varinjlim B_i\to\varinjlim C_i\to 0$$

۰ـ۲۸ لم: اگر F یک فانکتور دقیق راست جمعی باشد که مجموع را حفظ می‌کند آنگاه F حافظ حد مستقیم است.

۰ـ۲۹ تعریف: فرض کنیم I یک مجموعه مرتب جزئی و C یک کتگوری باشد. یک دستگاه معکوس در C با مجموعه اندیس‌گذار I فانکتور پادورد $F:I\to C$ می‌باشد. دوگان

آنچه درمورد دستگاه مستقیم دیدیم درمورد دستگاه معکوس نیز برقرار است و به خصوص یک دستگاه معکوس را با نماد $F=\{F_i,\psi_i^j\}_{\substack{i,j\in I\\ i\le j}}$ نمایش می‌دهیم.

٠ـ٣٠ تعریف: فرض کنیم $\{F_i,\psi_j^i\}$ یک دستگاه معکوس در C باشد. حد معکوس این دستگاه با نمایش $\varprojlim F_i$ عضوی از کتگوری C همراه با خانواده‌ای از ریختها بصورت $\{\alpha_i:\varprojlim F_i\to F_i\}$ می‌باشد که در شرایط زیر صدق کند

١. اگر $i,j\in I$ و $i\le j$ آنگاه $\alpha_i=\psi_i^j\alpha_j$

٢. برای هر شیء X از C که ریختیهایی بصورت $f_i:X\to F_i$ با شرط $i\le j\Rightarrow f_i=\psi_i^j f_j$ موجود باشد ریخت منحصربفرد $\beta:X\to\varprojlim F_i$ موجود باشد بطوریکه نمودار کامل شده زیر جابجایی است.

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim F_i \arrow[dr] \arrow[ddr] & & X \arrow[ll, dotted] \arrow[dl] \arrow[ddl] \\
& F_i & \\
& F_j \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

٠ـ٣١ قضیه: حد معکوس هر دستگاه معکوس از مدولها موجود است.

٠ـ٣٢ لم: اگر F یک فانکتور دقیق چپ باشد که حاصلضرب را حفظ می‌کند آنگاه F حافظ حد معکوس است.

٠ـ٣٣ تبصره: فرض کنیم B یک R مدول باشد در اینصورت داریم:

١. $Hom(N,\varprojlim M_i)\cong\varprojlim \quad Hom(N,M_i)$

٢. $Hom(\varinjlim M_i,N)\cong\varprojlim \quad Hom(M_i,N)$

٠ـ٣٤ تعریف: R مدول A آزاد نامیده می‌شود هرگاه یکریخت با مجموع تصویرهای یکریختی از R باشد. اگر $A\cong\coprod_{i\in I}Ra_i$ و به ازای هر $i\in I$ ، $Ra_i\cong R$ آنگاه مجموعه $\{a_i:i\in I\}$ یک پایه از A نامیده می‌شود.

٠ـ٣٥ قضیه: هر R مدول تصویر همریخت یک R مدول آزاد است.

۰ــ۳۶ تعریف: R مدول P تصویری نامیده می‌شود در صورتی که اگر $h: B \to C$ یک بروریختی از R مدولها و $f: P \to C$ یک همریختی از R مدولها باشد آنگاه R همریختی $g: P \to B$ موجود باشد بطوریکه $hog = f$

۰ــ۳۷ قضیه: گزاره‌های زیر معادلند

۱. R مدول P تصویری است

۲. فانکتور $Hom(P,-)$ دقیق است

۳. هر دنباله دقیق کوتاه از R مدولها بصورت $0 \to A \to B \to P \to 0$ شکافنده است

٤. P جمعوند یک R مدول آزاد است

۰ــ۳۸ نتیجه: هر مدول آزاد تصویری است و هر جمعوند از یک مدول تصویری، تصویری است.

۰ــ۳۹ نتیجه: هر مدول تصویر همریخت یک مدول تصویری است

۰ــ٤۰ تبصره: مجموع هر خانواده از مدولهای تصویری، تصویری است ولی حاصلضرب خانواده‌ای از مدولهای تصویری ضرورتاً تصویری نیست.

۰ــ٤۱ تعریف: R مدول E انژکتیو است درصورتیکه برای هر تکریختی از R مدولها مانند $f: A \to B$ و هر R همریختی $g: A \to E$، R همریختی $h: B \to E$ موجود باشد بطوریکه $hof = g$

۰-٤۲ قضیه: گزاره‌های زیر معادلند

۱. R مدول E انژکتیو است

۲. فانکتور $Hom(-,E)$ دقیق است

۳. هر دنباله دقیق کوتاه بصورت $0 \to E \to B \to C \to 0$ شکافنده است

٤. به ازای ایده‌آل دلخواه I از R هر همریختی دلخواه $f: I \to E$ همریختی $g: R \to E$ موجود است بطوریکه تحدید g به I برابر f شود

۰ــ٤۳ تبصره: حاصلضرب هر خانواده از مدولهای انژکتیو، انژکتیو است ولی مجموع این خانواده ضرورتاً انژکتیو نیست.

۰ـ٤٤ لم: هر جمعوند از یک مدول انژکتیو، انژکتیو است

۰–٤٥ قضیه: هر مدول را می‌توان در یک مدول انژکتیو نشاند یعنی برای هر مدول M مدول انژکتیو E و تکریختی $M \to E$ موجود است.

۰ـ٤٦ تعریف: فرض کنیم M یک R مدول باشد و $m \in M$ و $r \in R$. در اینصورت گوئیم m بوسیله r بخش‌پذیر است هرگاه عضو m' از M موجود باشد بطوریکه $rm' = m$. حال اگر هر عضو از M بوسیله یک عنصر غیر مقسوم علیه صفر از R بخش‌پذیر باشد M را یک مدول بخش‌پذیر می‌نامیم.

۰ـ٤٧ قضیه: فرض کنیم R دامنه ایده‌آل اصلی باشد در اینصورت R مدول D بخش‌پذیر است اگر و تنها اگر انژکتیو باشد.

۰ـ٤٨ تبصره: می‌دانیم Z یعنی مجموعه تمام اعداد صحیح یک دامنه ایده‌آل اصلی است. ضمناً $\mathbb{Q}/_{Z}$ به عنوان Z مدول بخش‌پذیر است بنابراین $\mathbb{Q}/_{Z}$ یک Z مدول انژکتیو است

۰ـ٤٩ تعریف: تحلیل انژکتیو برای مدول M دنباله دقیقی بصورت $0 \to M \to E^0 \to E^1 \to \ldots$ است که در آن به ازای هر $i \geq 0$، E^i انژکتیو می‌باشد و تحلیل تصویری برای مدول M دنباله دقیقی بصورت $\ldots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ می‌باشد که در آن به ازای هر $i \geq 0$، P_i تصویری است.

۰ـ۵۰ تبصره: گفتیم که هر مدول تصویر همریخت یک مدول تصویری است و ضمناً هر مدول را می‌توان در یک مدول انژکتیو نشاند و با استفاده از این دو مطلب می‌توان برای هر مدول دلخواه تحلیل تصویری و تحلیل انژکتیو بدست آورد.

۰ـ۵۱ قضیه: هر مدول تصویری یکدست است و بنابراین هر مدول تصویر همریخت یک مدول یکدست است.

۰ـ۵۲ تعریف: تحلیل یکدست برای مدول M دنباله دقیقی بصورت $\ldots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$ است که در آن به ازای هر $i \geq 0$، F_i یکدست است. طبق قضیه بالا همواره می‌توان یک تحلیل یکدست برای مدول M بدست آورد.

۰ــ۵۳ تعریف: فرض کنیم C و D کتگوری و $F:C\to D$ و $E:C\to D$ فانکتورهای همورد باشند. در اینصورت تبدیل طبیعی $t:E\to F$ تابعی است که به هر شیء A از C ریخت $t_A:EA\to FA$ از D را نسبت دهد بطوریکه به ازای هر ریخت $f:A\to A'$ در C نمودار زیر در D جابجایی باشد.

$$\begin{array}{ccc} EA & \xrightarrow{Ef} & EA' \\ {\scriptstyle t_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t_{A'}} \\ FA & \xrightarrow[Ff]{} & FA' \end{array}$$

تعریف مشابهی برای زمانیکه E و F هر دو فانکتورهای پادورد باشند موجود است.

۰ــ۵٤ تعریف: فرض کنیم $E:C\to D$ و F فانکتورهایی باشند که هر دو همورد یا هر دوپادورد هستند در اینصورت E و F را هم ارز طبیعی نامیده و با نماد $E\cong F$ نشان می‌دهیم هرگاه تبدیل طبیعی $t:F\to E$ موجود باشد بطوریکه به ازای هرشیء A در C، $t_A:FA\to EA$ تعادل باشد.

۰ــ۵۵ تعریف: همبافت دنباله‌ای از مدولها و همریختیها مانند

$$\dots\to A_{n+1}\xrightarrow{d_{n+1}}A_n\xrightarrow{d_n}A_{n-1}\to\dots$$

است بطوریکه به ازای هر n داشته باشیم $d_n o d_{n+1}=0$ یعنی $\operatorname{Im} d_{n+1}\subseteq\ker d_n$. برای نمایش چنین همبافتی اغلب از نماد (A,d) استفاده می‌کنیم واگر همریختیهای d_n شناخته شده باشند می‌توان نماد A را برای نمایش آن بکار برد.

۰–۵٦ تبصره: اگر (A,d) یک همبافت و F یک فانکتور همورد باشند آنگاه (FA,Fd) نیز همبافت خواهد بود. ضمناً اگر F' یک فانکتور پادورد باشد آنگاه $(F'A,F'd)$ نیز همبافت می‌باشد.

۰ــ۵۷ تعریف: فرض کنیم (A,d) یک همبافت باشد. $n-$ امین همولوژی از این همبافت را بصورت $H_n(A)=\ker d_n/\operatorname{Im} d_{n+1}$ تعریف می‌کنیم که خود یک مدول است.

۰ـ۵۸ لم: فرض کنیم ${}_RM$ کتگوری همه R مدولهای راست و $T:{}_RM\to{}_RM$ یک فانکتور دقیق و همورد باشد. در اینصورت به ازای هر همبافت A از R مدولهای راست و هر عدد صحیح n داریم $H_n(TA)=TH_n(A)$

۰ـ۵۹ تعریف: همبافت (A,d) را یک زیر همبافت از همبافت (A',d') می‌نامیم در صورتیکه به ازای هر n، A_n زیر مدول A'_n باشد و $d_n=d'_n|_{A_n}$. در این حالت همبافت خارج قسمتی A'/A بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$A'/A:\ldots\to A'_{n+1}/A_{n+1}\to A'_n/A_n\to A'_{n-1}/A_{n-1}\to\ldots$$

که در آن به ازای هر همریختی $\bar{d}_n: A'_n/A_n\to A'_{n-1}/A_{n-1}$ با ضابطه $\bar{d}_n(a'_n+A_n)=d'_na_n+A_{n-1}$ در نظر گرفته می‌شود.

۰ـ۶۰ تعریف: فرض کنید A یک همبافت به شکل $0\leftarrow M\leftarrow A_0\leftarrow A_1\leftarrow\ldots$ باشد. همبافت بدست آمده از حذف کردن M را همبافت محذوف از A نامیده و آنرا با نماد A_M نشان می‌دهیم. در حقیقت داریم $A_M:\ldots\to A_1\to A_0\to 0$. به طور مشابه اگر B همبافتی به شکل $0\to N\to B^0\to B^1\to\ldots$ باشد همبافت محذوف B_N بصورت $0\to B^0\to B^1\to\ldots$ تعریف می‌شود.

۰ـ۶۱ تعریف: فرض کنیم (A,d) و (A',d') همبافت باشند. نگاشت زنجیری $f:A\to A'$ دنباله‌ای از نگاشتها بصورت $f_n:A_n\to A'_n$ است بطوریکه به ازای هر n؛ $f_n o d_{n+1}=d'_{n+1} o f_{n+1}$

۰ـ۶۲ قضیه «قضیه مقایسه»: نمودار زیر ار مدولها را در نظر بگیرید که در آن به ازای هر عدد طبیعی n، X_n تصویری، $f:A\to A'$ یک همریختی و سطرها همبافت هستند.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \to & X_2 & \to & X_1 & \to & X_0 & \to & A & \to & 0\\
 & & & & & & & & \downarrow & & \\
\cdots & \to & X'_2 & \to & X'_1 & \to & X'_0 & \to & A' & \to & 0
\end{array}$$

اگر سطر پائین این نمودار دقیق باشد آنگاه نگاشت زنجیری $\bar{f}:X_A\to X'_{A'}$ موجود است بطوریکه نمودار کامل شده جابجایی است.

۰ـ۶۳ تبصره: دوگان قضیه مقایسه نیز درست است که در آن همبافتها به سمت راست کشیده شده و هر مولفه از همبافت پائین انژکتیو و سطر بالا دقیق است.

۰ـ۶۴ تعریف: فرض کنیم T یک فانکتور همورد جمعی باشد. L_nT یعنی $n-$ امین فانکتور مشتق شده چپ از T را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

برای هر R مدول A در ابتدا یک تحلیل تصویری از A مانند P در نظر می‌گیریم و با توجه به اینکه هر تحلیل تصویری بوضوح یک همبافت است تحلیل تصویری محذوف P_A را بدست می‌آوریم و با اثردادن فانکتور T بر این تحلیل محذوف همبافت $T(P_A)$ را نتیجه می‌گیریم. اکنون قرار می‌دهیم $(L_nT)A=H_n(TP_A)=\ker Td_n / \operatorname{Im} Td_{n+1}$. اگر $f:A\to B$ یک همریختی باشد برای تعریف $(L_nT)f$ ابتدا تحلیلهای تصویری محذوف $(P_A,d),(P_B,d')$ را بدست آورده و با توجه به قضیه مقایسه نگاشت زنجیری $\bar{f}:P_A\to P_B$ را می‌یابیم. حال تعریف می‌کنیم:

$(L_nT)f:(L_nT)A\to(L_nT)B$ ؛ $(L_nT)f(z_n+\operatorname{Im}Td_{n+1})=(T\bar{f}_n)z_n+\operatorname{Im}Td'_{n+1}$

۰ـ۶۵ قضیه: فرض کنید T یک فانکتور همورد جمعی باشد. در اینصورت به ازای هر عدد صحیح n ، L_nT یک فانکتور جمعی است ضمناً به ازای هر R مدول A، $(L_nT)A$ مستقل از انتخاب تحلیل تصویری در نظر گرفته شده برای A است.

۰ـ۶۶ تبصره: فرض کنیم A یک R مدول راست و B یک R مدول چپ باشد. فانکتورهای $Tor_n^R(-,B)$ و $Tor_n^R(A,-)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$Tor_n^R(-,B)=L_n(-\otimes_R B)$ ؛ $Tor_n^R(A,-)=L_n(A\otimes_R -)$

ضمناً به کار بردن فانکتورهای $Tor_n^R(A,-)$ و $Tor_n^R(-,B)$ برای محاسبه $Tor_n^R(A,B)$ نتیجه یکسانی دربر خواهد داشت. علاوه بر این اگر R یک حلقه جابجایی باشد به ازای هر $n\geq 0$ داریم $Tor_n^R(A,B)\cong Tor_n^R(B,A)$

۰ـ۶۷ تعریف: فرض کنید T یک فانکتور همورد جمعی باشد. در اینصورت $n-$ امین فانکتور مشتق شده راست از T را با نماد R^nT نمایش داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم.