**وزارت علوم، تحقیقات و فناوری**

**دانشگاه دامغان**

**دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر**

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)

# تعیین سری جواب برخی از مسائل معادلات دیفرانسیل به‌کمک روش تجزیه آدمیان

توسط:

**فاطمه احمدی قوی بازو**

استاد راهنما:

**دکتر مرتضی گرشاسبی**

استاد مشاور:

**مهندس حسن کد خدائی خلقی**

تیر ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

**به نام خدا**

# تعیین سری جواب برخی از مسائل معادلات دیفرانسیل به کمک روش تجزیه آدمیان


**توسط:**

فاطمه احمدی قوی بازو


**پایان‌نامه**

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

**در رشته**

ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **عالی**

دکتر مرتضی گرشاسبی استادیار ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

مهندس حسن کد خدائی خلفی مربی علوم کامپیوتر گرایش علوم کامپیوتر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر عبدالعلی بصیری استادیار ریاضی محض گرایش جبر محاسباتی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور اول)

دکتر پرستو ریحانی اردبیلی دانشیار ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشگاه پیام نور شهریار (داور دوم)

دکتر مصطفی زارع خورمیری استادیار ریاضی محض گرایش منطق دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

تیر۱۳۹۱

# تقدیم به

محضر آقا امام زمان (عجل الله تعالی فرجه الشریف)

مادر عزیز و مهربانم، شمع پر فروغی که اشک و دعای سحرگاهی خویش را پشتوانه توفیق فرزندان خود قرار داد.

روح مهربان و پر فتوح پدرم که پیوسته ارتقاء اخلاقی و فرهنگی فرزندان خویش را آرزو می کرد.

همسر فداکارم که با همکاری لازم زمینه کسب علم و دانش را برایم فراهم نمود.

# سپاسگزاری

ستایش می کنم آن سرچشمه علم و فضیلت را که قدرت آموختن و آموزش را به من عطا فرمود.

تو را سپاس می گویم هر چند که پیوسته لسانم از شمارش نعمتهایی که بر من عطا فرموده ای قاصر است.

خدایا

این بنده حقیر را لحظه ای به خویشتن خویش رها مساز و حلاوت عبادت خالصانه را از وی دریغ مدار.

ای قادر مطلق

توفیق انجام صادقانه تکالیف بندگی و ارائه خدمات علمی شایسته را از تو خواستارم.

بر خود واجب می دانم که نهایت سپاس و تشکر خویش را نسبت به سروران مشروح زیر، اظهار نمایم.

جناب آقای دکتر مرتضی گرشاسبی، استاد محترم راهنما که در مراحل مختلف تدوین این پایان نامه، از رهنمودهای علمی ایشان بهره مند شدم.

جناب آقای مهندس کدخدائی خلفی استاد مشاور محترم.

جناب آقای دکتر عبدالعلی بصیری و سرکار خانم دکتر پرستو ریحانی اردبیلی که اوقات ارزشمند خویش را به داوری این پایان نامه تخصیص دادند.

## چکیده

# تعیین سری جواب برخی از مسائل معادلات دیفرانسیل به کمک روش تجزیه آدمیان

به وسیله‌ی:
فاطمه احمدی قوی بازو

در این پایان نامه ابتدا به بررسی روش تجزیه آدمیان در حل معادلات دیفرانسیل می پردازیم و برخی از ویژگیهای سری جواب را شرح می دهیم، سپس دو روش برای بدست آوردن چند جمله ایهای آدمیان را بیان می کنیم. در فصل دوم با استفاده از قضیه کوشکی - کوالوسکی همگرایی سری جواب را نشان داده و برای آن یک نرخ همگرایی ارائه می دهیم. در فصل سوم به مقایسه دو روش تجزیه آدمیان و روش تیلور با حل یک مثال خواهیم پرداخت. همچنین روش تجزیه آدمیان را با روش پیکارد مقایسه می کنیم. در انتها در فصل چهارم با استفاده از روش تجزیه به حل دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم بر فعل و انفعالات دو نوع مخمر کفیر و سرویزیه خواهیم پرداخت.

واژگان کلیدی: معادلات دیفرانسیل، روش تجزیه آدمیان، چند جمله ایهای آدمیان، سریهای جواب، آنالیز همگرایی.

# فهرست مطالب

# فهرست جدول‌ها

# فهرست شکل‌ها

# مقدمه

بررسی ماهیت پدیده ها در طبیعت و مشاهده ساختاری و تغییر ویژگی آنها مستلزم بکارگیری ابزاری نیرومند جهت قالب بندی آنها در مدل های ریاضی می باشد. اغلب این مدل ها متکی بر مجموعه ای از معادلات سازگاری است که بیانگر رفتارهای خاص یک دستگاه فیزیکی است که مورد توجه ما می باشند. معادلات تابعی غیر خطی، معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال از جمله ابزارهای مفید می باشند. طبیعت ساختاری بسیاری از مسائل کاربردی در ریاضیات در قالب معادلات تابعی غیر خطی آشکار می گردد. طبقه گسترده ای از معادلات عملگرهای غیر خطی می توانند به یک سری از توابع تبدیل گردند، لذا گستردگی این معادلات، راه حل های ویژه ای را جهت یافتن جواب های آنها می طلبد. همانند سایر مدل های ریاضی، روش های مختلفی برای حل این معادلات وجود دارد، که یکی از این روش ها، روش تجزیه آدمیان است که به عنوان یک روش کارا در بررسی و حل بسیاری از معادلات به کار گرفته می شود. تکنیک آدمیان در شکل فرمول بندی بسیار ساده است و گاهی مشکلات آن هنگام محاسبه چند جمله ایها و اثبات همگرایی سری توابع نمایان می گردد.

# فصل ۱

# روش تجزیه آدمیان

## ۱-۱ ملاحظات تاریخی روش تجزیه آدمیان

الگوی روش تجزیه اولین بار در سال ۱۹۶۱ ارائه گردید که البته در خصوص به کارگیری آن به عنوان یک ابزار ریاضی در مسائل مفید و موثر واقع نگردید. این روش که توسط آدمیان [۱] (۱۹۲۰-۱۹۹۶) ارائه گردید، در دهه ۱۹۸۰ به عنوان تئوری سیستم های پویا ، بدون استفاده از خطی سازی و اختلال در مسأله، جهت حل مسائل غیر خطی، به تدریج جایگاه خود را آشکار نمود. به طوری که در این خصوص اولین کتاب در سال۱۹۸۳ [۵] در زمینه فرایندهای تصادفی کاربردی به چاپ رسید. البته روش تجزیه آدمیان یک ابزار و طرح توانمندی برای حل معادلات تابعی می باشد که علی رغم بررسی و حل معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی ، فرایندهای تصادفی ، معادلات جبری ، معادلات انتگرال و تأخیری را پوشش می دهد. کتاب دوم وی که در سال ۱۹۸۵ به طور مشترک بابیلمن [۲] تألیف شد در خصوص روش های جدید جهت حل طبقه خاصی از معادلات دیفرانسیل است [۶]. کتاب سوم در سال ۱۹۸۹ به چاپ رسید [۶]. در این کتاب روش تجزیه در دو فصل به طور جداگانه مورد بررسی قرار گرفت، به طوری که این روش در فصل اول به طور کامل و در فصل دوم کاربردهای آن در حل مسائلی از قبیل معادله حرارت، مسأله پلاسمای غیر خطی و غیره تشریح شده است. آدمیان در کتاب آخر خود که در سال ۱۹۹۴ منتشر گردیده، کاربرد روش تجزیه را در حل مسأله با مقدار اولیه و مقادیر مرزی پیچیده آشکار نموده است [۸]. در طول هجده سال تلاش، وی در این زمینه توانست کاربردهای تئوری و فیزیکی را در بیش از ۸۰ مقاله ارائه دهد. روش تجزیه وی بر اساس به کارگیری سری ها

[۱] G.Adomian

[۲] R.Blman

بوده و به لحاظ بررسی همگرائی سری های به کار گرفته شده، تلاش هائی توسط چارلت [۳] در سال ۱۹۸۹ [۲۲] صورت پذیرفت به طوری که در آخرین مقاله مشترک آدمیان با چارلت، ابویی [۴] و روچ [۵] ، مطالبی در این زمینه در سال ۱۹۹۵ به چاپ رسید [۲۵]. پس از سال ۱۹۹۵ مقالات متعددی توسط چارلت و همکارانش در خصوص همگرائی روش آدمیان به چاپ رسیده است [۲۴]. لسنیک [۶] در [۴۴] همگرایی روش آدمیان را در به کار گیری برای معادلات گرما - زمان و موج - پرتو برای هر دو حالت پیش رونده و پس رونده نسبت به زمان بررسی کرده است، او نشان داده است که همگرایی برای مسائل پیش رونده نسبت به مسائل پس رونده سریعتر است. الگوریتم روش تجزیه آدمیان [۷] به طور گسترده در حل مسائل خطی و غیر خطی که در زمینه های کاربردی پدید می آیند، مورد استفاده واقع شده است به طوری که تحقیقات قابل ملاحظه ای در این زمینه صورت گرفته است که توجه بسیاری از محققین را به خود معطوف ساخته است.
از آن جمله الخالد و آلن [۸] در [۱۱] حل معادلات متغیر آب های کم عمق را به وسیله روش آدمیان بررسی کرده اند و همگرایی آنها را با ارائه مثال عددی نشان داده اند . یک بررسی مقایسه ای بین روش تجزیه آدمیان و روش سنیک- گالرکین [۹] برای حل مدل های رشد جمعیت توسط الخالد در [۱۲] انجام شده است و این مقایسه بین روش آدمیان و روش رونگ- کوتا [۱۰] برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل توسط شاواگفه وکایا [۱۱] صورت گرفته است [۴۷]. وزواز و خوری [۱۲] در مورد کاربرد روش آدمیان برای حل معادلات انتگرال فرد هلم که در مسائل آکوستیک ظاهر می شوند بحث کرده اند [۴۱]. در [۵۲]، وزواز روش آدمیان را برای شتاب بخشیدن به همگرایی سری جواب اصلاح نموده است. اعتبار تکنیک اصلاح شده به وسیله مثال هایی نشان داده شده است. به علاوه در [۵۳] ، وزواز یک الگوریتم عددی برای تقریب جواب مسائل مقدار مرزی با مرتبه بالا داده است. به کارگیری چندجمله ایهای چیبشف در روش آدمیان توسط حسینی در [۳۸]، بحث شده است. در [۳۵]، گولال [۱۳] و چرالت از

[۳] Y.Aherruault

[۴] K.Abbaoni

[۵] R.Roch

[۶] lesnic

[۷] Adomain

[۸] AL-khaled , Allan

[۹] Sinc-Galerkian

[۱۰] Rungekutta

[۱۱] Shawagfeh,kaya

[۱۲] Waz waz , khuri

[۱۳] Guellal

روش آدمیان برای حل یک مسئله مقدار مرزی بیضوی با یک شرط کمکی استفاده کرده اند. مقایسه بین روش آدمیان و ویولت - گالرکین [۱۴] برای حل معادلات دیفرانسیل انتگرالی بوسیله سید - عبدالعزیز [۱۵] در [۲۸]، صورت گرفته است. سید و گابر [۱۶] در [۲۹]، از روش آدمیان در حل معادله دیفرانسیل جزئی در یک دامنه متناهی استفاده کرده اند .

آدمیان و همکارانش در [۹]، از این تکنیک برای حل مدل های ریاضی جمعیت باکتری ها و ویروس ها و هم چنین سلول های تومور که در قالب دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی نمایش داده می شوند استفاده نموده اند.

لافز و آبویی [۱۷] در [۴۳]، مدل تبادل گرمایی دریل کاری را با روش تجزیه مورد مطالعه قرار داده اند. گولال و دیگرا ن در [۳۶]، از روش تجزیه برای حل دستگاه های معادلات که در فیزیک ظاهر می شوند استفاده کرده و آن را با روش رونگ-گوتا مقایسه نموده اند. ادواردز [۱۸] و دیگران روش تجزیه آدمیان را با روش رونگ -کوتا در تقریب جواب معادلات مدل شکار و شکار چی مقایسه نموده اند [۲۷]. در واقع نحوه به کارگیری این روش برای حل معادلات تابعی خطی چیزی بیش از روش کلاسیک تقریبات متوالی نمی باشد، به طوری که اگر در بعضی مسائل روش تقریبات متوالی واگرا گردد، روش تجزیه نیز واگرا می گردد [۳۳، ۱۵]. زمانی که روش آدمیان در خصوص معادلات تابعی بکار می رود، مزایای آن مشهود خواهد بود و نتایج معتبری را در به کارگیری تقریبات تحلیلی که همگرائی سریعی را در بر دارد، آشکار می نماید [۳۷، ۱۷، ۱۶].

یکی از مزایای روش تجزیه آدمیان برنامه ریزی ساده آن در مسائل مهندسی بوده [۵۰] که برخلاف جواب های سری یک مسأله، جواب را بدون خطی سازی و گسستگی نمایان می سازد. این مزیت در مسائل غیر خطی بسیار محسوس است. به طور نسبی مقایسه این روش با روش های بین مقالات ارائه شده کمتر مشاهده می شود.

یک مقایسه مفید بین روش تجزیه و روش اختلال در [۱۹] نشان می دهد که روش تجزیه به لحاظ حجم کار طاقت فرسا در به کارگیری روش اختلال، از کارائی بیشتری بر خوردار می باشد. هم چنین در [۲۰] بر مزیت این روش نسبت به روش پیکارد [۱۹] تأکید شده است [۱].

---

[۱۴] Wavelet-Galerkian

[۱۵] El-sayed,Abdel-Aziz

[۱۶] Gaber

[۱۷] Laffez,Abbaoui

[۱۸] Edwards

[۱۹] Picard

در بخش اول از این فصل به بحث و بررسی روش تجزیه آدمیان می پردازیم. در بخش دوم چندجمله ایهای آدمیان را معرفی می کنیم. در بخش سوم نحوه بدست آوردن چند جمله ایهای آدمیان را با استفاده از دو روش توضیح خواهیم داد و در پایان این فصل به ارائه مثال هایی از طریق روش تجزیه آدمیان می پردازیم.

## ۱-۲ روش تجزیه آدمیان

معادله زیر را در نظر بگیرید

$$F(u(x)) = g(x), \tag{۱.۱}$$

که در آن $F$ یک عملگر دیفرانسیل غیر خطی است و به صورت زیر تجزیه می شود

$$Lu + Ru + Nu, \tag{۲.۱}$$

که شامل قسمت خطی و غیر خطی است. جملات خطی در $Fu$ به صورت $Lu + Ru$ است و $L$ یک عملگر وارون پذیر و شامل بالاترین مرتبه مشتق نسبت به $x_j$ است و برای این منظور در نظر گرفته می شود که از مشکلات انتگرالگیری جلوگیری کند و $R$ یک باقیمانده عملگر خطی است و $Nu$ جملات غیر خطی $F(u)$ را نشان می دهد و $g$ یک تابع معلوم است. بنابراین معادله (۱.۱) را به شکل زیر می توانیم بنویسیم [۸، ۳۲].

$$Lu + Ru + Nu,$$

و یا

$$L[u(x_۱, \cdots, x_n)] + N[u(x_۱, \cdots, x_n)] + R[u(x_۱, \cdots, x_n)] = g(x_۱, \cdots, x_n). \tag{۳.۱}$$

وارون عملگر $L$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$L^{-۱}(.) = \underbrace{\int\int ... \int (.)dx_j...dx_jdx_j,}_{\text{مرتبه}\,k} \qquad , \tag{۴.۱}$$

تعداد دفعات انتگرالگیری $k$ بار است . اگر $L^{-۱}$ را در هر دو طرف معادله (۲.۱) ضرب کنیم، جوابی به شکل زیر برای معادله (۱.۱) حاصل می شود

$$u(x_۱, \cdots, x_n) = f(x_۱, \cdots, x_n) - L^{-۱}[N[u(x_۱, \cdots, x_n)] + R[u(x_۱, \cdots, x_n)]], \tag{۵.۱}$$

و

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\psi(x_1,\cdots,x_n)+L^{-1}[g(x_1,\cdots,x_n)].$$

که در واقع $f(x_1,\cdots,x_n)$ از انتگرالگیری تابع $g(x_1,\cdots,x_n)$ و با اعمال شرط اولیه بدست می آید و $\psi$ یک جواب معادله همگن عملگر خطی است که

$$L[\psi(x_1,\cdots,x_n)]=0$$

در این روش تابع $u(x_1,\cdots,x_n)$ و عملگر غیر خطی $N(u(x_1,\cdots,x_n))$ به صورت زیر تعریف می شوند

$$u(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{m=0}^{\infty}u_m(x_1,\cdots,x_n), \tag{6.1}$$

$$N(u(x_1,\cdots,x_n))=\sum_{m=0}^{\infty}A_m(x_1,\cdots,x_n), \tag{7.1}$$

$A_m$ ها چند جمله ایهای آدمیان وابسته به $u_j$ هستند که $j=0,1,\cdots,m-1$ و از طریق فرمول زیر بدست می آیند

$$A_m(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{m!}\left[\frac{d^m}{d\lambda^m}N\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i u_i(x_1,\cdots,x_n)\right)\right]_{\lambda=0},\quad m\geq 0 \tag{8.1}$$

تعدادی از این چند جمله ایهای آدمیان به صورت زیر هستند

$$A_0=N(u_0),$$

$$A_1=u_1N'(u_0),$$
$$A_2=u_2N'(u_0)+\frac{1}{2!}u_1^2N''(u_0),$$
$$A_3=u_3N'(u_0)+u_1u_2N''(u_0)+\frac{1}{3!}u_1^3N'''(u_0),$$
$$A_4=u_4N'(u_0)+(\frac{1}{2!}u_2^2+u_1u_3)N''(u_0)+\frac{1}{2!}u_1^2u_2N'''(u_0)+\frac{1}{4!}u_1^4N^{(4)}(u_0).$$

بنابراین تقریب جواب (۲.۱) با استفاده از روابط بازگشتی زیر بدست می آید

$$\begin{aligned}&u_0(x_0,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_n),\\&u_{m+1}(x_1,\cdots,x_n)=-L^{-1}[R(u_m(x_1,\cdots,x_n))+A_m(x_1,\cdots,x_n)],\quad m\geq 0\end{aligned} \tag{9.1}$$

**مثال ۱.۲.۱.** معادله زیر را در نظر می گیریم

$$u^{'}(x)=u(x), \quad u(\circ)=A. \tag{۱۰.۱}$$

معادله بالا را به شکل عملگری می نویسیم

$$Lu=u, \tag{۱۱.۱}$$

که عملگر $L$ برابر است با

$$L=\frac{d}{dx}, \tag{۱۲.۱}$$

و وارون آن به شکل زیر تعریف می شود:

$$L^{-۱}(\circ)=\int_{\circ}^{x}(\circ)dx, \tag{۱۳.۱}$$

$L^{-۱}$ را بر هر دو طرف معادله (۱۱.۱) اعمال می کنیم و با در نظر گرفتن شرایط مرزی داریم

$$L^{-۱}(Lu)=L^{-۱}(u), \tag{۱۴.۱}$$

بنابراین داریم

$$u(x)-u(\circ)=L^{-۱}(u), \tag{۱۵.۱}$$

و یا

$$u(x)=A+L^{-۱}(u), \tag{۱۶.۱}$$

با توجه به رابطه (۶.۱) و جایگذاری آن در (۱۶.۱) داریم

$$\sum_{n=\circ}^{\infty}u_n(x)=A+L^{-۱}\left[\sum_{n=\circ}^{\infty}u_n(x)\right]. \tag{۱۷.۱}$$

بنابراین معادلات بازگشتی زیر بدست می آیند

$$\begin{aligned} &u_{\circ}(x)=A,\\ &u_{k+۱}(x)=L^{-۱}(u_k(x)), \quad k\geq \circ. \end{aligned} \tag{۱۸.۱}$$

که برخی از جملات آن به صورت زیر است

$$\begin{aligned}
&u_0(x) = A,\\
&u_1(x) = L^{-1}(u_0(x)) = Ax,\\
&u_2(x) = L^{-1}(u_1(x)) = A\frac{1}{2!}x^2,\\
&u_3(x) = L^{-1}(u_2(x)) = A\frac{1}{3!}x^3,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$u(x) = A(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots), \tag{19.1}$$

و یا به طور معادل

$$u(x) = Ae^x.$$

**مثال ۲.۲.۱.** معادله آیری را در نظر می گیریم

$$u'' = xu(x), \quad u(0) = A, \quad u'(0) = B. \tag{20.1}$$

شکل عملگری این معادله به صورت زیر است

$$Lu = xu, \tag{21.1}$$

که عملگر $L$ برابر است با

$$L = \frac{d^2}{dx^2}, \tag{22.1}$$

و معکوس آن به شکل زیر است

$$L^{-1}(.) = \int_0^x \int_0^x (.)dxdx, \tag{23.1}$$

عملگر $L^{-1}$ را به دو طرف معادله (۲۱.۱) اعمال می کنیم و با در نظر گرفتن شرایط مرزی داریم

$$L^{-1}(Lu) = L^{-1}(xu), \tag{24.1}$$

در نتیجه

$$u(x) - xu'(0) - u(0) = L^{-1}(xu), \tag{25.1}$$

و یا به شکل معادل داریم

$$u(x) = A + Bx + L^{-۱}(xu). \qquad (۲۶.۱)$$

با توجه به رابطه (۶.۱) و جایگذاری آن در دو طرف رابطه (۲۵.۱) داریم

$$\sum_{n=۰}^{\infty} u_n(x) = A + Bx + L^{-۱}\left[x\sum_{n=۰}^{\infty} u_n(x)\right]. \qquad (۲۷.۱)$$

روابط بازگشتی زیر با استفاده از روش تجزیه آدمیان بدست می آید

$$\begin{aligned} &u_۰(x) = A + Bx,\\ &u_{k+۱}(x) = L^{-۱}(xu_k(x)), \quad k \geq ۰ \end{aligned} \qquad (۲۸.۱)$$

بنابراین برخی از جملات رابطه (۲۸.۱) به صورت زیر است

$$\begin{aligned} &u_۰(x) = A + Bx,\\ &u_۱(x) = L^{-۱}(xu_۰(x)) = A\frac{۱}{۶}x^۳ + B\frac{۱}{۱۲}x^۴,\\ &u_۲(x) = L^{-۱}(xu_۱(x)) = A\frac{۱}{۱۸۰}x^۶ + B\frac{۱}{۵۰۴}x^۷,\\ &\vdots \end{aligned} \qquad (۲۹.۱)$$

بنابراین جواب معادله (۲۶.۱) پس از جایگذاری به صورت زیر بدست می آید

$$u(x) = A(۱ + \frac{۱}{۶}x^۳ + \frac{۱}{۱۸۰}x^۶ + \cdots) + B(x + \frac{۱}{۱۲}x^۴ + \frac{۱}{۵۰۴}x^۷ + \cdots).$$

## ۱-۳ مطالب تکمیلی درباره چند جمله ایهای آدمیان

**تعریف ۱.۳.۱.** برای هر دنباله $u_n(\lambda) = \sum_{i=۰}^{n} \lambda^i u_i$ ، $N(u_n(\lambda))$ را به شکل زیر تعریف می کنیم [۲]

$$N(u_n(\lambda)) = \sum_{i=۰}^{n} \lambda^i A_i$$

**قضیه ۲.۳.۱.** *برای هر تابع مرکب $A(\lambda) = N(u_n(\lambda))$ ، که $f(u)$ ، $n$ مرتبه مشتق پذیر باشد $A_n$ ها با رابطه زیر مشخص می شوند*

$$\begin{aligned} &A_۰ = N(u_۰),\\ &A_n = \sum_{k_۱+۲k_۲+\cdots+nk_n=n} \left(\frac{d^{(k_۱+k_۲+\cdots+k_n)}N}{du^{(k_۱+k_۲+\cdots+k_n)}}\right)_{u=u_۰} \frac{u_۱^{k_۱}}{k_۱!}\frac{u_۲^{k_۲}}{k_۲!}\cdots\frac{u_n^{k_n}}{k_n!}, \quad n \neq ۰. \end{aligned}$$