دانشکده علوم ریاضی و آمار

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

گروه هایی‌که در عکس قضیه شور صدق می‌کنند

استاد راهنما

دکترمحمد مهدی نصرآبادی

استاد مشاور

دکتر حسین اقدامی

نگارنده

مهری نصرآبادی

شهریور ۱۳۹۲

چکیده

یک قضیه مشهور از شور بیان می کند که اگر G یک گروه باشد، متناهی بودن $\frac{G}{Z(G)}$ ، متناهی بودن G' را نتیجه می دهد.عکس قضیه شور، مسئله ای بود که توجه بسیاری از محققان را به خودش جلب کرد.
به تازگی پاداسکی و سزگی نشان دادند که عکس قضیه شور در مورد گروه های توانا برقرار است. همچنین آن ها برای مرتبه مرکز چنین گروه هایی یک کران بالا به دست آوردند.
در این پایان نامه گروه هایی را بررسی می کنیم که توانا نیستند اما در عکس قضیه شور صدق می کنند و کران پاداسکی و سزگی یک کران بالا برای آنهاست.

واژگان کلیدی: گروه توانا. n -ایزوکلینیسم. p -گروه فوق ویژه . قضیه شور
تعداد صفحات پایان نامه: ۶۹

تقدیم به همسرم

کسی که همگام همیشگی ام در تمام زندگی است و بی شک بدون تشویق و همراهی او پیمودن این مسیر برایم میسر نبود.

تقدیم به روح پدر و مادرم

آنهایی که هر چند در کنارم نیستند، اما همیشه اثر دعایشان را در لحظه لحظه زندگیم حس می کنم.

و به گل های زندگیم رضا و امیر

که وجودشان سرشار از امید به آینده است.

خدایا... [1]

از نفسم شکایت دارم که مرا به بدي فرمان مي دهد و به سمت خطا پیش مي راندم.
از نفسم شکایت دارم که به نافرماني از تو حریص است و خشمت را بر مي انگیزد.
از نفسم شاکي ام که مرا به راه هاي نابودي کشانده و در مقابل تو به خواري هلاکم کرده است.
پر بهانه است ... با آرزوهاي بلند . در مقابل بدي بي تاب است و به خوبي پشت مي کند . دنبال بازي و سرگرمي است، پر از غفلت و فراموشي. توبه امروزم را به فردا مي اندازد و سینه ام را از تشویش پر مي کند.
خدایا!
از او به تو پناه مي برم که هوس هایش در قلبم مي چرخد و خواهش هایش را اجابت مي کند. دوستي دنیا را پیش چشم ام زیبا جلوه مي دهد و پرده اي مي کشد میان من و فرمانبرداري از تو. به تو پناه مي برم از قلبم که وسوسه سیاهش کرده و رنگ تیرگي آن را آلوده است . پناه مي برم به تو از چشم ام که از بیم تو اشك نمیریزد و به سمت هر چه خوش اش مي آید مي رود.
به تو پناه مي برم از خودم.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

---
[1] مناجاتی از امام سجاد(ع)

سپاس گزاری...

سپاس خداوندی را که گویندگان به عرصه ستایشش نمی رسند، شماره گران از عهده شمردن نعمت هایش برنیایند، کوشندگان حقش را ادا نکنند، اندیشه های بلند او را درک ننمایند و هوش های ژرف به حقیقتش دست نیابند.

بعد از حمد و سپاس خداوند متعال که روح تشکر را در کالبدم دمید، یک دنیا سلام و مهرورزی را به تمام استادان مهربانم تقدیم می دارم که زکات علم خویش را در طبق اخلاص ره توشه ی راهم ساختند.

در اینجا بر خود لازم می دانم که صمیمانه از زحمات استاد راهنمای محترم جناب آقای دکتر محمد مهدی نصرآبادی که همواره با چهره ای بشاش و برخورد گرم و صمیمی، پیگیر مراحل مختلف پایان نامه من بودند و همچنین جناب آقای دکتر حسین اقدامی که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان نامه را تقبل فرمودند، و خانم دکتر اعظم کاهنی که از ایشان نیز بهره فراوان بردم، و همه کسانی که مرا یاری کردند، تشکر و قدردانی نمایم . جاده زندگیشان مرصع به تن پوش دعا باد.

مهری نصرآبادی
شهریور ۱۳۹۲

فهرست مطالب

پیش گفتار

این پایان نامه مشتمل بر چهار فصل است.

در فصل اول به بیان تعاریف و مفاهیم اساسی و قضایای کاربردی می پردازیم که مبتنی بر دانش آموخته های قبلی است. از این رو نگاهی گذرا به مطالب خواهیم داشت و اثبات اغلب آنها را ارجاع خواهیم داد. در بیان مطالب این فصل از [۱۴] و [۱۷] استفاده شده است.

در فصل دوم به تعریف چند نوع گروه خاص از جمله گروه توانا و گروه فوق ویژه می پردازیم. چند قضیه درباره گروه های توانا وگروه های c -توانا بررسی می شود.

شرط ایزوکلینیک بودن دو گروه را مطرح خواهیم کرد. ارتباط بین ایزوکلینیک و همریختی را بیان کرده، به بررسی مثال ها می پردازیم.

در فصل سوم به مطالعه تحقیقات محققان در رابطه با شرایط خاص برقراری عکس قضیه شور می پردازیم. کران های به دست آمده توسط آن ها مطرح می شود و سعی بر آن است که کران های بهتری مورد بحث قرار گیرد.

در فصل پایانی، نتیجه اصلی این کار که مربوط به خاصیت β است، بیان می شود و نشان خواهیم داد گروه های دارای خاصیت فوق، در عکس قضیه شور صدق می کنند. پس به دنبال گروه هایی هستیم که در خاصیت β صدق کنند.

مرجع اصلی این پایان نامه [۱۰] می باشد.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

.

در این فصل به بیان تعاریف و مفاهیم اساسی و قضایای کاربردی می پردازیم که مبتنی بر دانش آموخته های قبلی است و در فصل های بعدی مورد استفاده قرار گرفته است. از این رو نگاهی گذرا به مطالب خواهیم داشت و اثبات اغلب آنها را ارجاع خواهیم داد.

۱.۱ جابجاگرهای ساده و خواص آنها

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید x و y عناصر دلخواهی از گروه G باشند. در این صورت جابجاگر ساده[1] x و y را با نماد $[x,y]$ نشان می دهند و به شکل زیر تعریف می شود

$$[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy.$$

به طور کلی برای هر $x_1,x_2,...,x_n$ از گروه G یک جابجاگر ساده از وزن n $(n>2)$ به صورت استقرایی با قاعده زیر تعریف می شود

$$[x_1,x_2,...,x_n]=[[x_1,x_2,...,x_{n-1}],x_n].$$

لم زیر روابطی بین جابجاگرها بیان می کند که در محاسبات با جابجاگرها بسیار سودمند هستند و اثبات آنها به سادگی از تعریف به دست می آید.

لم ۲.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت برای هر $x,y,z\in G$ داریم*

۱) $x^y=x[x,y]$؛

۲) $[x,y]^{-1}=[y,x]$؛

۳) $[x,y]^z=[x^z,y^z]$؛

۴) $xy=yx[x,y]$؛

[1] commutator

۵) $[x, y^{-1}] = [y, x]^{y^{-1}}$؛ ۶) $[x^{-1}, y] = [y, x]^{x^{-1}}$؛

۷) اتحادهای هال

الف) $[xy, z] = [x, z]^y[y, z]$؛ ب) $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$؛

۸) اتحاد ویت

$[x, y^{-1}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z[z, x^{-1}, y]^x = 1$ یا $[y, x, z^y][z, y, x^z][x, z, y^x] = 1$.

برهان. به ۵.۱.۵ از [۱۴] رجوع شود. □

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید X و Y زیر مجموعه های G باشند. در این صورت زیرگروه جابجاگر Y, Xرا با نماد $[X, Y]$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$[X, Y] = \langle [x, y \mid x \in X, y \in Y \rangle.$$

در حالت کلی اگر $X_1, X_2.....,X_n$ زیرمجموعه های G باشند، آنگاه زیرگروه جابجاگر از وزن n به فرم زیر است

$$[X_1, X_2, ..., X_n] = [[X_1, X_2, ..., X_{n-1}], X_n].$$

بالاخص زیرگروه $[G, G]$ از G را زیرگروه جابجاگر یا زیرگروه مشتق [۲] می نامند و با G' نیز نشان می دهند. به عبارت دیگر

$$G' = [G, G] = \langle [x, y] \ \mid \ x, y \in G \rangle.$$

گزاره ۴.۱.۱. *شرایط زیر در مورد گروه G برقرار است:*

الف) G' زیرگروه نرمال G است؛

ب) $\frac{G}{G'}$ گروهی آبلی است؛

ج) اگر $N \trianglelefteq G$ و $\frac{G}{N}$ آبلی باشد، آنگاه $G' \leq N$.

برهان. به ۳.۲.۶ از [۱۷] مراجعه شود. □

لم ۵.۱.۱. *فرض کنید K, H زیرگروه های G باشند. در این صورت*

[۲] Derived subgroup

۱. اگر $H, K \trianglelefteq G$ ، آنگاه $[H, K] \trianglelefteq \langle H, K\rangle$؛

۲. $[H, K] = [K, H]$؛

۳. $H \subseteq N_G(K) \Leftrightarrow [H, K] \leq K$.

برهان. به ۶.۲.۶ از [۱۷] رجوع شود. □

لم ۶.۱.۱. *(لم سه زیرگروه) فرض کنید G گروهی دلخواه و Z, Y, X زیرگروههای G باشند و $N \trianglelefteq G$. در این صورت هرگاه دو تا از زیرگروه های جابجاگر $[X, Y, Z]$ ، $[Y, Z, X]$ و $[Z, X, Y]$ مشمول در N باشند، آنگاه زیرگروه جابجاگر سوم نیز مشمول در N خواهد بود.*
به ویژه اگر X ، Y و Z در G نرمال باشند، آنگاه $[X, Y, Z] \subseteq [Y, Z, X][Z, X, Y]$.

برهان. به ۱۰.۱.۵ از [۱۴] رجوع شود. □

لم ۷.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه دلخواه باشد، H و K زیرگروه های نرمال آن باشند و $K \leq H$. در این صورت*

$$\frac{H}{K} \leq Z(\frac{G}{K}) \quad \Longleftrightarrow \quad [H, G] \leq K$$

برهان. به ۲.۱.۱۲ از [۱۷] رجوع شود. □

قرارداد: جابجاگر $[x, y, y, ..., y]$ که در آن y ، n مرتبه تکرار شود را با نماد $[x,_n y]$ و به طور مشابه $[H, K, K..., K]$ را که در آن K ، n مرتبه تکرار می شود را با نماد $[H,_n K]$ نمایش می دهیم.
درحالت خاص، $[G, G]$ را با نماد$\gamma_۲(G)$ و $[G,_n G]$ را با نماد $\gamma_{n+۱}(G)$ نمایش می دهیم.

قضیه ۸.۱.۱. *اگر G یک گروه ، $x, y \in G$ و n یک عدد صحیح باشد، آنگاه*

(i) $\quad (mod\gamma_۴(G))$ $\quad [x, y^n] = [x, y]^n[x, y, y]^{\frac{n(n-۱)}{۲}}$؛

(ii) $\quad (mod\gamma_۴(G))$ $\quad [x^n, y] = [x, y]^n[x, y, x]^{\frac{n(n-۱)}{۲}}$.

برهان. اثبات(i) را به استقرا روی n انجام می دهیم. به وضوح اگر $n=1$ حکم برقرار است. حال فرض کنیم که به ازای $n \geq 2$ حکم برقرار باشد، در این صورت

$$[x,y^n]=[x,y]^n[x,y,y]^{\frac{n(n-1)}{2}} \qquad (mod\gamma_4(G))$$

ثابت می کنیم

$$[x,y^{n+1}]=[x,y]^{n+1}[x,y,y]^{\frac{(n+1)n}{2}} \qquad (mod\gamma_4(G)).$$

داریم

$$\begin{aligned}[x,y^{n+1}] &= [x,yy^n]\\ &= [x,y^n][x,y]^{y^n}\\ &= [x,y]^n[x,y,y]^{\frac{n(n-1)}{2}}[x,y][x,y,y^n]\\ &= [x,y]^n[x,y][x,y,y]^{\frac{n(n-1)}{2}}[[x,y,y]^{\frac{n(n-1)}{2}},[x,y]][x,y,y]^n[x,y,y,y]^{\frac{n(n-1)}{2}}\\ &= [x,y]^{n+1}[x,y,y]^{\frac{n(n+1)}{2}} \qquad (mod\gamma_4(G))\end{aligned}$$

و حکم اثبات شد. قسمت (ii) مشابه قسمت اول اثبات می شود. □

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید X یک زیر مجموعه غیر تهی از گروه G باشد. در این صورت اشتراک تمام زیر گروه های نرمال G که شامل X می باشند را بستار نرمال X می نامیم و آن را با نماد X^G نمایش می دهیم.

واضح است که X^G کوچکترین زیر گروه نرمال شامل X است ، یعنی $X \subseteq X^G$ و بعلاوه $X^G=\langle x^g : g\in G, x\in X\rangle$. به سادگی می توان نشان داد که $X^G \trianglelefteq \langle X,G\rangle$.

قضیه ۱۰.۱.۱. *اگر* $X\subseteq G$ *و* $H,K\leqslant G$ *، آنگاه*

(i) $X^K=\langle X,[X,K]\rangle$؛

(*ii*) $[X,K]^K=[X,K]$؛

(*iii*) اگر $K=\langle Y\rangle$، آنگاه $[X,K]=[X,Y]^K$؛

(*iv*) اگر $H=\langle X\rangle, K=\langle Y\rangle$ آنگاه $[H,K[=[X,Y]^{HK}$.

برهان.

(i) با توجه به لم ۲.۱.۱ رابطه برقرار است.

(ii) همواره داریم $[X,K]\subseteq[X,K]^K$. کافیست نشان دهیم که$[X,K]^K\subseteq[X,K]$. از آنجا که عناصر مولد$[X,K]^K$ به صورت $[x,k_۱]^k$ می باشند که در آن $k,k_۱\in K, x\in X$ و از طرفی بنا به اتحاد هال

$$[x,k_۱]^k=[x,k]^{-۱}[x,k_۱k]\in[X,K]$$

بنابراین $[X,K]^K\subseteq[X,K]$.

(iii) از یک طرف چون $K=\langle Y\rangle$ لذا $[X,Y]\subseteq[X,K]$، از طرفی با توجه به تعریف بستار نرمال $[X,Y]\subseteq[X,Y]^K\subseteq[X,K]^K$. با توجه به قسمت (ii) داریم $[X,K]^K=[X,K]$، پس $[X,Y]^K\subseteq[X,K]$.

از طرف دیگر برای هر عضو از $[X,K]$ مانند $[x,k]$ که $x\in X, k\in K$، چون $K=\langle Y\rangle$ پس داریم $k=y_۱^{e_۱}...y_r^{e_r}$ که برای هر$۱\leq i\leq r$ ، $e_i=\pm۱$ و $y_i\in Y$.

اینک به استقراء روی rنشان می دهیم که $[x,k]\in[X,K]$ ؛ به ازای $r=۱$ داریم

$$[x,y_۱^{-۱}]=[y_۱,x]^{y_۱^{-۱}}\in[X,K]^K$$

حال فرض می کنیم حکم برای $i=r-۱$ برقرار باشد، نشان می دهیم حکم برای $i=r$ برقرار است. اگر قرار دهیم

$$k'=y_۱^{e_۱}...y_{r-۱}^{e_{r-۱}}$$

داریم

$$[x,k]=[x,k'y_r^{e_r}]=[x,y_r^{e_r}][x,k']^{y_r^{e_r}}\in[X,K]^K$$

بنابراین $[X,K]\subseteq[X,Y]^K$ پس $[X,K]=[X,Y]^K$.

(iv) از قسمت (i) داریم

$$[H,K]=[H,Y]^K=[Y,H]^K=[Y,X]^{HK}=[X,Y]^H$$

۲.۱ مطالب بنیادی گروهها

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت کوچکترین عدد صحیح مثبت k که به ازای هر $a\in G$ داشته باشیم $a^k=1$ ، را نمای [۳] گروه G نامند و با نماد $exp(G)$ نشان می دهند. اگر چنین عددی موجود نباشد، آنگاه گوییم G از نمای نامتناهی است.

به راحتی می توان دید که در گروه های متناهی کوچکترین مضرب مشترک مرتبه عناصرگروه نمای گروه است، یعنی اگر $exp(G)=m$، آنگاه $x^m=1$ برای هر $x\in G$.

در حالت خاص اگر $|G|=n$، آنگاه $exp(G)|n$.

مثال ۲.۲.۱. در گروه ۴ عضوی کلاین داریم $|K_4|=4$ و $exp(K_4)=2$.

مثال ۳.۲.۱. گروه ... $G=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times$ نامتناهی ولی از نمای ۲ است.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید π مجموعه ای از اعداد اول باشد. دراین صورت $x\in G$ یک π-عنصر نامیده می شود اگر $|x|$ فقط به وسیله اعداد موجود در π عاد شود.

به طور مشابه G یک π-گروه نامیده می شود اگر $|G|$ فقط به وسیله اعداد اول موجود در π عاد شود.

---

[۳] exponent

اگر $\pi = \{p\}$، آنگاه G را p–گروه نامند.

π' برابر است با مجموعه همه اعداد اول که در π نیستند.

مثال ۵.۲.۱. برای هر $n \in \mathbb{Z}$ گروه جمعی $\mathbb{Z}_{p^n}$، p –گروهی متناهی است، زیرا مرتبه هر عنصر آن مقسوم علیه ای از p^n است. همچنین

$$\mathbb{Z}_{p^\infty} = \langle (\frac{۱}{p^i} + \mathbb{Z} \ \ ; \ i = ۱, ۲, ...) \rangle$$

p –گروهی نامتناهی است.

گزاره ۶.۲.۱. *مرکز هر p– گروه نابدیهی است. به طور کلی اگر G یک p–گروه و N زیرگروه نرمال و غیربدیهی G باشد، آنگاه $N \cap Z(G)$ نابدیهی است.*

برهان. به ۴.۲.۹ از [۱۷] مراجعه شود. □

تعریف ۷.۲.۱. گروه G تابدار نامیم[۴] هر گاه به ازای هر $g \in G$ عدد صحیح ناصفری مانند m وجود داشته باشد به طوری که $g^m = ۱$.

مثال ۸.۲.۱. هر گروه متناهی یک گروه تابدار است.

تعریف ۹.۲.۱. گروه G را متناهیاً تولید شده یا متناهی مولد[۵] نامند هر گاه تعداد متناهی عنصر مانند $g_۱, g_۲, ..., g_n \in G$ موجود باشد به قسمی که $G = \langle g_۱, g_۲, ..., g_n \rangle$.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنید G یک گروه و A زیرمجموعه ی ناتهی از آن باشد. در این صورت

$$C_G(A) = \{z \in G \ \ : \ \ za = az \ , \ \forall \ \ a \in A\}$$

را مرکز ساز [۶] A در G می نامند.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنید G یک گروه غیر بدیهی باشد. در این صورت زیرگروه سره ای از G مثل H را زیرگروه ماکسیمال [۷] نامند هرگاه برای هر زیرگروه از G مانند K که $H \lneqq K$، داشته باشیم $K = G$.

[۴] Torsion
[۵] Finitely generated
[۶] Centralizer
[۷] Maximal subgroup

تعریف ۱.۲.۱۲. اشتراک همه زیرگروه های ماکسیمال G را **زیرگروه فراتینی**[۸] G می نامیم. اگر G هیچ زیر گروه ماکسیمالی نداشته باشد فراتینی G همان گروه G تعریف می شود.

به عنوان مثال

$$\phi(Q) = Q \qquad\qquad \phi(S_۳) = \langle ۱ \rangle$$

تعریف ۱.۲.۱۳. فرض کنید $f : G \longrightarrow H$ یک همریختی باشد. در این صورت این همریختی را تکریختی [۹] نامند هر گاه f یک به یک باشد و آن را بروریختی گویند اگر f پوشا باشد.

اگر f یک به یک و پوشا باشد آن را یکریختی[۱۰] نامند. مجموعه ی تمام یکریختی ها از گروه G به خودش را، خودریختی[۱۱] های گروه G نامند و آن را با نماد $Aut(G)$ نمایش می دهند.

همچنین هر همریختی مانند $f : G \longrightarrow G$ را یک درونریختی[۱۲] G می نامند. مجموعه همه درونریختی های G را با $End(G)$ نشان می دهند.

تعریف ۱.۲.۱۴. فرض کنید G یک گروه و H زیرگروه آن باشد. در این صورت H را زیرگروه مشخصه ی [۱۳] G نامند هرگاه به ازای هر خودریختی θ از G داشته باشیم $\theta(H) \subseteq H$ و می نویسیم $H \overset{c}{\lhd} G$ یا $HcharG$.

مثال ۱.۲.۱۵. مرکز هر گروه، زیرگروه مشخصه ی آن است.

گزاره ۱.۲.۱۶. *هر زیر گروه مشخصه ی G یک زیرگروه نرمال آن است.*

برهان. کافی است تعریف قبل را برای خودریختی های داخلی به کار ببریم. □

تبصره ۱.۲.۱۷. *اگر H زیرگروه نرمال G باشد، لزوما زیرگروه مشخصه ی آن نخواهد بود.*

به عنوان مثال گروه چهارتایی کلاین را درنظر بگیرید، یعنی $G = \{e, a, b, ab\}$ *. قرار می دهیم*

[۸] Frattini subgroup
[۹] Monomorphism
[۱۰] Isomorphism
[۱۱] Automorphism
[۱۲] Endomorphism
[۱۳] Characteristic subgroup

$H=\{e,a\}$. به وضوح H زیرگروه نرمال G است ولی مشخصه نیست، زیرا اگر خودریختی $\theta:G\longrightarrow G$ را به صورت زیر درنظر بگیریم:

$$\theta(e)=e \quad , \quad \theta(a)=b \quad , \quad \theta(b)=a \quad , \quad \theta(ab)=ab$$

آنگاه $\theta(H)=\theta(\{e,a\})=\{e,b\}\nsubseteq H$. بنابراین H زیرگروه مشخصه ی G نیست.

گزاره ۱۸.۲.۱. *اگر G یک گروه دلخواه باشد و $A\overset{c}{\lhd}N$ و $N\trianglelefteq G$ ، آنگاه A زیرگروه نرمال G است. بعلاوه اگر N زیرگروه مشخصه ی G باشد، آنگاه A نیز زیرگروه مشخصه ی G است.*

برهان. به ۸.۲.۸ از [۱۷] مراجعه شود. □

تعریف ۱۹.۲.۱. فرض کنید F یک گروه، X یک مجموعه ناتهی و $\phi:X\longrightarrow F$ یک تابع باشد. در این صورت گوییم F روی X آزاد است هر گاه برای هر همریختی α از X به گروهی مانند G همریختی منحصر به فردی چون θ از F به G وجود داشته باشد که $\theta\phi=\alpha$.

در این تعریف می توان نشان داد که ϕ یک به یک است. در این حالت مرتبه X را رتبه F نامند. هر گروهی که روی مجموعه ای آزاد باشد، گروه آزاد[۱۴] گویند.

مثال ۲۰.۲.۱. گروه دوری نامتناهی $C_\infty=\langle x\rangle$ روی $X=\{x\}$، آزاد است زیرا اگرقرار دهیم $\phi(x)=i(x)$ و$\alpha:X\longrightarrow G$ که $\alpha(x)=g$ ، آنگاه تعریف می کنیم $\theta:C_\infty\longrightarrow G$ طوریکه $\theta(x^n)=(\alpha(x))^n=g^n$.

تعریف ۲۱.۲.۱. گروه G را حاصل ضرب مستقیم دو گروه K,H نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

i) $G=HK$ یعنی هر عضو G را بتوان به شکل $g=hk$ نوشت طوریکه$g\in G, h\in H$؛

ii) H وK هر دو نرمال در G باشند؛

iii) $H\cap K=\langle 1_G\rangle$.

[۱۴] Free group

مثال ۲۲.۲.۱. فرض کنید m و n دو عدد طبیعی باشند و $(m,n)=۱$ و G گروهی دوری از مرتبه mn باشد به طوری که $G=\langle a\rangle$. در نظر می گیریم $H=\langle a^m\rangle$ و $K=\langle a^n\rangle$.

به راحتی با استفاده از تعریف می توان نشان داد که G حاصل ضرب مستقیم دو گروه H و K می باشد.

تعریف ۲۳.۲.۱. فرض کنید H و K دو گروه باشند و $\phi : H \longrightarrow Aut(K)$ یک همریختی باشد. (تصویر h تحت ϕ را با ϕ_h نمایش می دهیم). روی حاصل ضرب دکارتی $H\times K$ عمل دو تایی زیر را تعریف می کنیم:

$$(h_۱,k_۱)(h_۲,k_۲)=(h_۱h_۲,(k_۱\phi_{h_۲})k_۲)$$

مجموعه $H\times K$ همراه عمل فوق تشکیل یک گروه می دهد که آن را حاصل ضرب نیم مستقیم دو گروه H و K همراه عمل ϕ نامند.

مثال ۲۴.۲.۱. گروه $S_۳$ حاصل ضرب نیم مستقیم دو زیر گروه H و K به شکل زیر است:

$$H=\{(۱),(۱,۲)\}\leqslant S_۳$$

$$K=\{(۱),(۱,۲,۳),(۱,۳,۲)\}\lhd S_۳$$

۳.۱ گروههای پوچ توان و حل پذیر

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت یک سری زیرنرمال[۱۵] برای G عبارت است از زنجیر زیر از زیرگروههای G

$$۱=G_۰\trianglelefteq G_۱\trianglelefteq G_۲\trianglelefteq ...\trianglelefteq G_n=G$$

[۱۵] Subnormal series

به طوری که برای هر $1 \leqslant i \leqslant n$ ، $G_{i-1} \trianglelefteq G_i$. گروههای خارج قسمتی $\frac{G_i}{G_{i-1}}$ را فاکتورهای سری زیر نرمال نامند.

اگر برای هر i داشته باشیم $G_i \trianglelefteq G$، آنگاه سری زیرنرمال بالا، سری نرمال[16] نامیده می شود.

تعریف ۲.۳.۱. سری $... \subseteq G_i \subseteq ... \subseteq G_2 \subseteq G_1 \subseteq G_0$ از زیرگروه های نرمال گروه G یک سری مرکزی[17]نامیده می شود، هرگاه برای هر $i \geqslant 1$، $\frac{G_i}{G_{i-1}} \leq Z(\frac{G}{G_{i-1}})$.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. قرار می دهیم $Z_1(G) = Z(G)$در این صورت مرکز گروه خارج قسمتی $\frac{G}{Z(G)}$ به صورت $\frac{Z_2(G)}{Z(G)}$ تعریف می شود.

با توجه به اینکه مرکز هر گروه، زیرگروه نرمالی از آن گروه است، نتیجه می گیریم که $Z_2(G) \lhd G$. $Z_2(G)$ دومین مرکز G نامیده می شود.

به طور استقرایی فرض کنید $Z_i(G)$، i–امین مرکز G باشد که در G نرمال است. در این صورت قرار می دهیم

$$\frac{Z_{i+1}(G)}{Z_i(G)} = Z(\frac{G}{Z_i(G)})$$

به سادگی دیده می شود $Z_{i+1}(G) \lhd G$. حال سری مرکزی بالایی[18] G به صورت زیر تعریف می شود

$$1 = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq ... \leq Z_i(G) \leq Z_{i+1}(G) \leq ...$$

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید Gیک گروه باشد. در این صورت قرار می دهیم

$$\gamma_1(G) = G, \quad \gamma_2(G) = [G, G] = G', \quad \gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G] \qquad \forall i \geq 1.$$

برای هر گروه G سری مرکزی پایینی G[19]به صورت زیر تعریف می شود

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq .... \geq \gamma_i(G) \geq \gamma_{i+1}(G) \geq ....$$

لم ۵.۳.۱. *اگر G یک گروه دلخواه باشد، آنگاه*

[16] Normal series
[17] Central series
[18] Upper central series
[19] Lower central series

۱. *به ازای هر i ، $\gamma_i(G)$ زیرگروه مشخصه ی G است.*

۲. *به ازای هر i، $Z(\frac{G}{\gamma_{i+1}(G)}) \subseteq \frac{\gamma_i(G)}{\gamma_{i+1}(G)}$.*

برهان. قسمت (۱) به سادگی از تعریف و استقرا روی i به دست می آید و قسمت (۲) با استفاده از لم ۷.۱.۱ به راحتی قابل اثبات است. □

لم ۶.۳.۱. *فرض کنید G یک گروه دلخواه باشد. در این صورت به ازای هر $1 \leqslant i$ ، $z \in Z_i(G)$ اگر و تنها اگر به ازای هر $g_1, g_2, ..., g_i \in G$ داشته باشیم $[z, g_1, g_2, ..., g_i] = 1$.*

برهان. با استقرا روی i به سادگی قابل اثبات است. □

حال لم زیر را بیان می کنیم که بعضی خواص جملات سری مرکزی بالایی و پایینی را ارائه می دهد.

لم ۷.۳.۱. *فرض کنید H و G دو گروه باشند و $N \trianglelefteq G$. در این صورت به ازای هر عدد صحیح $1 \leqslant i, j$ و $0 \leqslant l, k$ روابط زیر برقرارند:*

۱. $[\gamma_i(G), \gamma_j(G)] \leqslant \gamma_{i+j}(G)$؛

۲. $\gamma_i(\gamma_j(G)) \leq \gamma_{ij}(G)$؛

۳. $i \leqslant j \quad [\gamma_i(G), Z_j(G)] \leq Z_{j-i}(G)$؛

۴. $[\gamma_n(G), Z_n(G)] = 1$؛

۵. $Z_k(\frac{G}{Z_l(G)}) = \frac{Z_{k+l}(G)}{Z_l(G)}$؛

۶. $\gamma_i(\frac{G}{N}) = \frac{\gamma_i(G)N}{N}$؛

۷. $\gamma_i(G \times H) = \gamma_i(G) \times \gamma_i(H)$؛

۸. $Z_k(\frac{G}{N}) \geq \frac{Z_k(G)N}{N}$؛