بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

رساله دکتری ریاضی محض(آنالیز)

جوابهای معادلات ایستایی و تحولی از نوع یکنوا

توسط

هادی خطیب زاده

۱۳۸۶/۷/۳

استاد راهنما

۱۳۸۶/۷/۳

دکتر بهزاد جعفری روحانی

استاد مشاور

دکتر سید مسعود امینی

خرداد ۱۳۸٦

۹۰۲۸۶

دانشگاه تربیت مدرس

بسمه تعالی

تاییدیه اعضای هیات داوران حاضر در جلسه دفاع از رساله دکتری

آقای هادی خطیب زاده‌رساله واحدی خود را باعنوان: **جوابهای معادلات ایستایی و تحولی از نوع یکنوا**

در تاریخ ۸۶/۳/۱۹ ارائه کردند.

اعضای هیات داوران نسخه نهایی این رساله را از نظر فرم و محتوا تایید کرده است و پذیرش آنرا برای تکمیل درجه دکتری پیشنهاد می کند.

۱۳۸۶/۷/۳

۱۳۸۶/۷/۳

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اصلی	دکتر بهزاد جعفری روحانی	استاد	
۲- استاد راهنمای دوم	—	—	
۳- استاد مشاور اول	دکتر سیدمسعود امینی	دانشیار	
٤- استاد مشاور دوم	—	—	
۵- استاد ناظر	دکتر جعفر زعفرانی	استاد	
٦- استاد ناظر	دکتر محمود حصارکی	استاد	
۷- استاد ناظر	دکتر علی آبکار	دانشیار	
۸- استاد ناظر	دکتر علیرضا مدقالچی	استاد	
۹- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر فرشته سعدی	استادیار	

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم پایه

آیین‌نامهٔ چاپ پایان‌نامه (رساله) های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

مادهٔ ۲ در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند

«کتاب حاضر حاصل پایان‌نامهٔ ~~کارشناسی ارشد~~/رسالهٔ دکتری نگارنده در رشتهٔ ریاضی محض است که در سال ۱۳۸۶ در دانشکدهٔ علوم پایه دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی ~~سرکار خانم~~/جناب آقای دکتر محمدجعفری روحانی ، مشاورهٔ ~~سرکار خانم~~/جناب آقای دکتر سید مسعود امینی و مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر از آن دفاع شده است.»

مادهٔ ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

مادهٔ ۴- درصورت عدم رعایت مادهٔ ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ‌شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرس، تادیه کند.

مادهٔ ۵- دانشجو تعهد و قبول می‌کند درصورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادهٔ ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

مادهٔ ۶- اینجانب هادی خطیب‌زاده دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع دکتری تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام خانوادگی: هادی خطیب‌زاده

تاریخ و امضا: ۸۶/۳/۲۷

تقدیم به

همسر و فرزندانم

محمد حسین و مهدیار

قدردانی

اول سپاس بیکران خدایی را که هر توفیقی در گرو عنایت اوست. سپس از جناب آقای دکتر جعفری روحانی استاد راهنمای بزرگوارم که طی طریق این تحقیق مرهون راهنمایی و شکیبایی ایشان است. همچنین از پروفسور نیکلاس حاجی‌ساواس استاد دانشگاه اژه که فصل چهارم این رساله محصول کار مشترک با ایشان است. در نهایت از جناب آقای دکتر امینی که سمت مشاورهٔ این رساله را قبول کرده اند، کمال تشکر را دارم.

هادی خطیب زاده

— تهران

چکیده

در این رساله به بررسی رفتار مجانبی جوابهای معادلات تحولی درجهٔ دو از نوع یکنوا، همچنین رفتار مجانبی معادلات تفاضلی وابسته به آنها که الگوریتمهایی برای تقریب جواب معادلات ایستایی از نوع یکنوا مهیا می‌کنند، می‌پردازیم.

همچنین تعریف جدیدی از ماگزیمال بودن برای توابع دو متغیره یکنوا ارائه داده و خواص آنها را مطالعه می‌کنیم. بویژه نشان می‌دهیم که الگوریتمهای پیشین برای تقریب جواب معادلات ایستایی یکنوا را می‌توان برای تقریب جواب مسائل تعادل بکار برد.

واژه‌های کلیدی : معادلات تحولی، معادلات ایستایی، ماگزیمال یکنوا، رفتار مجانبی، خمهای تقریباً انقباضی، معادلات تفاضلی، توابع یکنوا، اپراتور وابسته، یکنوای دوری، مسائل تعادل.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم پایه

۱.۱ یادآوریهایی از آنالیز تابعی

در طول این رساله X فضای باناخ با نرم $\|.\|$ و دوگان X^*. H یک فضای هیلبرت، $|.|$ و $(,)$ بترتیب نمایش نرم و ضرب داخلی روی آن می‌باشند. همگرایی قوی (بترتیب ضعیف) را با $\to$ (بترتیب $\rightharpoonup$) نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۱.۱ (جداسازی مجموعه‌های محدب) فرض کنید A و B دو مجموعهٔ محدب، ناتهی با اشتراک تهی در یک فضای نرمدار باشند. اگر A بسته و B فشرده باشد در اینصورت یک ابرصفحهٔ بسته موجود است که A و B را از هم جدا می‌کند.

اثبات : به [۱۱] مراجعه شود.

قضیه ۲.۱.۱ (مازور[1]) اگر C مجموعهٔ محدب و بسته در یک فضای خطی نرمدار باشد آنگاه C بستهٔ ضعیف است.

اثبات : به [۱۱] رجوع شود.

قضیه ۳.۱.۱ (ابرلین[2]—شمولیان[3]) فضای باناخ X انعکاسی است اگر و فقط اگر هر دنبالهٔ کراندار در X شامل اقلاً یک زیردنبالهٔ همگرای ضعیف در X باشد.

اثبات : به [۱۱] رجوع شود.

تعریف ۱.۱.۱ فضای باناخ X بطور یکنواخت محدب است اگر برای هر $\epsilon > 0$، $\delta > 0$ موجود باشد بطوریکه اگر

$$x, y \in X,\ |x| \leq 1,\ |y| \leq 1,\ |x - y| > \epsilon$$

آنگاه $|\frac{x+y}{2}| < 1 - \delta$.

تعریف ۲.۱.۱ فضای باناخ X اکیداً محدب گفته می‌شود اگر برای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$ و $|x| = |y| = 1$ داشته باشیم:

$$|tx + (1 - t)y| < 1, \quad \forall t \in (0, 1)$$

Mazur[1]
Eberlein[2]
Smulian[3]

گزاره ۱.۱.۱ فرض کنید X فضای باناخ بطور یکنواخت محدب و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد که $x_n \rightharpoonup x$ و $\limsup_{n\to+\infty}|x_n| \leq |x|$ آنگاه $x_n \to x$.

اثبات : به [۱۱] مراجعه کنید.

گزاره ۲.۱.۱ اگر دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرای ضعیف به x باشد، در اینصورت $\{x_n\}$ کراندار است و $|x| \leq \liminf_{n\to+\infty}|x_n|$.

اثبات : به [۱۱] رجوع کنید.

فرض کنید $I=(a,b)$ یک فاصلهٔ کراندار یا بی کران باشد و $۱ \leq p \leq \infty$.

تعریف ۳.۱.۱ فضای سوبولف $W^{۱,p}(I)$ چنین تعریف می‌شود:

$$W^{۱,p}(I)=\{u\in L^p(I); \exists g\in L^p(I) \quad \int_I u\varphi' = -\int_I gu \quad \forall\, \varphi\in C_c^{۱}(I)\}$$

که $C_c^{۱}(I)$ مجموعهٔ توابع مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته و محمل فشرده روی I می‌باشد.

تعریف ۴.۱.۱ برای عدد صحیح داده شدهٔ $m \geq ۲$ و $۱ \leq p \leq \infty$ با استفاده از استقرا فضای زیر را تعریف می کنیم:

$$W^{m,p}(I)=\{u\in W^{m-۱,p}(I); \quad u'\in W^{m-۱,p}(I)\}$$

قرار می دهیم: $H^m(I)=W^{m,۲}(I)$

تعریف ۵.۱.۱ برای $۱ \leq p < \infty$ داده شده، بستار $C_c^{۱}(I)$ در $W^{۱,p}(I)$ را با $W_{\circ}^{۱,p}(I)$ نشان می‌دهیم و می‌نویسیم $H_{\circ}^{۱}(I)=W_{\circ}^{۱,۲}(I)$.

خواننده برای مطالعهٔ بیشتر دربارهٔ فضاهای سوبولف می‌تواند به [۱] و [۱۱] مراجعه کند.

۲.۱ آشنایی با نگاشتهای چندمقداری و اپراتورهای ماگزیمال یکنوا

تعریف ۱.۲.۱ اپراتور $A : X \to 2^Y$ که به هر نقطه در X یک زیرمجموعهٔ (احتمالاً تهی) از Y را نسبت می‌دهد یک اپراتور چندمقداری یا مجموعه مقدار از X به Y می‌نامیم. دامنهٔ موثر(یا به اختصار دامنه) و بردِ اپراتور A را بترتیب بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$D(A) := \{x \in X; \quad A(x) \neq \phi\}$$

و

$$R(A) := \cup_{x \in D(A)} A(x)$$

تعریف ۲.۲.۱ نمودار اپراتور $A : X \to 2^Y$ را بصورت

$$gr(A) := \{[x, y] \in X \times Y; x \in D(A), y \in A(x)\}$$

که زیرمجموعه‌ای از $X \times Y$ است، تعریف می‌کنیم. برعکس، به هر زیرمجموعه از $X \times Y$، می‌توان یک اپراتور وابسته کرد. معمولاً اپراتور را با نمودار متناظرش یکی می‌گیریم.

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنید A و B دو اپراتور چندمقداری باشند. جمع و ضرب اسکالر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$(A+B)(x) = A(x) + B(x) \qquad (\lambda A)(x) = \lambda A(x)$$

واضح است که دامنهٔ $A+B$ اشتراک دامنه‌های A و B و دامنهٔ λA برابر با دامنهٔ A می‌باشد.

تعریف ۴.۲.۱ اپراتور $A : X \to X^*$ نیم پیوسته در $x \in D(A)$ گفته می‌شود اگر برای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ در $D(A)$ با $x_n \to x$ داشته باشیم $A(x_n) \rightharpoonup A(x)$.

تعریف ۵.۲.۱ اپراتور $A : X \to 2^{X^*}$ نیم بسته می‌گوییم اگر برای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ در $D(A)$ که $x_n \rightharpoonup x$ و $y_n \in A(x_n)$ بطوریکه $y_n \to y$ داشته باشیم $x \in D(A)$ و $y \in A(x)$.

تعریف ۶.۲.۱ $F : X \to 2^Y$ شبه پیوسته بالایی در x_0 گفته می‌شود اگر و فقط اگر برای هر مجموعهٔ باز $V \subset Y$ که $F(x_0) \subset V$ بتوان همسایگی U از x_0 را پیدا کرد بطوریکه $F(U) \subset V$.

تعریف ۷.۲.۱ $F : X \to 2^Y$ شبه پیوسته پایینی در x_0 گفته می‌شود اگر و فقط اگر برای هر مجموعهٔ باز $V \subset Y$ که $F(x_0) \cap V \neq \phi$ همسایگی U از x_0 وجود داشته باشد بطوریکه $F(x) \cap V \neq \phi$ برای هر $x \in U$.

تعریف ۸.۲.۱ اپراتور $A : X \to 2^Y$ را بسته، محدب، فشرده یا کراندار مقدار می‌نامیم اگر برای هر $x \in X$، $A(x)$ بترتیب بسته، محدب، فشرده یا کراندار باشد.

گزاره ۱.۲.۱ تابع چندمقداری $F : X \to 2^Y$ با مقادیر ناتهی و فشرده، شبه پیوسته بالایی است اگر و فقط اگر برای هر تور $\{[x_\alpha, y_\alpha]\}_{\alpha \in J} \subset gr(F)$ با $x_\alpha \to x$ در X دنبالهٔ $\{y_\alpha\}_{\alpha \in J}$ یک نقطهٔ چسبندگی در $F(x)$ داشته باشد.

اثبات : به مرجع [۴۴] رجوع کنید.

تعریف ۹.۲.۱ یک اپراتور $A : X \to 2^{X^*}$ را یکنوا(اکیداً یکنوا) میگوییم اگر برای هر $x, y \in D(A)$ و برای هر $x^* \in A(x)$, $y^* \in A(y)$

$$(x - y, x^* - y^*) \geq 0 \, ((x - y, x^* - y^*) > 0)$$

در زیر چند مثال را ذکر می کنیم .

مثال ۱.۲.۱ ساده‌ترین مثالها، اپراتورهای تک‌مقداری و خطی هستند. اگر $A : H \to H$ خطی باشد آنگاه اپراتورهای یکنوا همان اپراتورهای مثبت هستند. یعنی برای هر $x \in D(A)$، $(Ax, x) \geq 0$

مثال ۲.۲.۱ مثال ساده دیگر از این اپراتورها هر تابع صعودی روی زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است. اگر این تابع اکیداً صعودی باشد مثالی از اپراتور اکیداً یکنوا خواهد بود. مثال بعدی یک مثال ساده از نوع چندمقداری است.

مثال ۳.۲.۱ تابع $f : R \to R$ که $f(x) = 1$ برای $x \geq 0$ و $f(x) = -1$ برای $x \leq 0$ و $f(0) = D$ که D یک زیر مجموعه از $[-1, 1]$ است یک اپراتور یکنوای چندمقداری است.

مثال ۴.۲.۱ فرض کنید C یک زیرمجموعهٔ ناتهی، محدب، بسته و کراندار از H و $T : C \to C$ نگاشت انقباضی باشد. یعنی $|Tx - Ty| \leq |x - y|$ برای هر $x, y \in C$. آنگاه $A = I - T$ یکنوا است. بنابر یک قضیه از نظریهٔ نقطهٔ ثابت T روی C یک نقطهٔ ثابت دارد که یک صفر اپراتور A نیز است.

مثال ۵.۲.۱ دوباره در فضای هیلبرت فرض کنید C مجوعه‌ای محدب، بسته و ناتهی و P نگاشت افکنش (یا نگاشت نزدیکترین نقطه) روی C است، آنگاه P یکنواست.

تعریف ۱۰.۲.۱ فرض کنید A اپراتوری در H باشد. می‌گوییم A در شرط (b) صدق می‌کند اگر تابع پیوسته $a : R^+ \times R^+ \to R^+$ وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $[x_1, y_1] \in A$ و $[x_2, y_2] \in A$ داشته باشیم

$$(x_2, y_1) + (x_1, y_2) + a(|x_1|, |x_2|)\{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\} \geq 0$$

وقتی A یکنوا باشد شرط (b) عملاً معادل شرط قویتر زیر است

$$|(x_2, y_1) + (x_1, y_2)| \leq a(|x_1|, |x_2|)\{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\}$$

که ابتدا بوسیله براک [۱۵] بصورتی ساده‌تر بیان شد و سپس توسط میتی‌دیری [۳٦] با عنوان شرط (a) معرفی و بکار گرفته شده است. حالت خاصی از شرط (a) وقتی است که اپراتور یکنوا و فرد باشد.

تعریف ۱۱.۲.۱ یک اپراتور $A : X \to 2^{X^*}$ را قویاً یکنوا میگوییم، اگر $\alpha > 0$ وجود داشته باشد که برای هر $x, y \in D(A)$ و برای هر $x^* \in A(x)$, $y^* \in A(y)$،

$$(x - y, x^* - y^*) \geq \alpha |x - y|^2$$

قضیه ۱.۲.۱ اگر $A : X \to 2^{X^*}$ اپراتور یکنوا باشد. آنگاه A در هر نقطه از درون دامنه‌اش موضعاً کراندار است.

اثبات : به [۴۴] رجوع شود.

تعریف ۱۲.۲.۱ اپراتور $A : X \to 2^{X^*}$ را ماگزیمال یکنوا می‌گوییم اگر نمودار آن زیرمجموعهٔ سرهٔ هیچ اپراتور یکنوای دیگری نباشد.

از لم زُرن استفاده می‌شود که برای هر اپراتور یکنوا یک توسیع ماگزیمال وجود دارد.

مثال ٦.۲.۱ در مثال ۳.۲.۱ اگر $D = [-1, 1]$ آنگاه f ماگزیمال یکنوا است.

مثال ۷.۲.۱ مثال اساسی دیگر نگاشت دوگانی در فضاهای باناخ است. ما این مثال را با تفصیل بیشتری بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱۳.۲.۱ نگاشت $J : X \to 2^{X^*}$ را که با

$$J(x) = \{x^* \in X^* : (x^*, x) = |x|^2 = |x^*|^2\}$$

برای هر $x \in X$ تعریف می‌شود نگاشت دوگانی فضای باناخ می‌گویند.

توجه ۱.۲.۱ مقادیر $J(x)$ در X^* بسته، محدب و کراندار هستند. بعلاوه یک کاربرد ساده از قضیهٔ هان—باناخ [۴] تضمین می‌کند که $J(x)$ برای هر $x \in X$ ناتهی است.

در قضیهٔ زیر برخی خواص نگاشت دوگانی را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۲.۱ فرض کنید X فضای باناخِ انعکاسی باشد. آنگاه داریم

الف) اگر X^* اکیداً محدب باشد آنگاه J تک مقداری، نیم پیوسته، پوشا، فرد و ماگزیمال یکنوا است.

ب) اگر X و X^* اکیداً محدب باشند. آنگاه J اکیداً یکنوا و دوسویی است.

اثبات : به [۴۴] مراجعه شود.

توجه ۲.۲.۱ در حالتی که $X = X^*$ یک فضای هیلبرت باشد. نگاشت دوگانی همان نگاشت همانی خواهد بود.

در زیر بعضی از خواص اپراتورهای ماگزیمال یکنوا را که در این رساله مورد نیاز است می آوریم: خواننده برای مشاهده خواص بیشتری از این اپراتورها می‌تواند به [۴۴] یا [۴۵] مراجعه کند.

---

[۴] Hahn-Banach