بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

گرایش کاربردی

مولدهای شبه اعداد تصادفی و اعداد تصادفی در شبیه سازی مونت کارلو

از:

طاهره امیری چایجانی

استاد راهنما:

دکتر بهروز فتحی واجارگاه

بهمن ۱۳۹۲

تقدیم به

بهترین های زندگی ام

به پدر فداکار و مادر عزیزم

و همسرم

تقدیر و تشکر

خدای را بسی شاکرم که دو موجود مقدس . . . پدری دلسوز و مادری مهربان را نصیبم نمود. آنان که ناتوان شدند تا من به توانایی برسم، موهایشان سپید شد تا من در اجتماع رو سپید شوم و عاشقانه سوختند تا روشن گر راهم باشند و گرما بخش وجودم . از ایشان به خاطر وجود پر مهرشان صمیمانه سپاسگزارم .

همچنین از همسر مهربان، خواهران و برادر بزرگوارم که با حمایت های بی دریغشان مرا یاری رساندند، کمال تشکر و سپاس را دارم .

بر خود لازم می دانم، مراتب تقدیر و قدردانی خود را از استاد راهنمای فرهیخته ام جناب آقای دکتر بهروز فتحی که با زحمات بی شائبه و راهنمایی های عالمانه و مفید خود مرا در نگارش و تصحیح این پایان نامه یاری نموده اند، به جای آورم .

همچنین از نظرات ارزشمند اساتید گرانقدر جناب آقای دکتر امیر زینل و جناب آقای دکتر فرشید مهردوست که داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند و نماینده ی محترم تحصیلات تکمیلی ،جناب آقای دکتر کیانپور متشکرم .

برای همه ی این عزیزان آرزوی سعادت، سلامتی و سرافرازی روز افزون را از خداوند متعال خواستارم .

پاینده باشید

فهرست مطالب

فصل دوم : شبیه سازی اعداد تصادفی و شبه تصادفی

فصل سوم : شبیه سازی عددی دنباله نیدریتر و بهبود آن

فصل چهارم : حل معادلات انتگرال به روش شبه مونت کارلو

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

چکیده

مولدهای شبه اعداد تصادفی و اعداد تصادفی در شبیه سازی مونت کارلو

طاهره امیری چایجانی

در این پایان نامه عملکرد مولد اعداد شبه تصادفی نیدریتر را در حل انتگرال های با ابعاد بالا و معادلات انتگرالی با سایر دنباله های-(t,s) از جمله هالتون، فائور و سوبول مقایسه کردیم. سپس روش های مختلف بهبود عملکرد این مولد را از جمله حذف نقاط اولیه، لیپد و اسکرمبل مورد بررسی قرار دادیم و برای اسکرمبل کردن دنباله نیدریتر از دنباله هالتون استفاده نمودیم.

واژه‌های کلیدی: *اعداد تصادفی، اعداد شبه تصادفی، دنباله نیدریتر، شبیه سازی، مونت کارلو*

Abstract

Quasi-random and random number generators in Monte-Carlo simulation

Tahereh Amiri Chaijani

In this thesis, we present and compare the Niederreiter quasi-random number generator approach to solve high-dimensional integrals and integral equations with (t, s) - sequences such as Halton, Faure and Sobol. Then, we employ the optimized version of this generator to improve, skipping first points, leaped and scrambling, and the performance of this sequence. Also, we used Halton sequence for scrambling Niederreiter sequence.

***Keywords*:** Quasi-random number, random number, Niederrieter Sequence, simulation, Monte-Carlo

مقدمه:

در علوم مختلف مخصوصاً در مباحث مربوط به فرایند تصادفی مانند حل مسائل پیچیده مالی، نانو تکنولوژی، الگوریتم ژنتیک و ... می توان به نقش مهم روش مونت کارلو[1] در حل چنین مسائلی پی برد. اساس روش مونت کارلو بر پایه نمونه گیری تصادفی است. نمونه های تصادفی را با تولید اعداد تصادفی و شبه تصادفی بدست می آورند.

ما در این پایان نامه سعی بر این داریم تا با کمک مولد اعداد تصادفی و شبه تصادفی و تولید چنین اعدادی به حل انتگرال های با ابعاد بالا و معادلات انتگرال خطی نوع اول و دوم بپردازیم و تلاش می کنیم با استفاده از مولد های شبه تصادفی که اصطلاحاً به دنباله های شبه تصادفی معروف هستند، سرعت همگرایی به جواب مسئله را افزایش و مقدار خطا را کاهش دهیم، در واقع ما می خواهیم هزینه ی محاسبات را کم کنیم.

از جمله اقداماتی که در این پایان نامه انجام خواهدگرفت، این است که ما با کمک روش های شبیه سازی از جمله روش شبیه سازی شبه مونت کارلو که از مولد شبه تصادفی نظیر دنباله نیدریتر[2] و دنباله ی اسکرمبل شده ی آن استفاده می کند، بتوانیم به راه حلی که باعث کارایی بیشتر مدل تصادفی مورد نظر است، برسیم.

---

[1]. Monte-Carlo Method
[2]. Niederreiter Sequence

فصل اول

مفاهیم پایه ای احتمال و فرایند های تصادفی

مقدمه :

در بسیاری از آزمایش هایی که بشر انجام می دهد نمی توان از قبل نتیجه را تعیین کرد. در زمان های گذشته دانشمندان فکر می کردند این نوع آزمایش ها به بازی های قمار و بازی های تصادفی منحصر می شود، اما امروز بشر دریافته است که بسیاری از موضوعات علوم مختلف به این صورت هستند. علم احتمال با این آزمایش ها موضوعیت می یابد و علی رغم آنکه نمی توان در مورد نوع آزمایش ها اظهار نظر قطعی کرد، اما سعی می شود گزاره هایی بیان شود که چگونگی وقوع نتایج متفاوت این آزمایش ها را نشان می دهند. دانشمندان توانستند در نیمه دوم قرن هفدهم تئوری احتمالات را بنیان گذاری کنند و پیشرفت چشم گیری در زمینه احتمال، آمار و فرایند تصادفی در این مدت دست یابند. نظریه‌ای که بدین سان برای بازی «شیر یا خط» یا «قرمز یا سیاه» پرورده شد. پاسکال[1] و فرما[2] از بنیان گذاران تئوری (نظریه) احتمال لقب گرفته اند. تصادفی بودن و فرایند تصادفی هم به لحاظ تئوری و هم به لحاظ نظری و ارتباط متقابل آنها با سایر رشته ها، به لحاظ کاربردی در رشته هایی مثل مخابرات، اقتصاد، ژنتیک و... به شدت مورد توجه ویژه قرارمی گیرد[۶] . فرایند تصادفی ابتدا در علم فیزیک و برای توصیف پدیده های تصادفی که حالت آنها در طی زمان تغییر می کند، مطرح شد. فرایند تصادفی به بررسی پدیده هایی می پردازد که در آن دو مؤلفه تصادفی بودن و دارای مرحله یا زمان بودن مطرح است و روش های مطالعه ی این پدیده ها و ابزارهایی که برای مدل کردن آنها استفاده می شود را بررسی می کند.

در این فصل به توضیح مختصری در زمینه ی آمار، احتمال و فرآیند تصادفی و مفاهیم پایه ای آنها می پردازیم[۶-۲] .

۱-۱ : مفاهیم پایه ای احتمال

تعریف (۱-۱-۱): آزمایش های تصادفی

به آزماشی که نتوان قبل از وقوع نتیجه آن را به طور قطعی تعیین کرد، آزمایش تصادفی می گویند. مانند پرتاب تاس، پرواز یک هواپیما، عمل جراحی یک بیمار و ... . در واقع هر عملی که تصادف در نتیجه آن دخالت داشته باشد، آزمایش تصادفی نامیده می شود و مجموعه تمام رویدادهای ممکن آزمایش را فضای نمونه آن آزمایش گویند و با Ω نشان می دهیم. نتایجی را که از یک آزمایش به دست می آید، برآمد آزمایش نامند.

برای مثال فضای نمونه آزمایش پرتاب یک سکه $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ می باشد.

1 .Pas kal
2 .Ferma

۱-۲ : اصول موضوع احتمال

تعریف(۱-۲-۱): σ-میدان (سیگما میدان)

فرض کنیم Ω مجموعه ی مرجع و $P(\Omega)$ مجموعه ی توانی Ω یعنی مجموعه ی تمام زیر مجموعه های Ω باشد. حال فرض کنیم $\mathcal{F}$ زیر مجموعه ای از باشد. $P(\Omega)$ در واقع هر عضو $\mathcal{F}$ زیر مجموعه ای از Ω است ولی $\mathcal{F}$ لزوماً مانند $P(\Omega)$ شامل تمام زیر مجموعه های Ω نیست. در این صورت می گوییم $\mathcal{F}$ یک σ-میدان است هرگاه:

۱) $\emptyset \in \mathcal{F}$.

۲) اگر $A \in \mathcal{F}$ آنگاه $A' \in \mathcal{F}$.

۳) $\mathcal{F}$ تحت اجتماع شمارا بسته باشد، یعنی اگر A_{i} ها از اعضای $\mathcal{F}$ باشند آنگاه $\bigcup_i \mathrm{A_i} \in \mathcal{F}$. این اجتماع می تواند متناهی یا نامتناهی باشد ولی باید شمارا باشد. یعنی اگر $\mathrm{A}_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$ ، آنگاه $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_{\mathrm{i}} \in \mathcal{F}$.

قضیه (۱-۲-۱): فرض کنیم $\mathcal{F}$، σ -میدانی از زیر مجموعه های Ω باشد در این صورت :

الف) $\emptyset \in \mathcal{F}$ و $\Omega \in \mathcal{F}$.

ب) اگر $\mathrm{A_i} \in \mathcal{F}$، آنگاه $\bigcap_i \mathrm{A_i} \in \mathcal{F}$ (اشتراک شمارا).

ج)اگر $A, B \in \mathcal{F}$ ، آنگاه $A - B \in \mathcal{F}$.

برهان : رجوع شود به منبع [۲].

تعریف(۱-۲-۱): اگر $\mathcal{F}$، σ-میدانی روی Ω باشد و $A \in \mathcal{F}$ می گوییم A نسبت به $\mathcal{F}$ پیشامد است. یعنی اگر ما σ-میدان را عوض کنیم، پیشامدها نیز تغییر می کنند.

تعریف(۱-۲-۲): فرض کنیم Ω فضای نمونه و $\mathcal{F}$، σ -میدانی از آن باشد. در این صورت تابع مجموعه ای

$$P: \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$$

را اندازه احتمال گوییم هرگاه اصول زیر در مورد P صادق باشد:

اصل اول: $P(\Omega)$ توجه می کنیم که هر σ-میدانی شامل Ω است لذا $P(\Omega)$ قابل تعریف است.

اصل دوم: اگر A_i پیشامد های دو به دو جدا از هم باشند، یعنی به ازای هر $\mathrm{i} \neq j$، $A_i \cap A_j = \emptyset$، آنگاه

$$P(\bigcup_i A_i) = \sum_i A_i$$

چون A_i ها از اعضای σ-میدان هستند ، اجتماع آنها در حوزه ی تعریف P قرار می گیرد و لذا $P(\bigcup_i A_i)$ قابل تعریف است.

در برابری بالا i می تواند در مجموعه ای حداکثر شمارا حرکت کند.

اگر $A \in \mathcal{F}$، $P(A)$ مقدار P به ازای مجموعه ی A را احتمال A می گوییم.

به سه اصل بالا اصول کولموگروف گویند. کولموگوروف یک ریاضیدان مشهور روسی بود که در سال ۱۹۳۳ این سه اصل را اصول موضوعی نظریه احتمال قرار داد.

تعریف (۱-۲-۳): σ-میدان تولید شده به وسیله ی مجموعه های باز را σ-میدان بورل می نامیم که با نماد $\mathcal{B}$ نشان می دهیم. هر عضو این σ-میدان را مجموعه ی بورل می گوییم.

۱-۲-۱ : فضای احتمال

تعریف (۱-۲-۲-۱): فرض کنیم Ω فضای نمونه و $\mathcal{F}$، σ-میدانی از زیر مجموعه های Ω و $P:\mathcal{F}\to[0,1]$ یک اندازه ی احتمال باشد. در این صورت سه تایی مرتب $(\Omega,\mathcal{F},P)$ را فضای احتمال می نامیم. فضای احتمال برای ما مشخص می کند که اولاً پیشامدها را به عنوان زیر مجموعه از چه مجموعه ای در نظر گرفته ایم(Ω)، ثانیاً کدام یک از این زیر مجموعه ها پیشامد هستند و کدام یک نیستند. اگر عضو $\mathcal{F}$ باشند، پیشامدند و اگر عضو $\mathcal{F}$ نباشند، پیشامد نیستند. سرانجام احتمال پیشامد ها را چگونه حساب کنیم (با استفاده از تابع P).

۱-۲-۲ : احتمال شرطی

برخی آزمایش ها طوری طراحی شده اند که در حین آزمایش بخشی از اطلاعات در اختیار ما قرار می گیرند اما این اطلاعات به گونه ای نیست که نتیجه را کاملاً روشن کند و دیگر نیازی به احتمال نباشد در این صورت معمولاً با کمک احتمال شرطی مسئله را مورد بررسی قرار می دهیم. فرض کنیم در فضای احتمال $(\Omega,\mathcal{F},P)$، B پیشامدی با احتمال مثبت باشد. احتمال وقوع پیشامد A از $\mathcal{F}$ به شرط وقوع پیشامد B را با علامت $P(A|B)$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\quad ;\quad P(B)\neq 0$$

قضیه (۱-۲-۲-۱): احتمال کل (قانون احتمالات کل)

فرض کنید $<A_n>$ دنباله ای از پیشامد های دو به دو ناسازگار باشند(به ازای هر $i\neq j$ ، $A_i\cap A_j=\emptyset$) و اجتماع آنها برابر Ω باشد. در این صورت به ازای هر پیشامد دلخواه A داریم :

$$P(A)=\sum_{i=1}P(A_i)P(A|A_i)$$

برهان: رجوع شود به منبع [۲].

قضیه (۱-۲-۲-۲): دستور بیز

فرض کنیم پیشامد های $A_1, A_2, \dots$ افرازی از فضای نمونه باشد(دو به دو ناسازگار و اجتماع آنها فضای نمونه Ω است). به ازای هر پیشامد مانند A داریم:

$$P(A_i|A) = \frac{P(A_i)P(A|A_i)}{\sum_j P(A_j)P(A|A_j)}$$

۱-۲-۳ : استقلال پیشامد

تعبیر: دو پیشامد A و B مستقل اند، اگر وقوع یا عدم وقوع یکی در وقوع یا عدم وقوع دیگری هیچ تأثیری نداشته باشند.

تعریف(۱-۲-۴-۱): دو پیشامد A و B از فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشند. در این صورت A و B را مستقل گوییم هرگاه:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

۱-۲-۴ : متغیر تصادفی

تعریف(۱-۲-۴-۱): تابع $X: \Omega \to R$ را متغیر تصادفی نسبت به σ -میدان $\mathcal{F}$ از زیر مجموعه های Ω گوییم هرگاه به ازای هر مجموعه ی بورل B از σ-میدان بورل $\mathcal{B}$ داشته باشیم:

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega: X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

به عبارت دیگر متغیر تصادفی تابعی است از تصویر معکوس هر مجموعه ی بورل توسط آن پیشامد است. معمولاً $X^{-1}(B)$ را به صورت $(X \in B)$ نمایش می دهند.

اگر برد متغیر تصادفی X مجموعه ای شمارا باشد X را گسسته گویند و اگر برد X مجموعه ای ناشمارا باشد، X را پیوسته گویند. مجموعه های شمارا با زیر مجموعه ای از (N) تناظر یک به یک دارند و مجموعه ی ناشمارا معمولاً به صورت یک یا چند بازه از اعداد حقیقی هستند. توجه کنید که هر مجموعه متناهی شمارا است.

به عنوان مثال فرض کنید سه سکه پرتاب شود، فضای نمونه ای عبارت است از:

$$\Omega = \{TTT, TTH, THT, HTT, THH, HTH, HHT, HHH\}$$

متغیر تصادفی X برای هر نتیجه تعداد شیرها را می شمارد:

$$X(TTT) = 0$$
$$X(TTH) = 1$$

در این مثال مجموعه مقادیر یا برد X که آن را با $X(\Omega)$ نشان می دهند. مجموعه ای چهار عضو $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ است که این متغیر تصادفی X یک متغیر تصادفی گسسته است.

۱-۲-۵ : توزیع احتمال

آنچه که در تعریف متغیر تصادفی ضروری است Ω و σ-میدانی از زیر مجموعه‌های Ω است. حال فرض کنیم $X: (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (R, \mathcal{B})$ متغیر تصادفی باشد. می‌خواهیم به کمک X و P، $(R, \mathcal{B})$ را تبدیل به فضای احتمال کنیم. تمام مقدمات فراهم است، فقط کافی است به ازای هر $B \in \mathcal{B}$، احتمال B را تعریف کنیم. این احتمال را که به کمک X و P تعریف می‌شود با نماد P_X نشان می‌دهیم. قضیه زیر این احتمال را تعریف می‌کند که برای اثبات به [۲] رجوع کنید.

قضیه (۱-۲-۵-۱): با مفروضات بالا تابع $P_X(B): \mathcal{B} \to [0,1]$ با ضابطه $P_X(B) = P(X^{-1}(B))$ یک اندازه احتمال روی $\mathcal{B}$ تعریف می‌کند.

تعریف (۱-۲-۵-۱): $P_X(B)$ را اندازه احتمال تولید شده به وسیله X روی $\mathcal{B}$ یا توزیع احتمال X روی $\mathcal{B}$ می‌گوییم.

تعریف (۱-۲-۵-۲): تابع F را بر R با ضابطه

$$F_X(t) = P_X\big((-\infty, t]\big) = P(X^{-1}(-\infty, t]) \ , \qquad t \in R$$

تابع توزیع X می‌نامیم.

تابع توزیع دارای خواص زیر است:

۱) $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ و $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$

۲) F تابعی صعودی است یعنی اگر $t_1 < t_2$ ، آنگاه، $F_X(t_1) < F_X(t_2)$

۳) F از راست پیوسته است، یعنی $F_X(t^+) = F_X(t)$.

۴) منظور از $F(b^-)$ حد چپ F در b است.

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$$
$$P(a < X < b) = F(b^-) - F(a)$$
$$P(X = a) = F(a) - F(a^-)$$

۱-۲-۶ : توابع چگالی احتمال گسسته و پیوسته

تعریف (۱-۲-۶-۱): اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد، تابعی که برای هرمقدار x در برد X با $f(x) = P(X = x)$ داده می شود، تابع چگالی احتمال گسسته X نامیده می شود. از طرفی تابعی با مقادیر $f(x)$ که روی مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده است، تابعی چگالی احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته X خوانده می شود اگر و تنها اگر به ازای هر دو مقدار حقیقی ثابت a و b با $a \le b$، $P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$ و دارای دو خاصیت زیر است:

۱)برای هر x، $f(x) \ge 0$.

۲) اگر X پیوسته باشد، $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ و اگر گسسته باشد، $\sum_x f(x) = 1$.

۱-۲-۷ : امید ریاضی (میانگین)

تعریف (۱-۲-۷-۱): فرض کنید (Ω, F, P) فضای احتمال و $X: \Omega \to R$ متغیری تصادفی باشد. در این صورت انتگرال X

را که با نماد $\int_{\Omega} XdP$ نشان می‌دهیم، به صورت حد عبارت زیر روی تعریف افراز Ω به وسیله پیشامدها تعریف می‌کنیم:

$$\int_{\Omega} XdP = \lim \quad \sum_i X(\omega_i)P(A_i)$$

که در آن A_i ها پیشامد بوده و افرازی از Ω را تشکیل می‌دهند. اگر حد مذکور موجود نباشد، می‌گوییم انتگرال موجود نیست.

امید ریاضی یا میانگین متغیر تصادفی X را با $E(X)$ یا μ نشان می دهند و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$E(X) = \mu = \begin{cases} \sum_x xP(X=x) & \text{اگر } X \text{ گسسته باشد} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx & \text{اگر } X \text{ پیوسته باشد} \end{cases}$$

دقت شود $E(X)$ در صورت همگرایی مطلق سری یا انتگرال بالا تعریف می شود و وجود خواهد داشت.

خواص امید ریاضی:

۱) اگر $a \leq X \leq b$ آنگاه $a \leq E(X) \leq b$ در حالت خاص اگر $X \geq 0$ پس $E(X) \geq 0$

۲) امید ریاضی تابعی است از X:

فرض کنید $Y = g(X)$ تابعی از متغیر تصادفی X باشد که تابع احتمال X موجود است، در این صورت

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_x g(x).P(X=x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx \end{cases}$$

در حالت خاص $E[X^m]$ گشتاور مرتبه (m) ام گفته می شود.

۳) برای هر متغیر تصادفی X و اعداد حقیقی b و a:

$$E(aX+b) = aE(X) + b$$

مثال(۱-۲-۷-۱): امید ریاضی متغیر تصادفی X را که دارای تابع چگالی زیر است، بیابید.

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} 4e^{-4x} & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

حل:

$$\mathrm{E(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} x4e^{-4x} \quad dx$$

با استفاده از انتگرال جزء به جزء خواهیم داشت:

$$E(X) = \frac{1}{4}$$

قضیه(۱-۲-۷-۱):

اگر X متغیری نامنفی و پیوسته باشد:

$$E(X)=\int_0^\infty P(X>t)dt=\int_0^\infty \big(1-F_X(t)\big)dt$$

اگر X گسسته باشد و مقادیر صحیح و نامنفی را اختیار کند آنگاه:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} P(X\geq i)$$

برهان: رجوع شود به منبع [۶].

۱-۲-۸ : واریانس (پراش)

واریانس یک معیار برای اندازه گیری پراکندگی است. واریانس متغیر تصادفی X را $Var(X)$ یا σ^2 نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\sigma^2=Var(X)=E(X-\mu)^2$$

که در آن $\mu=E(X)$ با توجه به خاصیت امید ریاضی به راحتی دیده می شود $\sigma^2=E(X^2)-\mu^2$.

خواص واریانس:

۱) همواره $Var(X)\geq 0$ پس همواره $E(X^2)\geq \mu^2$ یا همواره $E(X^2)\geq (E(X))^2$ همچنین

$$Var(X)=0 \ \Leftrightarrow \ P(X=\mu)=1$$

۲) برای هر متغیر تصادفی X و اعداد حقیقی b و a:

$$Var(aX+b)=a^2Var(x)$$

تذکر : جذر مثبت واریانس را انحراف معیار می نامند:

$$\sigma=\sqrt{Var(X)}$$

۱-۲-۹ : تابع مولد گشتاورها

به $E(X-a)^k$ گشتاور مرتبه k ام توزیع X حول نقطه (a) می گویند و در حالت خاص به $E(X-\mu)^k=\mu_k$ گشتاور مرکزی مرتبه k ام می گویند و به $E(X^k)=m_k$ گشتاور مرتبه kام توزیع X گفته می شود. بدیهی است بین μ_k و m_k رابطه وجود دارد.

تعریف(۱-۲-۹-۱): تابع $M_X(t)=E(e^{tX})$ را که (t) در بازه ای از اعداد حقیقی شامل صفر تغییر می کند، تابع مولد گشتاورهای X گویند.