

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

گرایش کاربردی

مولدهای شبه اعداد تصادفی و اعداد تصادفی در شبیه سازی
مونت کارلو

از:

طاهره امیری چایجانی

استاد راهنما:

دکتر بهروز فتحی واجارگاه

بهمن ۱۳۹۲

تقدیم به

بهترین های زندگی ام

به پدر فداکار و مادر عزیزم

و همسرم

تقدیر و تشکر

خدای راسبی ماگرم که دو موجود مقدس... پدری دلسوز و مادری مهربان را نصیبم نمود. آنان که ناتوان شدند تا من به توانایی برسم، موهبتان سپید شد تا من در اجتماع رو سپید شوم و عاشقان سوختند تا

روشن گردا هم باشند و کرمانش وجودم. از ایشان به خاطر وجود پر مهرشان صمیمانه سپاسگزارم.

بچنین از همسر مهربان، خواهران و برادر بزرگوارم که با حمایت بی دریغشان مرا یاری رسانند، کمال تشکر و سپاس را دارم.

بر خود لازم می دانم، مراتب تقدیر و قدر دانی خود را از اساتید را بهنای فرهیخته ام جناب آقای دکتر بهروز فحیمی که بازحات بی شائبه و راهنمایی های عالمانه و مفید خود مرا در نگارش و تصحیح این پایان نامه

یاری نموده اند، به جای آورم.

بچنین از نظرات ارزشمند اساتید که تقدیر جناب آقای دکتر امیر زینل و جناب آقای دکتر فرید مراد دوست که داور این پایان نامه را بر عهده گرفتند و نایبانه های محترم تحصیلات تکمیلی

جناب آقای دکتر کینا پور تشکر.

برای همه ی این عزیزان آرزوی سعادت، سلامتی و سرفرازی روز افزون را از خداوند متعال خواستارم.

پایانده بشید

فهرست مطالب

| صفحه | عنوان |
|------|--------------------|
| چ | فهرست جدول ها..... |
| ح | فهرست شکل ها..... |
| خ | چکیده فارسی..... |
| د | چکیده انگلیسی..... |
| ۱ | مقدمه..... |

فصل اول: اصول پایه احتمال و فرایندهای تصادفی

| | |
|----|---|
| ۳ | مقدمه..... |
| ۳ | ۱-۱) مفاهیم پایه ای احتمال..... |
| ۴ | ۲-۱) اصول موضوع احتمال..... |
| ۵ | ۱-۲-۱) فضای احتمال..... |
| ۵ | ۲-۲-۱) احتمال شرطی..... |
| ۶ | ۳-۲-۱) استقلال پیشامد..... |
| ۶ | ۴-۲-۱) متغیر تصادفی..... |
| ۷ | ۵-۲-۱) توزیع احتمال..... |
| ۷ | ۶-۲-۱) تابع چگالی احتمالی گسسته و پیوسته..... |
| ۸ | ۷-۲-۱) امید ریاضی..... |
| ۹ | ۸-۲-۱) واریانس (پراش)..... |
| ۹ | ۹-۲-۱) تابع مولد گشتاور..... |
| ۱۰ | ۱۰-۲-۱) نابرابری مارکف..... |
| ۱۱ | ۱۱-۲-۱) نابرابری چپیشف..... |
| ۱۱ | ۱۲-۲-۱) نابرابری کوشی شوارتز..... |
| ۱۱ | ۱۳-۲-۱) متغیرهای تصادفی توام..... |
| ۱۱ | ۱۴-۲-۱) توابع توزیع توام..... |
| ۱۲ | ۱۵-۲-۱) توزیع های شرطی..... |
| ۱۲ | ۱۶-۲-۱) متغیرهای تصادفی مستقل..... |
| ۱۳ | ۱۷-۲-۱) کواریانس (هم پراش) و خواص آنها..... |
| ۱۳ | ۱۸-۲-۱) ضریب همبستگی..... |

| | |
|----|--|
| ۱۴ | تابع مولد احتمال..... (۱۹-۲-۱) |
| ۱۴ | قانون ضعیف اعداد بزرگ..... (۲۰-۲-۱) |
| ۱۵ | همگرایی متغیرهای تصادفی..... (۳-۱) |
| ۱۵ | همگرایی تقریباً حتمی..... (۱-۳-۱) |
| ۱۵ | همگرایی در توزیع..... (۲-۳-۱) |
| ۱۶ | توزیع یکنواخت گسسته..... (۴-۱) |
| ۱۶ | توزیع های پیوسته..... (۵-۱) |
| ۱۷ | توزیع گاما..... (۱-۵-۱) |
| ۱۷ | توزیع نمایی..... (۲-۵-۱) |
| ۱۸ | جامعه آماری..... (۶-۱) |
| ۱۹ | نمونه گیری..... (۱-۶-۱) |
| ۱۹ | برآورد کننده ها..... (۲-۶-۱) |
| ۱۹ | روش های برآورد پارامترهای توزیع های آماری..... (۳-۶-۱) |
| ۲۲ | خواص برآورد کننده ها..... (۴-۶-۱) |
| ۲۳ | مفاهیم پایه ای فرایندهای تصادفی..... (۷-۱) |
| ۲۳ | زنجیرهای مارکف..... (۱-۷-۱) |
| ۲۵ | برآورد یاب مونت کارلو و خواص آن..... (۸-۱) |
| ۲۶ | نتیجه گیری..... (۹-۱) |

فصل دوم : شبیه سازی اعداد تصادفی و شبه تصادفی

| | |
|----|---|
| ۲۸ | مقدمه..... (۱-۲) |
| ۲۸ | تولید اعداد شبه تصادفی..... (۲-۲) |
| ۲۹ | تولید اعداد تصادفی..... (۳-۲) |
| ۲۹ | محاسبه انتگرال ها با استفاده از اعداد تصادفی و شبه تصادفی..... (۴-۲) |
| ۳۱ | تولید متغیرهای تصادفی گسسته با کمک شبیه سازی روش تبدیل وارون..... (۱-۴-۲) |
| ۳۳ | تکنیک پذیرش-عدم پذیرش..... (۲-۴-۲) |
| ۳۴ | روش ترکیب..... (۵-۲) |
| ۳۴ | تولید متغیر تصادفی پیوسته..... (۱-۵-۲) |
| ۳۴ | روش تبدیل وارون..... (۲-۵-۲) |
| ۳۶ | روش عدم پذیرش و روش پذیرش..... (۳-۵-۲) |
| ۴۰ | تولید متغیر تصادفی نرمال استاندارد از روش قطبی و باکس مولر..... (۶-۲) |
| ۴۴ | آزمون نیکویی برازش..... |

۴۵ نتیجه گیری (۷-۲)

فصل سوم : شبیه سازی عددی دنباله نیدریتز و بهبود آن

۴۷ مقدمه

۴۸ ۱-۳) پراکندگی

۴۹ ۲-۳) نامساوی کوکسما-لاوکا

۵۰ ۳-۳) دنباله دیجیتال

۵۲ ۴-۳) دنباله نیدریتز

۵۵ ۵-۳) تعمیمی از دنباله نیدریتز

۵۵ ۶-۳) بهبود جدید در دنباله نیدریتز

۵۷ ۷-۳) شبیه سازی عددی

۶۱ ۱-۷-۳) نتایج عددی تست انتگرال ها برای روش های جدید در بهبود دنباله نیدریتز

۶۵ ۸-۳) نتیجه گیری

فصل چهارم : حل معادلات انتگرال به روش شبه مونت کارلو

۶۷ مقدمه

۶۷ ۱-۴) طرح کلی روش مونت کارلو

۶۹ ۲-۴) انتگرال گیری مونت کارلو

۷۶ ۳-۴) روش مونت کارلو برای معادلات انتگرال خطی نوع اول و دوم

۷۶ ۱-۳-۴) تبدیلات انتگرال و معادلات انتگرال نوع اول

۷۹ ۲-۳-۴) معادلات انتگرال نوع دوم

۸۱ ۴-۴) نتایج عددی حل معادلات انتگرال خطی نوع دوم

۸۵ ۵-۴) نتیجه گیری

۸۶ پیشنهاد های ادامه ی کار

۸۷ واژه نامه

۹۰ مراجع

۹۱ ضمیمه

فهرست جدول‌ها

| صفحه | عنوان |
|------|---|
| ۱۰ | جدول ۱-۱: تابع احتمال متغیر تصادفی X |
| ۳۵ | جدول ۱-۲: تولید اعداد تصادفی با استفاده از (۲-۱-۵-۲)..... |
| ۴۴ | جدول ۲-۲: جدول داده‌های آزمون نیکویی برازش..... |
| ۷۳ | جدول ۱-۴: محاسبه انتگرال به روش مونت کارلوی استاندارد (MC)..... |
| ۷۵ | جدول ۲-۴: محاسبه انتگرال به روش شبه مونت کارلو (QMC)..... |
| ۸۱ | جدول ۳-۴: نتایج عددی برای مثال (۱-۴-۴) در ۲۰۰۰۰ نقطه..... |
| ۸۲ | جدول ۴-۴: نتایج عددی برای مثال (۲-۴-۴) در ۳۰۰۰۰ نقطه..... |
| ۸۳ | جدول ۵-۴: نتایج عددی برای مثال (۳-۴-۴) در ۱۰۰۰۰۰ نقطه تصادفی برای چگالی یکنواخت..... |
| ۸۴ | جدول ۶-۴: نتایج عددی برای مثال (۳-۴-۴) در ۱۰۰۰۰۰ نقطه تصادفی برای چگالی غیریکنواخت..... |

فهرست شکل‌ها

| صفحه | عنوان |
|------|--|
| ۳۶ | شکل ۱-۲: نمودار هیستوگرام برای توزیع نمایی با پارامتر ۴..... |
| ۳۸ | شکل ۲-۲: نمودار هیستوگرام برای شبیه سازی توزیع نرمال به روش پذیرش و عدم پذیرش توسط الگوریتم اول. |
| ۴۰ | شکل ۳-۲: نمودار هیستوگرام برای شبیه سازی توزیع نرمال به روش پذیرش و عدم پذیرش توسط الگوریتم دوم. |
| ۴۷ | شکل ۱-۳: اعداد تصادفی تولید شده با روش های MC و QMC..... |
| ۴۹ | شکل ۲-۳: نمایش پراکندگی در دو بعد..... |
| ۵۷ | شکل ۳-۳: دنباله نیدریتز شبیه سازی شده بر مبنای ۲ با ۲۰۰۰ نقطه..... |
| ۵۸ | شکل ۴-۳: دنباله نیدریتز شبیه سازی شده بر مبنای ۷ با ۲۰۰۰ نقطه..... |
| ۵۹ | شکل ۵-۳: دنباله نیدریتز اسکرمبل شده بر مبنای ۲ با ۲۰۰۰ نقطه با تابع RAND تولیدشده..... |
| ۶۰ | شکل ۶-۳: دنباله نیدریتز اسکرمبل شده با دنباله هالتون بر مبنای ۲ با ۲۰۰۰ نقطه..... |
| ۶۱ | شکل ۷-۳: دنباله نیدریتز اسکرمبل شده با دنباله هالتون بر مبنای ۷ با ۲۰۰۰ نقطه..... |
| ۶۲ | شکل ۸-۳: نمودار خطای مطلق انتگرال I_1 برحسب بعد S با $N=10000$ نقطه (بر مبنای ۷)..... |
| ۶۳ | شکل ۹-۳: نمودار خطای مطلق انتگرال I_2 برحسب بعد S با $N=10000$ نقطه (بر مبنای ۷)..... |
| ۶۴ | شکل ۱۰-۳: نمودار لگاریتمی خطای مطلق انتگرال I_1 برحسب تعداد نقاط N (بر مبنای ۷ و ۴۰ بعد)..... |
| ۶۴ | شکل ۱۱-۳: نمودار لگاریتمی خطای مطلق انتگرال I_2 برحسب تعداد نقاط N (بر مبنای ۷ و ۴۰ بعد)..... |
| ۷۰ | شکل ۱-۴: روش مونت کارلو در یک بعد با پنج نقطه برای مثال یک متغیره..... |
| ۷۶ | شکل ۲-۴: مقایسه روش MC و QMC در همگرایی به جواب تخمینی..... |
| ۸۱ | شکل ۳-۴: نتایج عددی برای مثال (۱-۴-۴) در ۲۰۰۰۰ نقطه تصادفی..... |
| ۸۲ | شکل ۴-۴: نتایج عددی برای مثال (۲-۴-۴) در ۳۰۰۰۰ نقطه تصادفی..... |
| ۸۳ | شکل ۵-۴: نتایج عددی برای مثال (۳-۴-۴) در ۱۰۰۰۰۰ نقطه تصادفی برای چگالی یکنواخت..... |
| ۸۴ | شکل ۶-۴: نتایج عددی برای مثال (۳-۴-۴) در ۱۰۰۰۰۰ نقطه تصادفی برای چگالی غیریکنواخت..... |

چکیده

مولدهای شبه اعداد تصادفی و اعداد تصادفی در شبیه سازی مونت کارلو

طاهره امیری چایجانی

در این پایان نامه عملکرد مولد اعداد شبه تصادفی نیدریترا در حل انتگرال های با ابعاد بالا و معادلات انتگرالی با سایر دنباله های (t,s) از جمله هالتون، فائور و سوپول مقایسه کردیم. سپس روش های مختلف بهبود عملکرد این مولد را از جمله حذف نقاط اولیه، لیپد و اسکرمبل مورد بررسی قرار دادیم و برای اسکرمبل کردن دنباله نیدریترا از دنباله هالتون استفاده نمودیم.

واژه های کلیدی: اعداد تصادفی، اعداد شبه تصادفی، دنباله نیدریترا، شبیه سازی، مونت کارلو

Abstract

Quasi-random and random number generators in Monte-Carlo simulation

Tahereh Amiri Chaijani

In this thesis, we present and compare the Niederreiter quasi-random number generator approach to solve high-dimensional integrals and integral equations with (t, s) - sequences such as Halton, Faure and Sobol. Then, we employ the optimized version of this generator to improve, skipping first points, leaped and scrambling, and the performance of this sequence. Also, we used Halton sequence for scrambling Niederreiter sequence.

Keywords: Quasi-random number, random number, Niederrieter Sequence, simulation, Monte-Carlo

مقدمه:

در علوم مختلف مخصوصاً در مباحث مربوط به فرایند تصادفی مانند حل مسائل پیچیده مالی، نانو تکنولوژی، الگوریتم ژنتیک و ... می توان به نقش مهم روش مونت کارلو^۱ در حل چنین مسائلی پی برد. اساس روش مونت کارلو بر پایه نمونه گیری تصادفی است. نمونه های تصادفی را با تولید اعداد تصادفی و شبه تصادفی بدست می آورند.

ما در این پایان نامه سعی بر این داریم تا با کمک مولد اعداد تصادفی و شبه تصادفی و تولید چنین اعدادی به حل انتگرال های با ابعاد بالا و معادلات انتگرال خطی نوع اول و دوم بپردازیم و تلاش می کنیم با استفاده از مولد های شبه تصادفی که اصطلاحاً به دنباله های شبه تصادفی معروف هستند، سرعت همگرایی به جواب مسئله را افزایش و مقدار خطا را کاهش دهیم، در واقع ما می خواهیم هزینه ی محاسبات را کم کنیم.

از جمله اقداماتی که در این پایان نامه انجام خواهد گرفت، این است که ما با کمک روش های شبیه سازی از جمله روش شبیه سازی شبه مونت کارلو که از مولد شبه تصادفی نظیر دنباله نیدریتز^۲ و دنباله ی اسکرمبل شده ی آن استفاده می کند، بتوانیم به راه حلی که باعث کارایی بیشتر مدل تصادفی مورد نظر است، برسیم.

^۱. Monte-Carlo Method

^۲. Niederreiter Sequence

فصل اول

مفاهیم پایه ای احتمال و فرایندهای تصادفی

مقدمه :

در بسیاری از آزمایش‌هایی که بشر انجام می‌دهد نمی‌توان از قبل نتیجه را تعیین کرد. در زمان‌های گذشته دانشمندان فکر می‌کردند این نوع آزمایش‌ها به بازی‌های قمار و بازی‌های تصادفی منحصر می‌شود، اما امروز بشر دریافته است که بسیاری از موضوعات علوم مختلف به این صورت هستند. علم احتمال با این آزمایش‌ها موضوعیت می‌یابد و علی‌رغم آنکه نمی‌توان در مورد نوع آزمایش‌ها اظهار نظر قطعی کرد، اما سعی می‌شود گزاره‌هایی بیان شود که چگونگی وقوع نتایج متفاوت این آزمایش‌ها را نشان می‌دهند. دانشمندان توانستند در نیمه دوم قرن هفدهم تئوری احتمالات را بنیان‌گذاری کنند و پیشرفت چشم‌گیری در زمینه احتمال، آمار و فرایند تصادفی در این مدت دست‌یابند. نظریه‌ای که بدین‌سان برای بازی «شیر یا خط» یا «قرمز یا سیاه» پرورده شد. پاسکال^۱ و فرما^۲ از بنیان‌گذاران تئوری (نظریه) احتمال لقب گرفته‌اند. تصادفی بودن و فرایند تصادفی هم به لحاظ تئوری و هم به لحاظ نظری و ارتباط متقابل آنها با سایر رشته‌ها، به لحاظ کاربردی در رشته‌هایی مثل مخابرات، اقتصاد، ژنتیک و... به شدت مورد توجه ویژه قرار می‌گیرد [۶]. فرایند تصادفی ابتدا در علم فیزیک و برای توصیف پدیده‌های تصادفی که حالت آنها در طی زمان تغییر می‌کند، مطرح شد. فرایند تصادفی به بررسی پدیده‌هایی می‌پردازد که در آن دو مؤلفه تصادفی بودن و دارای مرحله یا زمان بودن مطرح است و روش‌های مطالعه‌ی این پدیده‌ها و ابزارهایی که برای مدل‌کردن آنها استفاده می‌شود را بررسی می‌کند.

در این فصل به توضیح مختصری در زمینه‌ی آمار، احتمال و فرایند تصادفی و مفاهیم پایه‌ای آنها می‌پردازیم [۶-۲].

۱-۱ : مفاهیم پایه ای احتمال

تعریف (۱-۱-۱): آزمایش‌های تصادفی

به آزمایشی که نتوان قبل از وقوع نتیجه آن را به طور قطعی تعیین کرد، آزمایش تصادفی می‌گویند. مانند پرتاب تاس، پرواز یک هواپیما، عمل جراحی یک بیمار و ... در واقع هر عملی که تصادف در نتیجه آن دخالت داشته باشد، آزمایش تصادفی نامیده می‌شود و مجموعه تمام رویدادهای ممکن آزمایش را فضای نمونه آن آزمایش گویند و با Ω نشان می‌دهیم. نتایجی را که از یک آزمایش به دست می‌آید، برآمد آزمایش نامند.

برای مثال فضای نمونه آزمایش پرتاب یک سکه $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ می‌باشد.

^۱.Pas kal

^۲.Ferma

۲-۱: اصول موضوع احتمال

تعریف (۱-۲-۱): σ -میدان (سیگما میدان)

فرض کنیم Ω مجموعه ای مرجع و $P(\Omega)$ مجموعه ای توانی Ω یعنی مجموعه ای تمام زیر مجموعه های Ω باشد. حال فرض کنیم \mathcal{F} زیر مجموعه ای از $P(\Omega)$ در واقع هر عضو \mathcal{F} زیر مجموعه ای از Ω است ولی \mathcal{F} لزوماً مانند $P(\Omega)$ شامل تمام زیر مجموعه های Ω نیست. در این صورت می گوییم \mathcal{F} یک σ -میدان است هرگاه:

$$(۱) \quad \emptyset \in \mathcal{F}$$

$$(۲) \quad \text{اگر } A \in \mathcal{F} \text{ آنگاه } A' \in \mathcal{F}$$

(۳) تحت اجتماع شمارا بسته باشد، یعنی اگر A_i ها از اعضای \mathcal{F} باشند آنگاه $\cup_i A_i \in \mathcal{F}$. این اجتماع می تواند متناهی یا نامتناهی باشد ولی باید شمارا باشد. یعنی اگر $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$ ، آنگاه $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

قضیه (۱-۲-۱): فرض کنیم \mathcal{F} ، σ -میدانی از زیر مجموعه های Ω باشد در این صورت :

$$\text{الف) } \emptyset \in \mathcal{F} \text{ و } \Omega \in \mathcal{F}$$

$$\text{ب) اگر } A_i \in \mathcal{F}, \text{ آنگاه } \bigcap_i A_i \in \mathcal{F} \text{ (اشتراک شمارا).}$$

$$\text{ج) اگر } A, B \in \mathcal{F}, \text{ آنگاه } A - B \in \mathcal{F}$$

برهان : رجوع شود به منبع [۲].

تعریف (۱-۲-۱): اگر \mathcal{F} ، σ -میدانی روی Ω باشد و $A \in \mathcal{F}$ می گوییم A نسبت به \mathcal{F} پیشامد است. یعنی اگر ما σ -میدان را عوض کنیم، پیشامدها نیز تغییر می کنند.

تعریف (۱-۲-۲): فرض کنیم Ω فضای نمونه و \mathcal{F} ، σ -میدانی از آن باشد. در این صورت تابع مجموعه ای

$$P: \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$$

را اندازه احتمال گوییم هرگاه اصول زیر در مورد P صادق باشد:

اصل اول: $P(\Omega)$ توجه می کنیم که هر σ -میدانی شامل Ω است لذا $P(\Omega)$ قابل تعریف است.

اصل دوم: اگر A_i پیشامد های دو به دو جدا از هم باشند، یعنی به ازای هر $i \neq j$ ، $A_i \cap A_j = \emptyset$ ، آنگاه

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$$

چون A_i ها از اعضای σ -میدان هستند، اجتماع آنها در حوزه ای تعریف P قرار می گیرد و لذا $P(\cup_i A_i)$ قابل تعریف است.

در برابری بالا i می تواند در مجموعه ای حداکثر شمارا حرکت کند.

اگر $A \in \mathcal{F}$ ، $P(A)$ مقدار P به ازای مجموعه ای A را احتمال A می گوییم.

به سه اصل بالا اصول کولموگوروف گویند. کولموگوروف یک ریاضیدان مشهور روسی بود که در سال ۱۹۳۳ این سه اصل را اصول موضوعی نظریه احتمال قرار داد.

تعریف (۱-۲-۱): σ -میدان تولید شده به وسیله ی مجموعه های باز را σ -میدان بورل می نامیم که با نماد B نشان می دهیم. هر عضو این σ -میدان را مجموعه ی بورل می گوئیم.

۱-۲-۱: فضای احتمال

تعریف (۱-۲-۲-۱): فرض کنیم Ω فضای نمونه و \mathcal{F} ، σ -میدانی از زیر مجموعه های Ω و $P: \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$ یک اندازه ی احتمال باشد. در این صورت سه تایی مرتب (Ω, \mathcal{F}, P) را فضای احتمال می نامیم. فضای احتمال برای ما مشخص می کند که اولاً پیشامدها را به عنوان زیر مجموعه از چه مجموعه ای در نظر گرفته ایم (Ω) ، ثانیاً کدام یک از این زیر مجموعه ها پیشامد هستند و کدام یک نیستند. اگر عضو \mathcal{F} باشند، پیشامدند و اگر عضو \mathcal{F} نباشند، پیشامد نیستند. سرانجام احتمال پیشامد ها را چگونه حساب کنیم (با استفاده از تابع P).

۲-۲-۱: احتمال شرطی

برخی آزمایش ها طوری طراحی شده اند که در حین آزمایش بخشی از اطلاعات در اختیار ما قرار می گیرند اما این اطلاعات به گونه ای نیست که نتیجه را کاملاً روشن کند و دیگر نیازی به احتمال نباشد در این صورت معمولاً با کمک احتمال شرطی مسئله را مورد بررسی قرار می دهیم. فرض کنیم در فضای احتمال (Ω, \mathcal{F}, P) ، B پیشامدی با احتمال مثبت باشد. احتمال وقوع پیشامد A از \mathcal{F} به شرط وقوع پیشامد B را با علامت $P(A|B)$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad ; \quad P(B) \neq 0$$

قضیه (۱-۲-۲-۱): احتمال کل (قانون احتمالات کل)

فرض کنید $\langle A_n \rangle$ دنباله ای از پیشامد های دو به دو ناسازگار باشند (به ازای هر $i \neq j$ ، $A_i \cap A_j = \emptyset$) و اجتماع آنها برابر Ω باشد. در این صورت به ازای هر پیشامد دلخواه A داریم :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(A|A_i)$$

برهان: رجوع شود به منبع [۲].

قضیه (۱-۲-۲): دستور بیز

فرض کنیم پیشامد های A_1, A_2, \dots افزایشی از فضای نمونه باشد (دو به دو ناسازگار و اجتماع آنها فضای نمونه Ω است). به ازای هر پیشامد مانند A داریم:

$$P(A_i|A) = \frac{P(A_i)P(A|A_i)}{\sum_j P(A_j)P(A|A_j)}$$

۱-۲-۳: استقلال پیشامد

تعبیر: دو پیشامد A و B مستقل اند، اگر وقوع یکی در وقوع یا عدم وقوع دیگری هیچ تأثیری نداشته باشند.

تعریف (۱-۲-۴): دو پیشامد A و B از فضای احتمال (Ω, \mathcal{F}, P) باشند. در این صورت A و B را مستقل گوییم هرگاه:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

۱-۲-۴: متغیر تصادفی

تعریف (۱-۲-۴): تابع $X: \Omega \rightarrow R$ را متغیر تصادفی نسبت به σ -میدان \mathcal{F} از زیر مجموعه های Ω گوییم هرگاه به ازای هر مجموعه B از σ -میدان بورل B داشته باشیم:

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega: X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

به عبارت دیگر متغیر تصادفی تابعی است از تصویر معکوس هر مجموعه B از σ -میدان بورل توسط آن پیشامد است. معمولاً $X^{-1}(B)$ را به صورت $(X \in B)$ نمایش می دهند.

اگر برد متغیر تصادفی X مجموعه ای شمارا باشد X را گسسته گویند و اگر برد X مجموعه ای ناشمارا باشد، X را پیوسته گویند. مجموعه های شمارا با زیر مجموعه ای از (N) تناظر یک به یک دارند و مجموعه ای ناشمارا معمولاً به صورت یک یا چند بازه از اعداد حقیقی هستند. توجه کنید که هر مجموعه متناهی شمارا است.

به عنوان مثال فرض کنید سه سکه پرتاب شود، فضای نمونه ای عبارت است از:

$$\Omega = \{TTT, TTH, THT, HTT, THH, HTH, HHT, HHH\}$$

متغیر تصادفی X برای هر نتیجه تعداد شیرها را می شمارد:

$$X(TTT) = 0$$

$$X(TTH) = 1$$

در این مثال مجموعه مقادیر یا برد X که آن را با $X(\Omega)$ نشان می دهند. مجموعه ای چهار عضو $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ است که این متغیر تصادفی X یک متغیر تصادفی گسسته است.

۱-۲-۵: توزیع احتمال

آنچه که در تعریف متغیر تصادفی ضروری است Ω و σ -میدانی از زیر مجموعه‌های Ω است. حال فرض کنیم $(\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (R, \mathcal{B})$ متغیر تصادفی باشد. می‌خواهیم به کمک X و P ، (R, \mathcal{B}) را تبدیل به فضای احتمال کنیم. تمام مقدمات فراهم است، فقط کافی است به ازای هر $B \in \mathcal{B}$ ، احتمال B را تعریف کنیم. این احتمال را که به کمک X و P تعریف می‌شود با نماد P_X نشان می‌دهیم. قضیه زیر این احتمال را تعریف می‌کند که برای اثبات به [۲] رجوع کنید.

قضیه (۱-۲-۵-۱): با مفروضات بالا تابع $P_X(B): \mathcal{B} \rightarrow [0,1]$ با ضابطه $P_X(B) = P(X^{-1}(B))$ یک اندازه احتمال روی \mathcal{B} تعریف می‌کند.

تعریف (۱-۲-۵-۱): $P_X(B)$ را اندازه احتمال تولید شده به وسیله X روی \mathcal{B} یا توزیع احتمال X روی \mathcal{B} می‌گوییم.

تعریف (۱-۲-۵-۲): تابع F را بر R با ضابطه

$$F_X(t) = P_X((-\infty, t]) = P(X^{-1}(-\infty, t]) , \quad t \in R$$

تابع توزیع X می‌نامیم.

تابع توزیع دارای خواص زیر است:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 1 \quad (۱)$$

(۲) F تابعی صعودی است یعنی اگر $t_1 < t_2$ ، آنگاه، $F_X(t_1) < F_X(t_2)$

(۳) F از راست پیوسته است، یعنی $F_X(t^+) = F_X(t)$

(۴) منظور از $F(b^-)$ حد چپ F در b است.

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$P(a < X < b) = F(b^-) - F(a)$$

$$P(X = a) = F(a) - F(a^-)$$

۱-۲-۶: توابع چگالی احتمال گسسته و پیوسته

تعریف (۱-۲-۶-۱): اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد، تابعی که برای هر مقدار x در برد X با $f(x) = P(X = x)$

داده می‌شود، تابع چگالی احتمال گسسته X نامیده می‌شود. از طرفی تابعی با مقادیر $f(x)$ که روی مجموعه اعداد حقیقی

تعریف شده است، تابعی چگالی احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته X خوانده می‌شود اگر و تنها اگر به ازای هر دو مقدار

حقیقی ثابت a و b با $a \leq b$ ، $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ و دارای دو خاصیت زیر است:

$$(۱) f(x) \geq 0, \quad x \text{ برای هر}$$

$$(۲) \text{ اگر } X \text{ پیوسته باشد، } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \text{ و اگر گسسته باشد، } \sum_x f(x) = 1$$

۷-۲-۱: امید ریاضی (میانگین)

تعریف (۷-۲-۱): فرض کنید (Ω, F, P) فضای احتمال و $X: \Omega \rightarrow R$ متغیری تصادفی باشد. در این صورت انتگرال X

را که با نماد $\int_{\Omega} X dP$ نشان می‌دهیم، به صورت حد عبارت زیر روی تعریف افراز Ω به وسیله پیشامدها تعریف می‌کنیم:

$$\int_{\Omega} X dP = \lim \sum_i X(\omega_i) P(A_i)$$

که در آن A_i ها پیشامد بوده و افرازی از Ω را تشکیل می‌دهند. اگر حد مذکور موجود نباشد، می‌گوییم انتگرال موجود نیست.

امید ریاضی یا میانگین متغیر تصادفی X را با $E(X)$ یا μ نشان می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E(X) = \mu = \begin{cases} \sum_x x P(X = x) & \text{اگر } X \text{ گسسته باشد} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx & \text{اگر } X \text{ پیوسته باشد} \end{cases}$$

دقت شود $E(X)$ در صورت همگرایی مطلق سری یا انتگرال بالا تعریف می‌شود و وجود خواهد داشت.

خواص امید ریاضی:

$$(1) \text{ اگر } a \leq X \leq b \text{ آنگاه } a \leq E(X) \leq b \text{ در حالت خاص اگر } X \geq 0 \text{ پس } E(X) \geq 0$$

$$(2) \text{ امید ریاضی تابعی است از } X:$$

فرض کنید $Y = g(X)$ تابعی از متغیر تصادفی X باشد که تابع احتمال X موجود است، در این صورت

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_x g(x) \cdot P(X = x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx \end{cases}$$

در حالت خاص $E[X^m]$ گشتاور مرتبه (m) ام گفته می‌شود.

$$(3) \text{ برای هر متغیر تصادفی } X \text{ و اعداد حقیقی } a \text{ و } b:$$

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

مثال (۷-۲-۱): امید ریاضی متغیر تصادفی X را که دارای تابع چگالی زیر است، بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} 4e^{-4x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x 4e^{-4x} dx$$

حل:

با استفاده از انتگرال جزء به جزء خواهیم داشت:

$$E(X) = \frac{1}{4}$$

قضیه (۱-۲-۷-۱):

اگر X متغیری نامنفی و پیوسته باشد:

$$E(X) = \int_0^{\infty} P(X > t) dt = \int_0^{\infty} (1 - F_X(t)) dt$$

اگر X گسسته باشد و مقادیر صحیح و نامنفی را اختیار کند آنگاه:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i)$$

برهان: رجوع شود به منبع [۶].

۱-۲-۸: واریانس (پراش)

واریانس یک معیار برای اندازه گیری پراکندگی است. واریانس متغیر تصادفی X را $Var(X)$ یا σ^2 نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X - \mu)^2$$

که در آن $\mu = E(X)$ با توجه به خاصیت امید ریاضی به راحتی دیده می شود $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$.

خواص واریانس:

$$(1) \quad Var(X) \geq 0 \quad \text{پس همواره } E(X^2) \geq \mu^2 \text{ یا همواره } E(X^2) \geq (E(X))^2 \text{ همچنین}$$

$$Var(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = \mu) = 1$$

(۲) برای هر متغیر تصادفی X و اعداد حقیقی a و b :

$$Var(aX + b) = a^2 Var(x)$$

تذکر: جذر مثبت واریانس را انحراف معیار می نامند:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

۱-۲-۹: تابع مولد گشتاورها

به $E(X - a)^k$ گشتاور مرتبه k ام توزیع X حول نقطه (a) می گویند و در حالت خاص به $\mu_k = E(X - \mu)^k$ گشتاور مرکزی مرتبه k ام می گویند و به $E(X^k) = m_k$ گشتاور مرتبه k ام توزیع X گفته می شود. بدیهی است بین μ_k و m_k رابطه وجود دارد.

تعریف (۱-۲-۹-۱): تابع $M_X(t) = E(e^{tX})$ را که در بازه ای از اعداد حقیقی شامل صفر تغییر می کند، تابع مولد گشتاورهای X گویند.