بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و رایانه
بخش ریاضی

رساله برای دریافت درجه دکترا

رشته ریاضی گرایش محض

تعمیم ایده‌آل‌ها و زیرمدول‌های اول

مؤلف :

مهدیه ابراهیم‌پور

استاد راهنما :

دکتر رضا نکویی

تیر ماه ۱۳۹۱

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه دکترا به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و رایانه
دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: مهدیه ابراهیم‌پور	امضاء:
استاد راهنما: دکتر رضا نکویی	امضاء:
داور اول:	امضاء:
داور دوم :	امضاء:
داور سوم:	امضاء:
نماینده تحصیلات تکمیلی:	امضاء:

تقدیم به

همسر مهربانم فریبرز

تشکر و قدردانی

با سپاس از خداوند منان

و تشکر و قدردانی از پدر و مادر عزیزم که همیشه و در همه‌جا پشتیبان من بوده‌اند...

و همسر مهربانم که صبورانه در کنارم بوده...

و استاد ارجمندم دکتر رضا نکویی که در تهیه این رساله از راهنمایی‌های بی‌دریغ ایشان بهره برده‌ام ...

و کلیه دوستانی که در این راه یاریم نموده‌اند.

مهدیه ابراهیم‌پور

mahdieh_ebrahimpour@yahoo.com

چکیده

فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی و یکدار و M یک $R-$مدول یکانی باشد. همچنین $S(R)$ مجموعه همه ایده‌آل‌های R و $S(M)$ مجموعه همه زیرمدول‌های M باشد.

فرض کنید $\phi : S(R) \longrightarrow S(R) \cup \{\emptyset\}$ یک تابع باشد. در این رساله به معرفی ایده‌آل‌های $(n-1,n)-\phi$-اول می‌پردازیم.

همچنین برای $R-$مدول M فرض کنید $\phi : S(M) \longrightarrow S(M) \cup \{\emptyset\}$ یک تابع باشد. زیرمدول $(n-1,n)-\phi$-اول را معرفی کرده و به مطالعه ایده‌آل‌ها و زیرمدول‌های $(n-1,n)-\phi$-اول که تعمیمی از ایده‌آل‌ها و زیرمدول‌های اول هستند می‌پردازیم. همچنین حلقه‌ها (مدول‌ها)یی را که هر ایده‌آل (زیرمدول) سره از آنها $(n-1,n)-\phi$ -اول باشد، برای بعضی ϕها، مشخص‌سازی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: *ایده‌آل $(n-1,n)-\phi$-اول، ایده‌آل $(n-1,n)$-تقریباً اول، ایده‌آل $(n-1,n)$-اول ضعیف، حلقه موضعی، حلقه منظم، زیرمدول $(n-1,n)-\phi$-اول، زیرمدول $(n-1,n)-m$-تقریباً اول، زیرمدول $(n-1,n)$-اول ضعیف، مدول ضربی.*

فهرست مطالب

مقدمه و تاریخچه

در سرتاسر این رساله حلقه‌ها جابجایی و یکدار با $0 \neq 1$ و مدول‌ها یکانی فرض می‌شوند. فرض کنید R یک حلقه باشد. مجموعه ایده‌آل‌های حلقه R را با $S(R)$ و مجموعه ایده‌آل‌های بیشین R را با $Max(R)$ نمایش می‌دهیم.

ایده‌آل‌های اول نقش مهمی در نظریه حلقه‌های جابجایی ایفا می‌کنند. یادآوری می‌کنیم که ایده‌آل سره P از حلقه R را اول گوییم، هرگاه برای هر $a, b \in R$ که $ab \in P$ آنگاه $a \in P$ یا $b \in P$. به‌راحتی می‌توان دید که ایده‌آل P در حلقه R اول است اگر و تنها اگر حلقه خارج‌قسمتی $\frac{R}{P}$ دامنه صحیح باشد.

مثال. ایده‌آل صفر در یک دامنه صحیح یک ایده‌آل اول است. اگر p یک عدد صحیح اول باشد ایده‌آل (p) در حلقه $\mathbf{Z}$ اول است.

اندرسون [1] و اسمیت [2] در [7] ایده‌آل اول ضعیف را بدین صورت تعریف کرده‌اند: ایده‌آل سره P از حلقه R اول ضعیف است هرگاه برای هر $a, b \in R$ که $0 \neq ab \in P$ آنگاه $a \in P$ یا $b \in P$.

مثال. بدیهی است که هر ایده‌آل اول یک ایده‌آل اول ضعیف است. فرض کنید K یک میدان باشد. حلقه $R = K[|x, y|]$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $J = (x)(x, y)$ و $T = \frac{R}{J}$. گیریم $I = (x) + J$ و $M = (x, y) + J$. چون $I \cap M^2 = 0$ به‌راحتی می‌توان

[1] Anderson

[2] Smith

دید که I ایده‌آل اول ضعیفی از T است.

طبق [۷، قضیه ۱] اگر P ایده‌آل اول ضعیفی از حلقه R باشد و P اول نباشد، آنگاه $P^2 = 0$.

طبق [۷، قضیه ۷] اگر R حلقه ای تجزیه‌پذیر باشد و P ایده‌آل اول ضعیفی از R باشد، آنگاه $P = 0$ یا P اول است.

حلقه جابجایی و یکدار R را که تنها یک ایده‌آل بیشین دارد حلقه شبه موضعی نامند. در این رساله این نوع حلقه‌ها را موضعی خواهیم نامید.

مثال. اگر K یک میدان باشد حلقه $K[|x|]$ یک حلقه موضعی با ایده‌آل بیشین (x) است.

یک دامنه ددکیند دامنه‌ای صحیح است که هر ایده‌آل سره از آن را می‌توان به‌صورت منحصر بفردی به‌شکل حاصل‌ضربی متناهی از ایده‌آل‌های اول آن حلقه نوشت.

مثال. هر PID یک دامنه ددکیند است.

حلقه‌ای موضعی که هر ایده‌آل سره از آن را بتوان به‌صورت توانی از تنها ایده‌آل بیشین آن حلقه نوشت $SPIR$[1] می‌نامند.

مثال. اگر (R, M) یک دامنه ددکیند موضعی باشد و M پوچ‌توان باشد، آنگاه R یک $SPIR$ است.

گالویچ [2] در [۱۵] ، عنصر غیر یکه x از حلقه R را که (x) ایده‌آلی اول ضعیف باشد، عنصر اول ضعیف نامید. از مفهوم این عنصر در مطالعه تجزیه‌های یکتا در حلقه‌های دارای مقسوم علیه صفر استفاده شده است. گالویچ نشان داد که اگر حلقه Rیک UFR[3] باشد، آنگاه R یک UFD[4] است یا (R, M) حلقه‌ای موضعی و $M^2 = 0$ بوده و یا R یک $SPIR$

[1] Special Principal Ideal Ring

[2] Galavich

[3] Unique Factorization Ring

[4] Unique Factorization Domain

است.

طبق [۷، قضیه ۱۶] هر ایده‌آل سره از حلقه R را می‌توان به‌شکل حاصل‌ضربی از ایده‌آل‌های اول ضعیف R نوشت اگر و تنها اگر R حاصل‌ضربی از دامنه‌های ددکیند و $SPIR$ها باشد و یا (R, M) حلقه‌ای موضعی و $M^{2} = 0$ باشد.

هنگام مطالعه UFDها نویسندگان [۱۱] ، به تعریف ایده‌آل سره I با این خاصیت که برای هر $a, b \in R$ ، اگر $ab \in I \setminus I^{2}$ آنگاه $a \in I$ یا $b \in I$ نیاز پیدا کرده و چنین ایده‌آلی را ایده‌آل تقریباً اول نامیدند. بنابراین هر ایده‌آل اول ضعیف یک ایده‌آل تقریباً اول است.

ایده‌آل I را خودتوان نامند اگر $I = I^{2}$. هر ایده‌آل سره مثل I که خودتوان نیز باشد تقریباً اول است. به‌راحتی می‌توان دید که ایده‌آل I از حلقه R تقریباً اول است اگر و تنها اگر ایده‌آل $\frac{I}{I^{2}}$ در حلقه $\frac{R}{I^{2}}$ اول ضعیف باشد.

مثال. فرض کنید K یک میدان و $R = K(x^{3}, x^{4}, x^{5})$ باشد. می‌دانیم که $M = (x^{3}, x^{4}, x^{5})$ تنها ایده‌آل بیشین حلقه R است. گیریم $I = (x^{3}, x^{4})$. چون $I^{2} = M^{2}$ به‌راحتی می‌توان دید که I یک ایده‌آل تقریباً اول از R است.

مثال. فرض کنید $R = \mathbf{R}[|x^{2}, x^{3}|]$. طبق [۱۱]، R حلقه‌ای موضعی و نوتری است که UFD نیست و $I = (x^{2})$ ایده‌آل تقریباً اولی از R نیست.

نویسندگان در [۶] ، مفاهیم ایده‌آل‌های اول ضعیف و تقریباً اول را به شکلی که در زیر خواهیم دید به مفهوم ایده‌آل ϕ- اول تعمیم دادند:

فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی و $\phi : S(R) \longrightarrow S(R) \cup \{\emptyset\}$ یک تابع باشد. گوییم ایده‌آل سره I از R ، ϕ- اول است اگر برای $x, y \in R$ که $xy \in I \setminus \phi(I)$ آنگاه $x \in I$ یا $y \in I$. چون $I \setminus \phi(I) = I \setminus (I \cap \phi(I))$ ، بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد $\phi(I) \subseteq I$.

مثال. فرض کنید (R, M) یک حلقه موضعی و $\phi : S(R) \longrightarrow S(R) \cup \{\emptyset\}$ یک تابع باشد به‌قسمی که $im\phi \subseteq S(R)$. اگر I ایده‌آل سره‌ای از R باشد و $I \cap M^{2} \subseteq \phi(I)$، آنگاه

I، ϕ–اول می‌باشد. زیرا اگر $xy \in I \setminus \phi(I)$، آنگاه $xy \notin M^۲$. پس x یا y یکه است.

فرض کنید $\psi_۱, \psi_۲ \colon S(R) \longrightarrow S(R) \cup \{\emptyset\}$ دو تابع باشند. اگربرای هر $J \in S(R)$ داشته باشیم $\psi_۱(J) \subseteq \psi_۲(J)$ ، آنگاه می‌نویسیم $\psi_۱ \leq \psi_۲$.

فرض کنید $\phi_\alpha \colon S(R) \longrightarrow S(R) \cup \{\emptyset\}$ یکی از توابع زیر باشد. ایده‌آل‌های ϕ_α-اول مربوط به هر یک از این توابع را به صورتی که در زیر بیان شده خواهیم داشت:

$\phi_\emptyset$	$\phi(J) = \emptyset$	ایده‌آل اول
$\phi_۰$	$\phi(J) = ۰$	ایده‌آل اول ضعیف
$\phi_۱$	$\phi(J) = J$	هر ایده‌آل
$\phi_۲$	$\phi(J) = J^۲$	ایده‌آل تقریباً اول
$\phi_n (n \geq ۲)$	$\phi(J) = J^n$	ایده‌آل n–تقریباً اول
ϕ_ω	$\phi(J) = \bigcap_{n=۱}^{\infty} J^n$	ایده‌آل ω–اول

به‌راحتی می‌توان دید که $\phi_\emptyset \leq \phi_۰ \leq \phi_\omega \leq \cdots \leq \phi_{n+۱} \leq \phi_n \leq \cdots \leq \phi_۲ \leq \phi_۱$.

مثال. فرض کنید (R, M) حلقه ای موضعی و برای هر $J \in S(R)$، $\phi_M(J) = MJ$ باشد. بدیهی است که $\phi_۲ \leq \phi_M \leq \phi_۱$.

بداوی [۱] در [۹] ، ایده‌آل ۲-جاذب را به‌صورت زیر تعریف کرده است: ایده‌آل سره I از حلقه R را ۲-جاذب گوییم اگر برای $a_۱, a_۲, a_۳ \in R$ که $a_۱a_۲a_۳ \in I$ آنگاه $a_۱a_۲ \in I$ یا $a_۱a_۳ \in I$ یا $a_۲a_۳ \in I$.

مثال. (الف) فرض کنید $\mathbf{Z}$ حلقه اعداد صحیح $R = \mathbf{Z}_۸$ و $D = \mathbf{Z}_{p^۲} \oplus F$ باشد که در آن p یک عدد اول از $\mathbf{Z}$ و F یک میدان است. در این‌صورت هر ایده‌آل سره ناصفر از هر یک از حلقه‌های R و D، ۲-جاذب است.

(ب) فرض کنید $\mathbf{R}$ حلقه اعداد حقیقی باشد. قرار دهید $R = \dfrac{\mathbf{R}[|x, y|]}{(xy, x^۲ - y^۲, x^۳, y^۳)}$. در این‌صورت هر ایده‌آل سره ناصفر از R، ۲-جاذب است.

---

[۱] Badawi

طبق [۹، قضیه ۲.۱] اگر I ایده‌آل ۲-جاذبی از حلقه R باشد، آنگاه $Rad(I)$ نیز ایده‌آل ۲-جاذبی از R است.

طبق [۹، قضیه ۲.۳] اگر I ایده‌آلی ۲-جاذب از حلقه R باشد، آنگاه حداکثر دو ایده‌آل اول کمین برای I موجود است.

طبق [۹، قضیه ۲.۱۳] اگر I ایده‌آل سره ناصفری از حلقه R باشد، شرایط زیر معادلند.

(الف) I، ۲-جاذب است.

(ب) برای ایده‌آل‌های $I_1, I_2, I_3 \in R$ که $I_1I_2I_3 \subseteq I$، آنگاه $I_1I_2 \subseteq I$ یا $I_1I_3 \subseteq I$ یا $I_2I_3 \subseteq I$.

طبق [۹، قضیه ۳.۱۵] اگر R یک دامنه صحیح نوتری باشد که میدان نیست، آنگاه گزاره‌های زیر معادلند.

(الف) R یک دامنه ددکیند است.

(ب) اگر I یک ایده‌آل ۲-جاذب از R باشد، آنگاه $I \in Max(R)$ یا $M \in Max(R)$ موجود است به‌قسمی‌که $I = M^2$ یا $M_1, M_2 \in Max(R)$ موجودند به‌قسمی‌که $I = M_1M_2$.

(ج) اگر I یک ایده‌آل ۲-جاذب از R باشد، آنگاه I یک ایده‌آل اول است یا ایده‌آل اول P از R موجود است به‌قسمی‌که $I = P^2$ یا ایده‌آل‌های اول P_1, P_2 از R موجودند به‌قسمی‌که $I = P_1 \cap P_2$.

مفهوم ایده‌آل‌های ۲-جاذب توسط اندرسون و بداوی در [۵] به صورت زیر تعمیم یافته است: ایده‌آل سره I از R را n-جاذب نامیم اگر برای $a_1, ..., a_{n+1} \in R$ که $a_1...a_{n+1} \in I$، آنگاه حاصل‌ضرب n تا از a_i ها متعلق به I باشد. در این رساله ایده‌آل $(n-1)$-جاذب را ایده‌آل $(n-1, n)$-اول می‌نامیم. بنابراین ایده‌آل $(1, 2)$-اول همان ایده‌آل اول و ایده‌آل $(2, 3)$-اول همان ایده‌آل ۲-جاذب خواهد بود.

مثال. بدیهی است که هر ایده‌آل ۲-جاذب یک ایده‌آل n–جاذب است، $(n \geq 2)$.

فرض کنید $P_1, ..., P_n$ ایده‌آل‌های اولی از حلقه R باشند که دوبه‌دو هم‌بیشین هستند. در

این‌صورت $I = P_1 ... P_n$ ایده‌آلی $n-$جاذب از R است.

طبق [۵، قضیه ۲.۵] اگر I ایده‌آلی $n-$جاذب از حلقه R باشد، آنگاه حداکثر n ایده‌آل اول کمین برای I موجود است.

طبق [۵، قضیه ۵.۳] برای هر ایده‌آل سره I از حلقه نوتری R، عدد صحیح مثبت n موجود است به‌قسمی‌که I، $n-$جاذب است.

ایده‌آل سره I از حلقه R را $(n-1, n) - \phi$-اول می‌نامیم اگر برای $a_1, a_2, ..., a_n \in R$ که $a_1 a_2 ... a_n \in I \setminus \phi(I)$ ، آنگاه برای یک $i \in \{1, 2, ..., n\}$، $a_1 a_2 ... a_{i-1} a_{i+1} ... a_n \in I$.
برای $\phi = \phi_0$ ایده‌آل $(n-1, n) - \phi_0$-اول را $(n-1, n)$-اول ضعیف نامیده و برای $\phi = \phi_2$ ایده‌آل $(n-1, n) - \phi_2$-اول را $(n-1, n)$-تقریباً اول می‌نامیم.

اخیراً بداوی و دارانی [1] در [۱۰] ، ایده‌آل‌های $(2, 3) - \phi_0$-اول رامورد مطالعه قرار داده‌اند. نویسندگان [۱۰] ، ایده‌آل سره I از R را ۲-جاذب ضعیف نامیده‌اند اگر برای $a_1, a_2, a_3 \in R$ که $a_1 a_2 a_3 \in I \setminus \{0\}$ ، آنگاه $a_1 a_2 \in I$ یا $a_1 a_3 \in I$ یا $a_2 a_3 \in I$.
بنابراین ایده‌آل $(2, 3) - \phi_0$-اول همان ایده‌آل ۲-جاذب ضعیف خواهد بود.

مثال. $M = \{\bar{0}, \bar{4}\}$ را به‌عنوان ایده‌آلی از حلقه $\mathbf{Z}_8$ و $K = M[x]$ را به‌عنوان ایده‌آلی از حلقه $\mathbf{Z}_8[x]$ در نظر بگیرید. فرض کنید $R = \mathbf{Z}_8 \oplus K$ و $I = \{0\} \oplus K$. بدیهی است که I ایده‌آلی از R است. چون $abc \in I$ برای $a, b, c \in R \setminus I$ اگر وتنها اگر $abc = (0, 0)$، I ایده‌آلی ۲-جاذب ضعیف از R است که ۲-جاذب نیست [۱۰، مثال ۲.۱] .

طبق [۱۰، لم ۳.۶] اگر هر ایده‌آل سره از حلقه R، ۲-جاذب ضعیف باشد، آنگاه R حداکثر سه ایده‌آل بیشین دارد.

طبق [۱۰، قضیه ۳.۷] هر ایده‌آل سره از حلقه R، ۲-جاذب ضعیف است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

(الف) (R, M) حلقه‌ای موضعی و $M^3 = 0$ باشد.

---
[1] Darani

(ب) $R \cong R_1 \times F$ که یکریختی حلقه‌ای بوده و در آن R_1 یک حلقه موضعی با ایده‌آل بیشین M بوده به‌قسمی‌که $M^2 = 0$ و F یک میدان است.

(ج) $R \cong F_1 \times F_2 \times F_3$ که یکریختی حلقه‌ای بوده و F_1, F_2, F_3 میدان هستند.

فرض کنید $\phi : S(R) \longrightarrow S(R) \cup \{\emptyset\}$ یک تابع باشد. در قضیه ۱.۱.۱، نشان خواهیم داد اگر ایده‌آل $(n-1, n)$-ϕ-اول P، $(n-1, n)$-اول نباشد، آنگاه $P^n \subseteq \phi(P)$. در حالت خاص اگر $\phi = \phi_0$ آنگاه $P^n = 0$ و لذا $P \subseteq \sqrt{0}$. همچنین در قضیه ۱۱.۱.۱، نشان خواهیم داد برای حلقه R که $|Max(R)| \geq n \geq 2$، هر ایده‌آل سره از R، $(n-1, n)$-اول ضعیف است اگر و تنها اگر میدان‌های $F_1, F_2, ..., F_n$ موجود باشد به‌قسمی‌که $R \cong F_1 \times F_2 \times ... \times F_n$.

ایده‌آلی که توسط یک عضو تولید شود را ایده‌آل اصلی نامند. در قضیه ۴.۲.۱، نشان خواهیم داد که در حلقه تجزیه‌ناپذیر R هر ایده‌آل سره (اصلی) $(n-1, n)$-ϕ_n-اول است اگر و تنها اگر (R, M) حلقه‌ای موضعی و $M^n = 0$ باشد. بنابراین در حلقه موضعی، هر ایده‌آل سره(اصلی) $(n-1, n)$-اول ضعیف است اگر و تنها اگر $M^n = 0$.

فرض کنید $m \geq n$ و $R_1, R_2, ..., R_m$ حلقه‌هایی جابجایی و $R = R_1 \times R_2 \times ... \times R_m$ باشد. در قضیه ۷.۲.۱، نشان خواهیم داد که هر ایده‌آل سره از R، $(n-1, n)$-n-تقریباً اول است اگر و تنها اگر R حلقه‌ای منظم باشد. همچنین در قضیه ۱۰.۲.۱، نشان خواهیم داد بعد حلقه R که هر ایده‌آل سره اصلی از آن $(n-1, n)$-تقریباً اول می‌باشد، برابر صفر است ($n \geq 2$).

حلقه ZPI[1] حلقه‌ای است که هر ایده‌آل سره از آن را می‌توان به شکل حاصل‌ضربی از ایده‌آل‌های اول آن حلقه نوشت.

مثال. هر PID یک دامنه ددکیند و درنتیجه یک حلقه ZPI است.

طبق [۱۸] حلقه R یک حلقه ZPI است اگر و تنها اگر به شکل حاصل‌ضربی متناهی

[1] Zerlegung Primideale

از دامنه‌های ددکیند و حلقه‌های $SPIR$ باشد. اندرسون و اسمیت در [۷، قضیه ۷] ، نشان داده‌اند که هر ایده‌آل سره از حلقه R حاصل‌ضربی از ایده‌آل‌های اول ضعیف است اگر و تنها اگر R یک حلقه ZPI یا (R,M) حلقه‌ای موضعی و $M^2 = 0$ باشد. حلقه موضعی (R,M) را یک حلقه $SPAP$[1] نامند اگر:

۱. برای هر $x \in M \setminus M^2$، $(x^2) = M^2$،

۲. $M^3 = 0$.

مثال. اگر حلقه(R,M) ، $SPIR$ و $M^3 = 0$، آنگاه R، یک حلقه $SPAP$ است.

نویسندگان [۶، قضیه ۲۲] ، نشان داده‌اند که در حلقه نوتری R هر ایده‌آل سره حاصل‌ضربی از ایده‌آل‌های تقریباً اول است اگر و تنها اگر R حاصل‌ضربی متناهی از دامنه‌های ددکیند، حلقه‌های $SPIR$ و حلقه‌های $SPAP$ باشد.

فرض کنید R یک حلقه و M یک R- مدول باشد. مجموعه همه زیرمدول‌های M را با $S(M)$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه R باشد. می‌دانیم که $\sqrt{I}$ عبارت است از اشتراک همه ایده‌آل‌های اول R که شامل I هستند. همچنین فرض کنید N زیرمدولی از M باشد. قرار دهید $(N:M) = \{r \in R : rM \subseteq N\}$. بدیهی است که $(N:M)$ ایده‌آلی از حلقه R است.

یک تعمیم طبیعی برای ایده‌آل‌های اول مفهوم زیرمدول‌های اول است که در دو دهه اخیر توجه نویسندگان زیادی را به خود جلب کرده است(به عنوان مثال مراجع [۱۲]و [۲۵]-[۱۹] را ببینید). در این کاوش‌ها اطلاعات زیادی درباره ساختار مدول‌ها به‌دست آمده است. زیرمدول سره P از M را اول نامند هرگاه برای $x \in M, r \in R$ که $rx \in P$ ، آنگاه $x \in P$ یا $r \in (P:M)$.

مثال. هر ایده‌آل اول از حلقه R، یک زیرمدول اول از $R-$مدول R است و بالعکس.

مثال. فرض کنید p یک عدد صحیح اول باشد.

---

[1] Special Product of Almost Prime ideal

گروه جمعی $\mathbf{Z}_{p^\infty} = \{\frac{a}{p^n} + \mathbf{Z} | a \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$ را به‌عنوان $\mathbf{Z}-$مدول درنظر بگیرید. فرض کنید N زیرمدول اولی از $\mathbf{Z}_{p^\infty}$ باشد. می‌دانیم N توسط $\frac{1}{p^k} + \mathbf{Z}$ تولید می‌شود که k عدد صحیح مثبتی است. چون $p(\frac{1}{p^{k+1}} + \mathbf{Z}) \in N$، لذا یا $\frac{1}{p^{k+1}+\mathbf{Z}} \in N$ و یا $p\mathbf{Z}_{p^\infty} \subseteq N$. اگر $\frac{1}{p^{k+1}} + \mathbf{Z} \in N$، آنگاه $t \in \mathbf{Z}$ موجود است به‌قسمی‌که $p^{k+1} | 1 - tp$ و درنتیجه $p | 1$، که تناقض است.

حال اگر $p\mathbf{Z}_{p^\infty} \subseteq N$، آنگاه $\frac{1}{p^{k+1}} + \mathbf{Z} = p(\frac{1}{p^{k+2}} + \mathbf{Z}) \in N$ و مشابه قسمت قبل بایستی $p | 1$، که تناقض است. درنتیجه $\mathbf{Z}_{p^\infty}$ به‌عنوان $\mathbf{Z}-$مدول فاقد زیرمدول اول است.

مثال. فرض کنید R یک دامنه صحیح و K میدان کسرهای R باشد. به‌سادگی می‌توان دید که زیرمدول $\{0\}$، تنها زیرمدول اول از $R-$مدول K است. به‌خصوص، $\{0\}$ تنها زیرمدول اول از $\mathbf{Z}-$مدول $\mathbf{Q}$ است.

مثال. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد. اگر W زیرفضای سره‌ای از V باشد، آنگاه $(W : V) = 0$ و به‌آسانی می‌توان دید که W زیرمدول اولی از V است.

به‌راحتی می‌توان دید که اگر P زیرمدولی اول از M باشد، آنگاه $(P : M)$ ایده‌آلی اول از R است. در مثال زیر نشان می‌دهیم که عکس این مطلب درست نیست.

مثال. $\mathbf{Q}$ را به‌عنوان $\mathbf{Z}-$مدول در نظر بگیرید. $(\mathbf{Z} : \mathbf{Q}) = 0$ ایده‌آل اولی از $\mathbf{Z}$ بوده ولی $\mathbf{Z}$ زیرمدول اولی از $\mathbf{Q}$ نمی‌باشد.

در [۲۳] مفهوم ایده‌آل اول ضعیف به زیرمدول اول ضعیف تعمیم داده شده است. به این صورت که: زیرمدول سره P از M را اول ضعیف نامند هرگاه برای $x \in M, r \in R$ که $0 \neq rx \in P$ ، آنگاه $x \in P$ یا $r \in (P : M)$.

مثال. هر زیرمدول اول یک زیرمدول اول ضعیف است. هر ایده‌آل اول ضعیف از حلقه R یک زیرمدول اول ضعیف از $R-$مدول R است.

طبق [۲۳، لم ۸] اگر (R, m) یک حلقه موضعی و $m^2 = 0$ و همچنین M یک $R-$مدول ضربی باشد، آنگاه هر زیرمدول سره از M اول ضعیف است.

در [۲۵] مفهوم ایده‌آل ϕ-اول به زیرمدول ϕ-اول تعمیم داده شده است. به این صورت که: فرض کنید $\phi : S(M) \longrightarrow S(M) \cup \{\emptyset\}$ یک تابع باشد. گوییم زیرمدول سره P از M، ϕ-اول است اگر برای $r \in R$ و $x \in M$ که $rx \in P \setminus \phi(P)$ ، آنگاه $x \in P$ یا $r \in (P : M)$.

مثال. هر زیرمدول اول یک زیرمدول ϕ−اول است. هر ایده‌آل ϕ−اول از حلقه R یک زیرمدول ϕ−اول از R−مدول R است.

طبق[۲۵، قضیه ۲.۱۱] فرض کنید P زیرمدول سره ای از R−مدول M بوده و همچنین $\phi : S(M) \longrightarrow S(M) \cup \{\emptyset\}$ یک تابع باشد، آنگاه شرایط زیر معادلند.

(الف) P زیرمدول ϕ−اولی از M است.

(ب) برای ایده‌آل I از R و زیرمدول L از M اگر $IL \subseteq P$ و $IL \nsubseteq \phi(P)$، آنگاه $I \subseteq (P : M)$ یا $L \subseteq P$.

فرض کنید P زیرمدولی از R-مدول M و $\phi : S(M) \longrightarrow S(M) \cup \{\emptyset\}$ یک تابع باشد. چون $P \setminus \phi(P) = P \setminus (P \cap \phi(P))$ ، بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد $\phi(P) \subseteq P$. برای دو تابع $\psi_1, \psi_2 : S(M) \longrightarrow S(M) \cup \{\emptyset\}$ گوییم $\psi_1 \leq \psi_2$ اگر برای هر $N \in S(M)$ ، داشته باشیم $\psi_1(N) \subseteq \psi_2(N)$.

فرض کنید توابع $\phi_\alpha : S(M) \longrightarrow S(M) \cup \{\emptyset\}$ و زیرمدول های ϕ_α-اول مربوط به هر تابع به صورتی که در زیر نمایش داده شده باشند:

$\phi_\emptyset$	$\phi(N) = \emptyset$	زیرمدول اول
ϕ_0	$\phi(N) = 0$	زیرمدول اول ضعیف
ϕ_1	$\phi(N) = N$	هر زیرمدول
ϕ_2	$\phi(N) = (N : M)N$	زیرمدول تقریباً اول
$\phi_n (n \geq 2)$	$\phi(N) = (N : M)^{n-1}N$	زیرمدول n-تقریباً اول
ϕ_ω	$\phi(N) = \bigcap_{i=1}^{\infty}(N : M)^i N$	زیرمدول ω-اول

به‌راحتی می‌توان دید که $\phi_{\emptyset} \leq \phi_0 \leq \phi_\omega \leq \cdots \leq \phi_{n+1} \leq \phi_n \leq \cdots \leq \phi_2 \leq \phi_1$.

در فصل دوم مفهوم ایده‌آل $(n-1,n)-\phi$-اول را به زیرمدول $(n-1,n)-\phi$-اول به‌صورتی که در زیر بیان شده تعمیم می‌دهیم:

فرض کنید M یک R-مدول و $\phi : S(M) \longrightarrow S(M)\cup\{\emptyset\}$ یک تابع باشد. زیرمدول سره P از M را $(n-1,n)-\phi$-اول نامیم اگر برای $a_1, a_2, ..., a_{n-1} \in R$، $x \in M$ که $a_1a_2...a_{n-1}x \in P \setminus \phi(P)$ ، آنگاه $a_1...a_{n-1} \in (P : M)$ یا $a_1...a_{i-1}a_{i+1}...a_{n-1}x \in P$ (برای یک $i \in \{1, ..., n-1\}$).

اگر $\phi = \phi_{\emptyset}$، آنگاه زیرمدول $(n-1,n)-\phi_{\emptyset}$-اول را $(n-1,n)$-اول و اگر $\phi = \phi_0$، آنگاه زیرمدول $(n-1,n)-\phi_0$-اول را $(n-1,n)$-اول ضعیف و اگر $\phi = \phi_m$، آنگاه زیرمدول$(n-1,n)-\phi_m$ -اول را $(n-1,n)-m$-تقریباً اول می‌نامیم $(n, m \geq 2)$.

فرض کنید$\phi : S(M) \longrightarrow S(M) \cup \{\emptyset\}$ یک تابع باشد. در قضیه ۱.۱.۲، نشان خواهیم داد که اگر P یک زیرمدول $(n-1,n)-\phi-$اول از M باشد که $(n-1,n)-$اول نیست، آنگاه $(P : M)^{n-1}P \subseteq \phi(P)$. در حالت خاص اگر $\phi = \phi_0$ و P وفادار باشد آنگاه $(P : M)^{n-1} = 0$ و درنتیجه $(P : M) \subseteq \sqrt{0}$ خواهد بود.

همچنین در قضیه ۶.۲.۲، نشان می‌دهیم برای هر $i \in \{1, ..., n\}$ اگر $M_i \neq 0$ها فضاهای برداری روی میدان‌های F_i ، $R = F_1 \times ... \times F_n$ و $M = M_1 \times ... \times M_n$ باشد، آنگاه هر زیرمدول سره از M، $(n-1,n)-$ اول ضعیف است اگر و تنها اگر برای هر i، $dim M_i = 1$.

پیش‌نیازها

فرض می‌کنیم همه حلقه‌ها جابجایی و یکدار و همه مدول‌ها یکانی هستند. مجموعه همه ایده‌آل‌های اول حلقه R را با $Spec(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱. فرض کنید I ایده‌آل سره‌ای از حلقه R باشد. گوییم ایده‌آل $P \in Spec(R)$ که $I \subseteq P$ یک ایده‌آل اول کمین مربوط به I است اگر برای هر $P_1 \in Spec(R)$ که $I \subseteq P_1 \subseteq P$ ، آنگاه $P_1 = P$.

مثال ۲. هر ایده‌ال اول P یک ایده‌آل اول کمین مربوط به P است.

تعریف ۳. فرض کنید I یک ایده‌آل از حلقه R باشد و $\Sigma = \{P \in Spec(R) | I \subseteq P\}$. ایده‌آل $\cap_{P\in\Sigma} P$ را رادیکال ایده‌آل I نامیم و آن‌را با $Rad(I)$ نمایش می‌دهیم. اگر $\Sigma = \emptyset$ آنگاه $Rad(I)$ را R تعریف می‌کنیم.

مثال ۴. اگر R یک حوزه صحیح باشد، آنگاه $Rad(\{0\}) = \{0\}$.

مثال ۵. در حلقه $\mathbf{Z}$ داریم $Rad(72\mathbf{Z}) = 6\mathbf{Z}$ و $Rad(64\mathbf{Z}) = 2\mathbf{Z}$.

تعریف ۶. گوییم ایده‌آل سره Q از حلقه R اولیه است اگر برای $a, b \in R$ که $b \notin Q$ و $ab \in Q$ ، آنگاه $b \in Rad(Q)$.

مثال ۷. هر ایده‌آل اول، اولیه است.

مثال ۸. هرگاه p یک عدد صحیح اول و $n \geq 2$ یک عدد صحیح باشد، آنگاه (p^n) یک ایده‌آل اولیه از حلقه $\mathbf{Z}$ است که اول نمی‌باشد.

تعریف ۹. گوییم عضو a از حلقه R خودتوان است اگر $a^2 = a$.

مثال ۱۰. عضو $\overline{3}$ در حلقه $\mathbf{Z}_6$ خودتوان است.

تعریف ۱۱. گوییم دو ایده‌آل I, J از حلقه R هم‌بیشین هستند اگر $I + J = R$.

مثال ۱۲. هر دو ایده‌آل بیشین متمایز از حلقه R، هم‌بیشین هستند.

تعریف ۱۳. گوییم زیرمجموعه T از حلقه R بسته ضربی است هرگاه $1 \in T$ و $0 \notin T$ و اگر $a, b \in T$، آنگاه $ab \in T$.

مثال ۱۴. فرض کنید R یک حلقه باشد و $P \in Spec(R)$. در این‌صورت $R \setminus P$ یک زیرمجموعه بسته ضربی از R است.

فرض کنید R یک حلقه و T یک زیرمجموعه بسته ضربی از R باشد. رابطه " $\sim$ " روی $R \times T$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$(a, s) \sim (b, t) \Longleftrightarrow \exists u \in T; u(at - bs) = 0.$$

به‌وضوح " $\sim$ " یک رابطه هم‌ارزی بوده و کلاس‌های هم‌ارزی ناشی از این رابطه هم‌ارزی را با $\frac{a}{s}$ نمایش می‌دهیم. همچنین مجموعه تمام این کلاس‌های هم‌ارزی را با $T^{-1}R$ یا R_T نمایش داده و به آن حلقه کسرهای R گوییم. حال با تعریف اعمال جمع و ضرب به صورت زیر، R_T را به یک حلقه جابجایی و یکدار تبدیل می‌کنیم.

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st} \quad , \quad \frac{a}{s}.\frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

به‌سادگی می‌توان نشان داد که تعاریف فوق مستقل از نمایش (a, s) و (b, t) می‌باشند. حال یک حالت بسیار مهم از حلقه کسرها را بیان می‌کنیم. فرض کنید $P \in Spec(R)$ و $T = R \setminus P$. لذا

$$R_T = \{\frac{a}{s} | a \in R, s \in T\}$$

در این حالت حلقه R_T یک حلقه موضعی با تنها ایده‌آل بیشین $m = \{\frac{a}{s} \in R_T | a \in P\}$ می‌باشد. معمولاً در این حالت R_T را با R_P و m را با PR_P نمایش می‌دهیم. R_P را موضعی‌سازی R در P می‌نامیم.