بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

گرایش ریاضی محض

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی زنجیرهای اتمی تقلیل یافته از مدول های آرتینی

از :

مجید کریمی زاویه

استاد راهنما :

دکتر حبیب الله انصاری طرقی

مرداد ۸۶

تقدیم به اسطوره های عشق محبت :

پدر بزرگوارم

و

مادر مهربانم

تقدیر و تشکر

سپاس فراوان خداوند تبارک و تعالی را که به بنده حقیر این توفیق را عنایت فرمود که در راه تحصیل علم و دانش گامی هر چند کوچک بردارم. یقینا در این راه لطف و عنایت خداوند و همراهی و تشویق خانواده و کمک و راهنمایی اساتید گرانقدر همراه من بوده است. لذا بر خود فرض می دانم که از این عزیزان تشکر و قدردانی نمایم.

در ابتدا از خانواده عزیزم که همواره همراه و مشوق من در این راه بوده اند کمال تشکر و قدردانی را دارم. بر دست پاک پدر بزرگوارم و مادر مهربانم بوسه می زنم و از خداوند تبارک و تعالی عمر طولانی همراه با عزت را برای این دو عزیز خواهانم.

همچنین از برادر عزیزم به پاس کمک و تشویق هایش تشکر می نمایم.

از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر حبیب الله انصاری طرقی که راهنمایی اینجانب را بر عهده داشتند و در طول انجام این کار از نظرات و راهنمایی های راهگشا و ارزشمند ایشان بهره مند شده ام کمال تشکر و قدردانی را دارم و از خداوند تبارک و تعالی سلامتی و توفیقات روز افزون را برای ایشان خواهانم.

همچنین از اساتید گرانقدر آقای دکتر علی اصغر ورسه ای و آقای دکتر شهاب الدین ابراهیمی و آقای دکتر رضا احمدی که از محضر این اساتید در طول دوران تحصیل بهره مند شده ام کمال تشکر و قدردانی را دارم.

همچنین از اساتید گرانقدر آقای دکتر شهاب الدین ابراهیمی و آقای دکتر منصور هاشمی که داوری پایان نامه اینجانب را بر عهده داشتند و از آقای دکتر بهروز فتحی مدیر محترم گروه ریاضی کمال تشکر و قدردانی را دارم.

مجید کریمی زاویه

مرداد۸٦

فهرست مطالب

چکیده

بررسی زنجیرهای اتمی تقلیل یافته از مدول های آرتینی

مجید کریمی زاویه

فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد. نشان داده می شود [5] که هر R- مدول آرتینی A یک زنجیر اتمی

$$C_A: \; A = A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n = 0$$

دارد بطوریکه

$$Att_R(A) = \{Ann_R(\frac{A_{i-1}}{A_i}) \mid i=1,2,\ldots,n\}$$

همچنین آندسته از مدول های آرتینی A که برای هر کدام از آنها یک زنجیر اتمی C_A وجود دارد بطوریکه طول C_A برا بر با $|Att_R(A)|$ باشد مورد مطالعه قرار می گیرند.

کلید واژه : صافی اول - بعد نوتری- زنجیر اتمی - زنجیر اتمی تقلیل یافته - زنجیر اتمی تقلیل یافته کوتاه -

ایده آل های اول ضمیمه - دوگانی ماتلیس – فانکتور کوهمولوژی موضعی

Abstract

On reduced atomic chains of artinian modules

Majid karimi zavieh

Let R be a commutative ring. It is shown that [5] every artinian R – module A possesses an atomic chain

$$C_A : \ A = A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n = 0$$

so that

$$\mathrm{Att}_R(A) = \{\mathrm{Ann}_R(\frac{A_{i-1}}{A_i}) \mid i=1,2,\ldots,n\}$$

Also artinian modules A for which there exist an atomic chain C_A such that length of C_A is equal to $|\mathrm{Att}_R(A)|$ are studied.

Keywords : Prime filtration - Noetherian dimension – Atomic chain – Reduced atomic chain – Short reduced atomic chain – Attached prime ideals – Matlis duality –Local cohomology functor

مقدمه

برای هر R- مدول نوتری N یک زنجیر $F_N : 0 = N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_n = N$ وجود دارد که در آن برای هر $1 \leq i \leq n$ ، عامل $\frac{N_{i-1}}{N_i}$ با $\frac{R}{P_i}$ برای ایده آل های اول P_i از R ، یکریخت است. این زنجیرها ابزار مناسبی برای مطالعه مدول های نوتری می باشند. با توجه به نماد گذاری [8] ، چنین زنجیری را یک صافی اول از N خواهیم نامید و مجموعه ایده آل های اولی که بعنوان عامل در N رخ می دهند را با نماد $P(F_N)$ و طول F_N را با نماد $L(F_N)$ نمایش می دهیم. بدیهی است که داریم $Ass_R(N) \subseteq P(F_N) \subseteq Supp_R(N)$.

A.Li در [8] ، مدول های با تولید متناهی N روی حلقه نوتری R را که برای آنها صافی اولی چون F_N وجود دارد بطوریکه $Ass_R(N) = P(F_N)$ بررسی کرده است. A.Li چنین مدول هایی را ، APF- نمایش پذیر نامیده و از چنین مدول هایی یک کلاس محدود می سازد. همچنین A.Li در [8] ، مدول هایی چون N را که برای آنها ، APF- نمایش پذیری چون F_N وجود دارد بطوریکه $|Ass_R(N)| = L(F_N)$ بررسی کرده و چنین مدول هایی را ، SAPF- نمایش پذیر نامیده است.

D.Kirby در [6] نشان داده است که برای مدول آرتینی A یک زنجیر $C_A : A = A_0 \supset A_1 \supset .. \supset A_n = 0$ وجود دارد که برای هر $1 \leq i \leq n$ ، عامل $\frac{A_{i-1}}{A_i}$ یک R- مدول اتمی است بطوریکه $Ann_R(\frac{A_{i-1}}{A_i})$ یک ایده آل اول است. او چنین زنجیری را یک زنجیر اتمی نامیده و نشان داده است که زنجیرهای اتمی از مدول های آرتینی از بسیاری جهات مشابه صافی های اول از مدول های نوتری می باشند. فرض کنید $L(C_A)$ نشان دهنده طول C_A باشد و $P(C_A) = \{Ann_R(\frac{A_{i-1}}{A_i}) \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$. در اینصورت خواهیم داشت $Att_R(A) \subseteq P(C_A)$.

هدف این پایان نامه بررسی زنجیرهای اتمی از مدول های آرتینی و ساختن یک رابطه میان زنجیرهای اتمی و صافی های اول از طریق دوگانی ماتلیس است.

در این پایان نامه :

۱- خواص اساسی زنجیر های اتمی از مدول های آرتینی بررسی می شوند.

۲- نشان داده می شود که هر مدول آرتینی A زنجیر اتمی C_A دارد بطوریکه $Att_R(A) = P(C_A)$.

چنین زنجیری زنجیر اتمی تقلیل یافته یا به اختصار یک RAC −نمایش از A و A نیز یک R −مدول RAC −نمایش پذیر نامیده می شود.

گزاره 2.3 در [8] نشان می دهد یک حلقه نوتری R وجود دارد که برای هر صافی اول F_R از R داریم $Ass_R(R) \subset P(F_R)$. بنابراین از این جهت مدول های آرتینی بهتر از مدول های نوتری رفتار می کنند.

همچنین مدول های آرتینی که برای آنها یک RAC −نمایش چون C_A وجود دارد بطوریکه $|Att_R(A)| = L(C_A)$ مطالعه می شوند.

چنین زنجیری را زنجیر اتمی تقلیل یافته کوتاه یا به اختصار $SRAC$ − نمایش از A و A نیز یک R − مدول $SRAC$ − نمایش پذیر نامیده می شود.

علاوه بر این از یک RAC مفروض از A ، می توان برای زیرمدول ها و خارج قسمت های معینی از A یک RAC بدست آورد.

۳- از یک RAC معین از A یک RAC برای $S^{-1}A$ می سازیم .

٤- اگر R یک حلقه نوتری شبه− موضعی کامل باشد آنگاه از طریق دوگانی ماتلیس یک رابطه میان R − مدول های آرتینی $SRAC$ − نمایش پذیر و R − مدول های نوتری $SAPF$ − نمایش پذیر برقرار می کنیم.

در سرتاسر این پایان نامه R حلقه ای جابجایی و یکدار با شرط $1_R \neq 0$ و A یک R − مدول آرتینی است. برای هر همریختی حلقه ای $f : R \rightarrow S$ فرض کنید که $f^* : Spec(S) \rightarrow Spec(R)$ نگاشت القایی باشد.

همچنین منظور ما از حلقه نوتری نیم− موضعی کامل ، کامل بودن آن با توجه به توپولوژی تعریف شده بوسیله رادیکال جاکبسون آن می باشد .

فصل اول

مقدمات ومطالب
پیش نیاز

در این فصل آن دسته از مفاهیم و قضایایی را که در فصل های بعدی از آنها استفاده خواهیم کرد را تحت عنوان تعریف یا لم و یا قضیه بیان می کنیم و از آنجا که اثبات این قضایا در کتب مختلف وجود دارد از اثبات آنها صرفنظر می کنیم و خواننده را به منابع مربوطه ارجاع می دهیم.

(۱-۱) تعریف : فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یکدار و I یک ایده آل از R باشد. در اینصورت $\sqrt{I} = \{r \in R \mid \exists n \in N\ ,\ r^n \in I\}$ یک ایده آل R است و آن را رادیکال I می نامیم.

(۱-۲) لم : فرض کنیم I ایده آل حلقه جابجایی و یکدار R باشد. در اینصورت واریته I را با نماد $\mathrm{Var}(I)$ نشان می دهیم و تعریف می کنیم $\mathrm{Var}(I) = \{P \in \mathrm{Spec}(R) \mid P \supseteq I\}$. در اینصورت داریم $\sqrt{I} = \bigcap_{P \in \mathrm{Var}(I)} P$.

برهان : (ر.ک.۱۷).

(۱-۳) لم : فرض کنیم P ایده آل اول حلقه جابجایی و یکدار R باشد. در اینصورت اگر $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ایده آل هایی از R باشند گزاره های زیر معادلند :

۱- عددی مانند j بطوریکه $1 \le j \le n$ وجود دارد که $P \supseteq I_j$.

۲- $P \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} I_i$.

۳- $P \supseteq \prod_{i=1}^{n} I_i$.

برهان : (ر.ک.۱۷).

(۱-٤) لم : فرض کنیم $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ایده آل هایی از حلقه جابجایی و یکدار R باشند. اگر P ایده آل اولی از R باشد بطوریکه $P = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$. در اینصورت عددی مانند j بطوریکه $1 \le j \le n$ وجود دارد که $P = I_j$.

برهان : (ر.ک.۱۷).

(۱-۵) تعریف : فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یکدار باشد بطوریکه تنها یک ایده آل ماکزیمال داشته باشد. در اینصورت R را یک حلقه شبه- موضعی می نامیم.

(۱-۶) تعریف : فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یکدار باشد بطوریکه تنها تعداد متناهی ایده آل ماکزیمال داشته باشد. در اینصورت R را یک حلقه نیم- موضعی می نامیم.

(۱-۷) تعریف : فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یکدار باشد. در اینصورت رادیکال جاکبسون R را با نماد $J(R)$ نشان می دهیم که عبارت است از اشتراک تمامی ایده آل های ماکزیمال R . حال اگر مجموعه ایده آل های ماکزیمال R را با نماد $\text{Max}(R)$ نشان می دهیم. در اینصورت خواهیم داشت $J(R) = \bigcap_{M \in \text{Max}(R)} M$.

همچنین رادیکال پوچ R را با نماد $\text{Nil}(R)$ نشان می دهیم و بصورت زیرتعریف می کنیم

$$\text{Nil}(R) = \{r \in R \mid \exists n \in N,\ r^n = 0\}$$

در اینصورت خواهیم داشت $\text{Nil}(R) = \bigcap_{P \in \text{Spec}(R)} P$.

(۱-۸) تعریف : فرض کنیم A یک R-مدول و Σ مجموعه تمام زیر مدول های A باشد. در اینصورت :

الف - A را یک R-مدول نوتری می نامیم هرگاه $(\Sigma, \subseteq)$ در شرط زنجیر صعودی و یا بطور معادل در شرط ماکزیمال صدق کند.

ب - A را یک R-مدول آرتینی می نامیم هرگاه $(\Sigma, \supseteq)$ در شرط زنجیر نزولی و یا بطور معادل در شرط مینیمال صدق کند.

(۱-۹) تعریف : فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یکدار باشد. R را یک حلقه نوتری می نامیم هرگاه R بعنوان یک R-مدول نوتری باشد.

(۱-۱۰) قضیه : فرض کنیم A مدولی روی حلقه جابجایی و یکدار R باشد. در اینصورت A نوتری است اگر و تنها اگر هر زیر مدول A با تولید متناهی باشد.

برهان : (ر.ک.۱۷).

(۱-۱۱) قضیه : فرض کنیم A مدولی روی حلقه جابجایی و یکدار R و B زیر مدولی از A باشد. در اینصورت

R- مدول A نوتری (آرتینی) است اگر و تنها اگر B و $\frac{A}{B}$ نوتری (آرتینی) باشند.

برهان : (ر.ک.۱۷).

(۱-۱۲) لم : فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یکدار باشد. در اینصورت اگر R حلقه نوتری (آرتینی) باشد آنگاه هر

R- مدول با تولید متناهی چون A نیز نوتری (آرتینی) می باشد.

برهان : (ر.ک.۱۷).

(۱-۱۳) لم : فرض کنیم A مدولی نوتری روی حلقه جابجایی و یکدار R باشد. در اینصورت $T = \frac{R}{\mathrm{Ann}_R(A)}$ یک

حلقه نوتری است.

برهان : (ر.ک.۱۷).

(۱-۱٤) لم : فرض کنیم A مدولی آرتینی و با تولید متناهی روی حلقه جابجایی و یکدار R باشد. در اینصورت

$T = \frac{R}{\mathrm{Ann}_R(A)}$ یک حلقه آرتینی است.

برهان : (ر.ک.۱۷).

(۱-۱۵) قضیه : فرض کنیم A مدولی روی حلقه جابجایی و یکدار R باشد بطوریکه A بوسیله ضرب تعداد متناهی

ایده آل ماکزیمال R که لزوما" متمایز نیستند پوچ گردد. بعبارت دیگر عددی چون $t \in N$ و ایده آل های ماکزیمال

$M_1, M_2, \ldots, M_t$ از R وجود داشته باشند بطوریکه $M_1 M_2 \ldots M_t A = 0$. در اینصورت A آرتینی است اگر و

تنها اگر نوتری باشد.

برهان : (ر.ک.۱۷).

(۱-۱٦) لم : فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یکدار و آرتینی باشد. در اینصورت هر ایده آل اول R یک ایده آل

ماکزیمال R است.

برهان : (ر.ک.۱۷).

(۱–۱۷) لم : فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یکدار و آرتینی باشد. در اینصورت R تنها تعداد متناهی ایده آل ماکزیمال دارد.

برهان : (ر.ک.۱۷).

(۱–۱۸) تعریف : فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یکدار و I یک ایده آل از R باشد. در اینصورت I را یک ایده آل پوچتوان R می نامیم هرگاه عددی چون $t \in N$ وجود داشته باشد بطوریکه $I^t = 0$.

(۱–۱۹) قضیه : فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یکدار و آرتینی و $Nil(R)$ رادیکال پوچ R باشد. در اینصورت $Nil(R)$ یک ایده آل پوچتوان R است. (یعنی عددی چون $t \in N$ وجود دارد بطوریکه $[Nil(R)]^t = 0$).

برهان : (ر.ک.۱۷).

(۱–۲۰) تعریف : فرض کنیم A مدولی روی حلقه جابجایی و یکدار R و B زیر مدولی از A باشد. در اینصورت $(B :_R A) = \{r \in R \mid rA \subseteq B\}$ یک ایده آل R است. اگر B زیر مدول صفر A باشد (یعنی $B = 0$) در اینصورت $(0 :_R A)$ را پوچساز A در R می نامیم و با نماد $Ann_R(A)$ نمایش می دهیم . در اینصورت خواهیم داشت $Ann_R(A) = \{r \in R \mid \forall a \in A \, , \, ra = 0\}$.

(۱–۲۱) قضیه : فرض کنیم $\{A_i\}_{i \in I}$ یک خانواده از R– مدول‌ها باشد. در اینصورت خواهیم داشت

$$(0 :_R \sum_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (0 :_R A_i)$$

برهان : (ر.ک.۱۷).

(۱–۲۲) تعریف : فرض کنیم A مدولی روی حلقه جابجایی و یکدار R باشد. در اینصورت A را یک R– مدول ساده می نامیم هرگاه A زیر مدول سره ناصفر نداشته باشد.(یعنی تنها زیر مدول های A، صفر و خود A باشند.)

(۱–۲۳) قضیه : فرض کنیم A مدولی روی حلقه جابجایی و یکدار R باشد. در اینصورت گزاره های زیر معادلند :

۱– A یک R– مدول ساده است.

۲- A یک R- مدول دوری است و هر عضو ناصفر A یک مولد برای A است.

۳- ایده آل ماکزیمالی از R چون M وجود دارد بطوریکه $A \cong \frac{R}{M}$.

برهان : (ر.ک.۱۷).

(۱-۲٤) تعریف : فرض کنیم A مدولی روی حلقه جابجایی و یکدار R باشد. در اینصورت منظور ما از زنجیره اکید از زیر مدول های A عبارت است از زنجیره ای متناهی و اکیداً" صعودی از زیر مدول های A چون

$$0=A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_{n-1} \subset A_n = A \quad (*)$$

طول این زنجیر تعداد علامت های $\subset$ یعنی یکی کمتر از تعداد زیر مدول های موجود در زنجیره می باشد. هر زنجیره اکید از زیر مدول های A چون $(*)$را یک سری ترکیبی برای A می نامیم هرگاه برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $\frac{A_i}{A_{i-1}}$ یک R- مدول ساده باشد. همچنین R- مدول A را با طول متناهی می نامیم هرگاه سری ترکیبی داشته باشد.

(۱-۲۵) قضیه : فرض کنیم A مدولی روی حلقه جابجایی و یکدار R باشد. در اینصورت A با طول متناهی است اگر و تنها اگر A نوتری و آرتینی باشد.

برهان : (ر.ک.۱۷).

(۱-۲٦) قضیه : فرض کنیم A و B دو R- مدول باشند. در اینصورت :

۱- $\mathrm{Hom}_R(-,B)$ یک فانکتور کنتراواریانت دقیق چپ است. یعنی اگر $0 \to L \to M \to N \to 0$ یک دنباله دقیق کوتاه از R- مدول ها و R- همریختی ها باشد در اینصورت

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(N,B) \to \mathrm{Hom}_R(M,B) \to \mathrm{Hom}_R(L,B)$$

یک دنباله دقیق از Z- مدول ها و Z- همریختی ها می باشد.

۲- $A \otimes_R -$ یک فانکتور کوواریانت دقیق راست است. یعنی اگر $0 \to L \to M \to N \to 0$ یک دنباله دقیق کوتاه از R- مدول ها و R- همریختی ها باشد در اینصورت $A \otimes_R L \to A \otimes_R M \to A \otimes_R N \to 0$ یک دنباله دقیق از Z- مدول ها و Z- همریختی ها می باشد.

برهان : (ر.ک.۷).

(۱–۲۷) تعریف : فرض کنیم F یک R– مدول باشد. در اینصورت F را یک R– مدول تخت می نامیم هرگاه

$F\otimes_R -$ یک فانکتور کوواریانت دقیق باشد. یعنی اگر $0\to L\to M\to N\to 0$ یک دنباله دقیق کوتاه از R– مدول ها

و R– همریختی ها باشد در اینصورت $0 \to F\otimes_R L \to F\otimes_R M \to F\otimes_R N \to 0$ یک دنباله دقیق کوتاه از

Z– مدول ها و Z– همریختی ها باشد.

(۱–۲۸) قضیه : فرض کنیم E یک R– مدول باشد. در اینصورت گزاره های زیر معادلند :

۱– برای هر R– همریختی یک به یک دلخواه چون $f : A\to B$ و هر R– همریختی دلخواه چون $g : A\to E$ ،

R– همریختی چون $h : B\to E$ وجود داشته باشد بطوریکه $h o f = g$.

۲– برای هر R– همریختی یک به یک دلخواه چون $\alpha : I\to R$ بطوریکه I یک ایده آل R است و برای هر R–

همریختی دلخواه چون $\beta : I\to E$ ، R– همریختی چون $\delta : R\to E$ وجود داشته باشد بطوریکه $\delta o \beta = \alpha$.

۳– برای هر دنباله دقیق کوتاه $0\to L\to M\to N\to 0$ از R– مدول ها و R– همریختی ها دنباله

$$0\to \mathrm{Hom}_R(N,E)\to \mathrm{Hom}_R(M,E)\to \mathrm{Hom}_R(L,E)\to 0$$

یک دنباله دقیق کوتاه از Z– مدول ها و Z– همریختی می باشد.

برهان : (ر.ک.۱۸).

(۱–۲۹) تعریف : فرض کنیم E یک R– مدول باشد. در اینصورت E را یک R– مدول انژکتیو می نامیم هرگاه E در

یکی از شرایط معادل قضیه (۱– ۲۸) صدق کند.

(۱–۳۰) قضیه : فرض کنیم $\{E_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از R– مدول ها باشد. در اینصورت :

۱– $\prod_{i\in I} E_i$ انژکتیو است اگروتنها اگر برای هر $i\in I$ ، E_i باشد.

۲– اگر $\bigoplus_{i\in I} E_i$ انژکتیو باشد آنگاه برای هر $i\in I$ ، E_i انژکتیو است.

۳– اگر مجموعه اندیس گذار I متناهی باشد و برای هر $i\in I$ ، E_i انژکتیو باشد آنگاه $\bigoplus_{i\in I} E_i$ انژکتیو است.

برهان : (ر.ک.۱۸).

(۱–۳۱) تعریف : فرض کنیم A یک R– مدول باشد. در اینصورت R– مدول B را یک توسیع A می نامیم هرگاه

A زیر مدولی از B باشد.

(۱-۳۲) تعریف : فرض کنیم A یک R- مدول باشد. در اینصورت R- مدول E را یک توسیع انژکتیو می نامیم هر گاه اولا" A زیر مدولی از E باشد ثانیا" E انژکتیو باشد.

(۱-۳۳) تعریف : فرض کنیم A یک R- مدول باشد. در اینصورت R- مدول E را یک توسیع انژکتیو مینیمال می نامیم هرگاه اولا" E یک توسیع انژکتیو A باشد ثانیا" اگر E' یک زیر مدول سره E باشد که شامل A باشد آنگاه E' انژکتیو نباشد.

(۱-۳۴) تعریف : فرض کنیم A یک R- مدول باشد. در اینصورت R- مدول B را یک توسیع اساسی A می نامیم هرگاه برای هر زیر مدول ناصفر از B چون C داشته باشیم $A\bigcap C \neq 0$. این تعریف معادل است با این شرط که برای هر عضو ناصفر $b\in B$ ، عضوی چون $r\in R$ وجود داشته باشد بطوریکه ra یک عضو ناصفر A باشد.

(۱-۳۵) قضیه : فرض کنیم $\{A_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از R- مدول ها باشند. فرض کنیم برای هر $i\in I$ ، E_i توسیع اساسی A_i باشد. در اینصورت $\bigoplus_{i\in I} E_i$ توسیع اساسی $\bigoplus_{i\in I} A_i$ است.

برهان : (ر.ک.۱۸).

(۱-۳۶) تعریف : فرض کنیم A یک R- مدول باشد. در اینصورت R- مدول B را یک توسیع اساسی ماکزیمال A می نامیم هرگاه اولا" B یک توسیع اساسی A باشد ثانیا" اگر B' یک توسیع سره B باشد آنگاه B' توسیع اساسی A نباشد.

(۱-۳۷) قضیه : فرض کنیم A یک R- مدول و E یک توسیع انژکتیو A باشد. در اینصورت گزاره های زیر معادلند :

۱- E یک توسیع اساسی انژکتیو A است.

۲- E یک توسیع اساسی ماکزیمال A است.

۳- E یک توسیع انژکتیو مینیمال A است.

برهان : (ر.ک.۱۸).

(۱-۳۸) تعریف : فرض کنیم E یک R- مدول باشد. در اینصورت E را پوش انژکتیو A می نامیم و با نماد $E(A)$

نمایش می دهیم هرگاه E در یکی از شرایط معادل قضیه (۱– ۳۷) صدق کند.

(۱–۳۹) قضیه : فرض کنیم $A_1, A_2, \dots, A_n$ ، R– مدول باشند. در اینصورت $\bigoplus_{i=1}^{n} E(A_i)$ پوش انژکتیو $\bigoplus_{i=1}^{n} A_i$ است. بعبارت دیگر داریم $E(\bigoplus_{i=1}^{n} A_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} E(A_i)$.

برهان : (ر.ک.۱۸).

(۱–٤۰) تعریف : فرض کنیم A یک R– مدول باشد.زیر مدول B از A را یک زیر مدول تحویل ناپذیر A می نامیم هرگاه اولا" $B \neq A$ ثانیا" زیرمدول هایی چون C و D وجود نداشته باشند بطوریکه $C \subset A$ و $D \subset A$ و $B = C \bigcap D$. بعبارت دیگر اگر $C \subset A$ و $D \subset A$ و $B = C \bigcap D$ آنگاه $B = C$ یا $B = D$.

(۱–٤۱) تعریف : فرض کنیم A یک R– مدول باشد. A را یک R– مدول تجزیه ناپذیر می نامیم هرگاه اولا" $A \neq 0$ ثانیا" A تنها جمع مستقیم صفر و خودش باشد.

(۱–٤۲) قضیه : فرض کنیم A یک R– مدول باشد. در اینصورت گزاره های زیر معادلند :

۱– A تجزیه ناپذیر است.

۲– $A \neq 0$ و A پوش انژکتیو هر زیر مدول ناصفر خودش است.

۳– زیر مدول صفر A تحویل ناپذیر است.

برهان : (ر.ک.۱۸).

(۱–٤۳) قضیه : فرض کنیم A یک R– مدول باشد. در اینصورت داریم :

۱– $E(A)$ تجزیه ناپذیر است اگروتنها اگر زیر مدول صفر A تحویل ناپذیر باشد.

۲– $E(\frac{A}{B})$ تجزیه ناپذیر است اگروتنها اگر زیر مدول B از A تحویل ناپذیر باشد.

برهان : (ر.ک.۱۸).

(۱–٤٤) لم : فرض کنیم A یک R– مدول باشد. در اینصورت A آرتینی است اگروتنها اگر ایده آل های ماکزیمال

$M_1, M_2, \ldots, M_t$ وجود داشته باشند بطوریکه A را بتوان در $\bigoplus_{i=1}^{t} E(\frac{R}{M_i})$ نشاند.

برهان : (ر.ک.۱۸).

(۱-۴۵) تعریف : فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یکدار و S یک زیر مجموعه ناتهی از R باشد. در اینصورت S را زیر مجموعه بسته ضربی R می نامیم هرگاه :

۱- $1 \in S$.

۲- برای هر $s_1, s_2 \in S$ داشته باشیم $s_1 s_2 \in S$.

(۱-۴۶) تعریف : فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یکدار و S زیر مجموعه بسته ضربی R باشد. رابطه ~ را در R×S بصورت زیر تعریف می کنیم

$$(r, s) \sim (r', s') \iff \exists\, t \in S, \quad t(rs' - r's) = 0$$

در اینصورت رابطه ~ در R×S یک رابطه هم ارزی است. حال برای هر $(r, s) \in R\times S$ رده هم ارزی (r, s) را با نماد $\frac{r}{s}$ نشان می دهیم. حال $S^{-1}R$ را مجموعه تمام رده های هم ارزی فوق درنظر می گیریم. در اینصورت با تعریف عمل جمع و ضرب بصورت

$$\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} = \frac{rs' + r's}{ss'} \qquad\qquad \frac{r}{s} \times \frac{r'}{s'} = \frac{rr'}{ss'}$$

$S^{-1}R$ یک حلقه خواهد بود که آن را حلقه کسر های R نسبت به زیرمجموعه بسته ضربی S از R می نامیم.

(۱-۴۷) تعریف : فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یکدار و S زیر مجموعه بسته ضربی Rو A یک R- مدول باشد. رابطه ~ را در A×S بصورت زیر تعریف می کنیم

$$(a, s) \sim (a', s') \iff \exists\, t \in S, \quad t(as' - a's) = 0$$

در اینصورت رابطه ~ در A×S یک رابطه هم ارزی است. حال برای هر $(a, s) \in A\times S$ رده هم ارزی (a, s) را با نماد $\frac{a}{s}$ نشان می دهیم. حال $S^{-1}A$ را مجموعه تمام رده های هم ارزی فوق درنظر می گیریم . در اینصورت با تعریف عمل جمع و ضرب بصورت

$$\frac{a}{s}+\frac{a'}{s'}=\frac{as'+a's}{ss'} \qquad \frac{a}{s}\times\frac{a'}{s'}=\frac{aa'}{ss'}$$

$S^{-1}A$ یک $S^{-1}R$ - مدول خواهد بود که آن را مدول کسر های A نسبت به زیرمجموعه بسته ضربی S از R می نامیم. در حالت خاص اگر P یک ایده آل اول R باشد در اینصورت $S = R\setminus P$ یک زیر مجموعه بسته ضربی R خواهد بود. حال $S^{-1}R$ را با نماد R_P و $S^{-1}A$ را با نماد A_P نشان می دهیم.

(۱-۴۸) لم : فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یکدار و S یک زیرمجموعه بسته ضربی R و $f : A \to B$ یک R - همریختی باشد. در اینصورت از f یک $S^{-1}R$ - همریختی چون $S^{-1}f : S^{-1}A \to S^{-1}B$ با ضابطه $[S^{-1}f](\frac{a}{s}) = \frac{f(a)}{s}$ حاصل می شود.

برهان : (ر.ک.۱۷).

(۱-۴۹) لم :

۱- فرض کنیم $B \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} C$ یک دنباله دقیق از R - مدول ها و R - همریختی ها باشدو S یک زیرمجموعه بسته ضربی از R باشد. در اینصورت $S^{-1}B \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}A \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}C$ یک دنباله دقیق از $S^{-1}R$ - مدول ها و $S^{-1}R$ - همریختی ها است.

۲- فرض کنیم A یک R - مدول آرتینی باشد. در اینصورت $S^{-1}A$ یک $S^{-1}R$ - مدول آرتینی است.

برهان : (ر.ک.۱۷).

(۱-۵۰) نتیجه : فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یکدار و S زیر مجموعه بسته ضربی Rو A یک R - مدول و B یک R - زیرمدول A باشد. در اینصورت $S^{-1}(\frac{A}{B}) \cong \frac{S^{-1}A}{S^{-1}B}$.

(۱-۵۱) تعریف : فرض کنیم A مدولی روی حلقه جابجایی و یکدار R باشد. در اینصورت تکیه گاه A را با نماد $\mathrm{Supp}_R(A)$ نشان می دهیم و بصورت زیر تعریف می کنیم

$$\mathrm{Supp}_R(A) = \{P \in \mathrm{Spec}(R) \mid A_P \neq 0\}$$