دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

کاربرد اسپلاین های درجه چهار و پنج در جواب عددی مسائل مقدار مرزی مرتبه چهارم

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی کاربردی

مؤلف
لیلا سمیعی عارف

استاد راهنما
دکتر جلیل رشیدی نیا

تیر ۱۳۸۷

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

کاربرد اسپلاین های درجه چهار و پنج در جواب عددی مسائل مقدار مرزی مرتبه چهارم

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

مؤلف

لیلا سمیعی عارف

استاد راهنما

دکتر جلیل رشیدی نیا

استاد مشاور

دکتر حمید مسگرانی

تیر ۱۳۸۷

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور

دانشگاه پیام نور استان تهران

تاریخ ....
شماره ....
پیوست ....

((تصویب نامه))

پایان نامه تحت عنوان :

روش اسپلاین برای حل مسائل مقدار مرزی مرتبه چهارم

تاریخ دفاع : 87/4/29 ساعت :10:30_9:30 نمره : ۱۸/ درجه : عالی

اعضای هیات داوران :

نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه علمی	امضاء
1-جناب آقای دکترجلیل رشیدی نیا	استاد راهنما اول		
2- جناب آقای دکترحمید مسگرانی	استاد مشاور		
3- جناب آقای دکتر ذاکری	استاد داور داخلی	استادیار	
4-جناب آقای دکتر نیسی	استاد داور خارجی		
5-سرکار خانم دکتر ناجی	نماینده گروه		

رونوشت : تحصیلات تکمیلی
(عبداللهی)

تهران،خیابان انقلاب،
خیابان استاد نجات اللهی،
نبش خیابان سپند،
پلاک ۲۳۳
تلفن: ۸۸۸۰۱۰۹۰
دورنگار: ۸۸۹۰۳۱۵۸
پست الکترونیکی:
info@Tehran.pnu.ac.ir
نشانی الکترونیکی:
http://www.Tehran.pnu.ac.ir

فهرست مطالب

فهرست جدول ها

فهرست نمادها

نام خانوادگی دانشجو : سمیعی عارف **نام : لیلا**

عنوان پایان نامه : کاربرد اسپلاین های درجه چهار و پنج در جواب عددی مسائل مقدار مرزی مرتبه چهارم

استاد راهنما : دکتر جلیل رشیدی نیا

استاد مشاور : دکتر حمید مسگرانی

مقطع تحصیلی : کارشناسی ارشد **رشته : ریاضی** **گرایش : کاربردی**

دانشگاه : پیام نور مرکز تهران **دانشکده : علوم پایه**

تاریخ فارغ التحصیلی : ۸۷/۴/۲۹ **تعداد صفحه : ۱۳۱**

کلید واژه ها : اسپلاین درجه چهار- اسپلاین درجه پنج- مسائل مقدار مرزی- وجود جواب- یکتایی جواب- شرایط مرزی- مثال های عددی

چکیده :

بحث اساسی این پایان نامه آشنایی با برخی از توابع اسپلاین و کاربرد آن ها در حل عددی مسائل مقدار مرزی مرتبه چهارم است. در فصل ۱ به بررسی توابع اسپلاین معمولی و پارامتری که وابسته به پارامتر $\omega > 0$ می باشند، می پردازیم. اسپلاین هایی را که مد نظر قرار می دهیم از درجه ی سه، درجه ی چهار و درجه ی پنج هستند که به بیان تعاریف و روابط آن ها می پردازیم[۶]. در فصل ۲ وجود جواب های مثبت برای یک مسأله ی مقدارمرزی مرتبه چهارم را ثابت می کنیم و سپس به بررسی یکتایی جواب در مسائلی با شرایط مرزی از مرتبه های اول و دوم می پردازیم. برای این منظور، مسأله ی مقدار مرزی زیر را در نظر می گیریم:

$$u^{(۴)} = f\,(t,u,u''), \quad ۰ < t < ۱$$
$$u(۰) = u(۱) = u''(۰) = u''(۱) = ۰$$

که در همسایگی $(۰,۰)$ ، $f\,(t,u,p) = au - bp + O(|(u,p)|)$ و در همسایگی ∞ ، $f\,(t,u,p) = cu - dp + O(|(u,p)|)$ می باشد. شرایط را روی ثابت های c,b,a و d می گیریم تا وجود جواب های مثبت را تضمین کنیم. اثبات نتیجه ی اصلی ما در این فصل بر اساس تکنیک های تفکیک به دو شاخه بنا شده

است[۲]. در فصل ۳ روش تفاضل متناهی برای مسائل مقدار مرزی مرتبه چهارم را بیان می کنیم تا جواب های تقریبی به دست آمده از این روش را با جواب هایی که در فصل های بعد با استفاده از اسپلاین ها به دست می آوریم، مقایسه نمـاییم و نشان دهیم که توابع اسپلاین تا چه حد جواب های ما را بهبود می بخشند. به علاوه در این فصل، همگرایـی روش هـای عددی حاصله را ثابت می کنیم. مثال های عددی را با این روش ها حل کرده و نتایج به دست آمده را با روش رانگ کوتای کلاسیک مقایسه کرده ایم و نتایج را در جداول مربوطه درج نموده ایم[۴]. در فصل ۴ کاربرد اسپلاین های چند جملـه ای درجه چهار را برای تقریب جواب عددی مسائل مقدار مرزی مرتبه چهار بیان می کنیم. روابط سازگاری تابع اسپلاین درجه چهار را ارائه می دهیم. این نشان می دهد که چگونه این روابط می توانند در یک الگوریتم برای محاسـبه ی تقریـب هـای جواب یک مسأله ی مقدار مرزی مرتبه چهارم خطی به کار برده شوند. همگرایی روش ها را نیز بحث و بررسی نمـوده ایـم. هم چنین دو مثال عددی بیان شده، مفید بودن کاربرد الگوریتم ما را نشان می دهند[۱]. در فصل ۵ روش های مرتبه ی دوم برای تقریب های پیوسته از جواب مسأله ی مقدار مـرزی دو نقطـه ای متنـاظر بـا یـک معادلـه ی دیفرانـسیل خطـی مرتبه ی چهارم معین ایجاد شده اند. هم چنین شرایط مرزی از مرتبه های اول و دوم به وسیله ی تابع اسپلاین درجه پنج معمولی بسط داده شده و نتایج عددی به دست آمده با برخی روش های تفاضل متناهی شناخته شـده از مرتبـه ی مـشابه مقایسه شده اند[۵،۳]. در نهایت در فصل ۶ جواب تقریبی مسأله ی مقدار مرزی مرتبه چهارم را با استفاده از تابع اسـپلاین درجه پنج پارامتری به دست آورده ایم[۷].

فصل ۱

اسپلاین[1] ها و کاربرد های آن ها

۱. ۱. مقدمه

در این فصل به ایجاد روش های تابع اسپلاین غیر چندجمله ای[2] برای بـه دسـت آوردن جـواب معـادلات دیفرانـسیل معمولی می پردازیم. زمان به کار بردن توابع اسپلاین حداقل به آغاز قرن گذشته بر مـی گـردد. توابـع خطـی تکـه ای[3] در ارتباط با قضیه ی وجودی پیانو[4] برای حل مسائل مقدار اولیه از معادلات دیفرانسیل معمولی به کار برده شدند، اگر چه این توابع، اسپلاین ها نامیده نمی شدند. اسپلاین ها اولین بار در نوشته های شونبرگ، سارد[5] و همکاران تعریف شدند. معمـولاً یک اسپلاین، یک تابع چندجمله ای تکه ای است که روی یک ناحیه مانند D تعریف شده است، به طوری که یک تجزیـه از D بر روی زیر ناحیه ها در هر تابعی که یک چندجمله ای معمولاً از درجـه ی m اسـت، وجـود دارد. هـم چنـین تـابع همراه با مشتقاتش از مرتبه ی حداکثر $(m-۱)$، به عنوان یک قانون، روی D پیوسـته اسـت[۸]. بـه عبـارت دیگـر تـابع اسپلاین یک چندجمله ای تکه ای است که در شرایط معین پیوستگی تابع و مشتقاتش صدق می کند. کابردهای اسـپلاین برای تقریب، درون یابی[6] و برازش منحنی[7] تابع ها بسیار موفقیت آمیز بوده است[۹]، [۱۰]، [۱۱]، [۱۲]. هم چنین توجـه به این نکته جالب است که اسپلاین مکعبی[8] تقریباً نزدیک به پیسوله ی طراحانی است که از قدیم از این وسیله برای رسم منحنی های هموار استفاده می کردند. توسط شونبرگ نشان داده شده است که یک منحنی رسم شده بـه وسـیله ی یـک اسپلاین مکانیکی برای اولین مرتبه از تقریبات، یـک تـابع اسـپلاین مکعبـی اسـت. بـه عـلاوه جـواب مـسائل گونـاگون از

1.Spline
2.Non-Polynomial spline function
3.Piecewise linear functions
4.Peano's existence proof
5.Schoenberg, Sard
6.Interpolating
7.Curve fitting
8.Cubic spline

"بهترین تقریب[1]" تقریب های تابع اسپلاین هستند. از این پس توابع اسپلاین هم در مطالعات کاربردی و هم در مطالعات تئوری مورد توجه بسیار قرار خواهند گرفت.

بسیاری از مؤلفان بر روی روش های تقریب اسپلاین چندجمله ای وغیر چندجمله ای برای جواب معادلات دیفرانسیل تلاش هایی را انجام داده اند که برخی از این افراد عبارت اند از: دی بور [۱۳-۱۵]، آلبرگ و همکاران [۹]، لوسکالزو و تالبوت[۱۷،۱۶]، بیکلی [۱۸]، فایف [۲۰،۱۹]، الباسینی و هوسکینس [۲۱]، ساکای [۲۲-۲۴]، راسل و شامپاین [۲۵]، میکولا [۲۶،۱۲]، روبین و خوسلا [۲۷]، روبین و گراوس [۲۸]، دانیل و شوارتز [۲۹]، آرچر [۳۰]، پاتریشیو [۳۲،۳۱]، توارسون [۳۴،۳۳]، عثمانی و همکاران [۳۵-۳۷]، جین و عزیز [۳۸-۴۰]، سورلا و همکاران [۴۱-۴۴]، آینجر و جین [۴۵]، چاولا و سوبرامنیان [۴۶-۴۸]، آیرودوت- الینا و هوستیس [۴۹]، رشیدی نیا [۵۰]، فایرودر و مید [۵۱] و همکاران. توابع اسپلاین با ماکزیمم همواری[2] برای اولین بار در جواب عددی از مسائل مقدار اولیه در معادلات دیفرانسیل معمولی به وسیله ی لوسکالزو و تالبوت [۱۷،۱۶] بررسی شدند و بسیاری از روابط جالب با تکنیک های انتگرال گیری عددی استاندارد، ثابت شدند. برای مثال، قاعده ی ذوزنقه ای[3] و روش پیشگو- اصلاح گر مایل- سیمپسون[4]، درحالت های خاصی از برخی تقریب های اسپلاین اتفاق افتادند. دلیل اصلی برای کاربردهای نامبرده در فوق از توابع اسپلاین برای انتگرال عددی از معادلات دیفرانسیل معمولی است که منجر به روش های ناپایدار می شود، زیرا تقریب های عددی، در یک حالت خاص، بسیار هموار هستند[۵۲]. لوسکالزو و شونبرگ [۵۳] نشان دادند که کاربردی از اسپلاین های هرمیت[5] با مرتبه ی همواری پایین به طور کامل از ناپایداری مسائل جلوگیری می کند. به کار بردن اسپلاین های مکعبی برای حل مسائل مقدار مرزی[6] دو نقطه ای خطی، اولین بار به وسیله ی بیکلی [۱۸] بیان شد. ایده ی اصلی او به کار بردن "شرط پیوستگی" به عنوان یک معادله ی گسسته سازی برای مسائل مقدار مرزی دونقطه ای خطی بود. بعدها فایف [۱۹] مطرح کرد که کاربرد تصحیح های نهایی برای روش های مطرح شده به وسیله ی بیکلی با ملاحظه ی مجدد حالتی از مسائل مقدار مرزی خطی (منظم) است.

1.Best approximation
2.Maximum smoothness
3.Trapezoidal rule
4.Milne–Simpson predictor–corrector metho
5.Hermite–Splines
6.Boundary-value problem

بنابراین واضح است که روش اسپلاین مکعبی بیکلی تنها تقریب هـای همگـرای $O(h^{۲})$ را مـی دهـد، در حـالی کـه اسپلاین مکعبی خودش یک فرآیند مرتبه چهارم است[۱۱]. از این رو طبیعی است که یک روش تناوبی کـه تقریـب هـای مرتبه چهارم را با به کار بردن اسپلاین های مکعبی نتیجه می دهد، جستجو کنیم. برای داشتن یک مقدار مـؤثر در چنـین مسائلی ،"توابع اسپلاین" را شامل یک پارامتر ω معرفی می کنیم. این توابع " اسـپلاین هـای غیرچندجملـه ای" تعریـف شده به واسطه ی حل یک معادله ی دیفرانسیل در هر زیر بازه می باشند. ثابت های دلخواه طوری انتخاب می شوند که در شرایط هموار[۱] معین در محل های اتصال صدق کنند. این " اسپلاین ها" متعلق به کلاس $C^{۲}$ هستند و به اسپلاین های چندجمله ای وقتی پارامتر $\omega \to ۰$ تبدیل می شوند. صورت دقیق اسپلاین بستگی به رفتار پارامتر آن دارد. توابع اسـپلاین پارامتری[۲] " اسپلاین تحت تراکم[۳]، اسپلاین تحت کشش[۴] و اسپلاین تطبیقی[۵]" را بررسی می کنیم.

در سال های اخیر، تلاش های قابل توجهی برای فرمول سازی و پیاده سازی روش های اسپلاین اصلاح شده برای حل کلاس های معینی از مسائل مقدار مرزی بیضوی[۶] روی مستطیل ها اختـصاص داده شـده اسـت، بـرای مثـال هوسـتیس و همکاران را مشاهده کنید [۵۴]. جالب است که بدانیم این نتیجه گیری به وسیله ی آیرودوت- الینـا و هوسـتیس [۴۹] در روش های کالوکاشن[۷] اسپلاین درجه پنج[۸] برای مسائل مقدار مرزی دو نقطه ای مرتبه چهارم خطی پذیرفتـه شـده اسـت. روش دیگر اسپلاین درجه پنج احتیاج به یک طول گام یکنواخت[۹] برای یـک مـسأله ی مقـدار مـرزی مرتبـه چهـارم غیـر خطی[۱۰] دارد که منسوب به چاولا و سوبرامنیان [۴۸] است. این روش بر اساس نظر بیکلـی [۱۸] در بـه کـار بـردن شـرط پیوستگی برای ساختن یک تقریب اسپلاین پایه گذاری شده است. در این جا این روش بعد از سـایر روش هـای دیگـر (بـه طور مثال، روش تفاضل متناهی[۱۱]) که برای به دست آوردن مقادیرگره ای[۱۲] دقیق به کار برده شده اند، استفاده شده است. فایرودر و مید[۵۱] بررسی گسترده ای را بر روی هر دو روش کالوکشن اسپلاین متعامد و اصلاح شده[۱۳] برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی انجام داده اند.

1.Smoothness condition
2.Parametric spline functions
3.Spline under compression
4.Spline under tension
5.Adaptive spline
6.Elliptic boundary value problems
7.Collocation methods
8.Quintic spline
9.Uniform mesh
10.Non-linear fourth order boundary value problem
11.Finite difference method
12.Nodal values
13.Orthogonal and modified spline collocation methods

۱. ۲. تابع اسپلاین

یـــک طـــول گـــام Δ بـــا نقـــاط گـــره ای x_i روی $[a,b]$ در نظـــر مـــی گیـــریم بـــه طـــوری کـــه $\Delta : a = x_۰ < x_۱ < x_۲ < ... < x_{N-۱} < x_N = b$ که در آن $h_j = x_j - x_{j-۱}$ بـرای $j = ۱(۱)N$. فـرض کنیـد کـه مقادیر $\{u_j\}_{j=۰}^N$ از تابع u با بازه ی $[a,b]$ به عنوان دامنه ی تعریف آن داده شده اند. یک تابع اسپلاین از درجه ی m با گره هایی در نقاط x_j، $j = ۰(۱)N$ یک تابع s_Δ با خواص زیر است:

(الف) در هر زیر بازه ی $[x_j, x_{j+۱}]$، $j = ۰(۱)N - ۱$، $s_\Delta(x)$ یک چندجمله ای از درجه ی m است.

(ب) $s_\Delta(x)$ و اولین $(m-۱)$ مشتقاتش روی $[a,b]$ پیوسته هستند. اگر تابع s_Δ تنهـا $(m-k)$ مـشتق پیوسـته داشته باشد، آن گاه k، ناکارایی[1] اسپلاین چندجمله ای تعریف شده و معمولاً به صورت $s_\Delta(m,k)$ نوشته می شود، [۲۷] را ببینید. اسپلاین مکعبی یک چندجمله ای درجه سه تکه ای بـا ناکـارایی ۱ اسـت. بـه طـور مثـال $s_\Delta(۳,۱)$.

فرآیند اسپلاین مکعبی را می توان به صورت زیر شرح داد.

تابع u را به طوری کـه در نقـاط گـره ای x_i، $u(x_i) = u_i$ در نظـر بگیریـد. یـک چندجملـه ای درجـه سـه روی بازه ی $[x_{j-۱}, x_j]$ مشخص می شود. چهار ثابت به مقادیر تابع $u_{j-۱}$ وابسته هستند، به علاوه u_j به وسیله ی مـشتقات اسپلاین $m_j, m_{j-۱}$ یا $M_j, M_{j-۱}$ معین می شود. کمیت های m_j و M_j تقریب های مشتق اسـپلاین بـه ترتیـب در مشتقات تابع $u'(x_j)$ و $u''(x_j)$ هستند. به طور مشابه فـرض هـای گفتـه شـده را روی بـازه ی $[x_j, x_{j+۱}]$ در نظـر بگیرید. آن گاه پیوستگی مشتق ها در x_j تعیین می شوند. این فرآینـد در معـادلات بـرای m_j و M_j، $j = ۱(۱)N - ۱$ نتیجه می شود. شرایط مرزی[2] به $j = ۰$ و $j = N$ نیاز دارند. دستگاه بـا معـادلات دیفرانـسیل حـاکم بـر $u(x_j)$ بـسته خواهد شد که در آن مشتق ها به وسیله ی تقریبات اسپلاین m_j و M_j جایگزین می شوند.

در این فصل ابتدا برخی تعاریف و نتایج پایه ای را برای توابع اسپلاین مکعبی و درجه پـنج مـی آوریـم. تعریـف توابـع اسپلاین مکعبی و درجه پنج به توابع غیر چندجمله ای تکه ای با یک پارامتر ω تعمیم داده شده اند. به ازای $\omega \to ۰$ ایـن توابع (غیر چندجمله ای) به اسپلاین های درجه سه یا درجه پنج معمولی تبدیل می شوند. با توجه به انتخاب پارامتر، تابع اسپلاین به عنوان اسپلاین مکعبی در تراکم، اسپلاین مکعبی در کشش یا اسـپلاین مکعبـی تطبیقـی شـناخته مـی شـود.

1.Deficiency
2.Boundary conditions

به طور مشابه سه تا از اسپلاین ها از اسپلاین درجه پنج منتج می شوند که "اسپلاین درجه پنج پارامتری I [۱]" ، " اسپلاین درجه پنج پارامتری II [۲]" و "اسپلاین درجه پنج تطبیقی[۳]" نامیده می شوند.

۱. ۳. توابع اسپلاین مکعبی

تعریف: یک تابع اسپلاین مکعبی s_Δ ، از کلاس $C^{۲}[a,b]$، یک تابع $u(x)$ تعریف شده روی $[a,b]$ را درون یابی می کند به طوری که :

(الف) در هر بازه ی $[x_{j-۱},x_j]$، $s_\Delta(x)$ یک چندجمله ای حداکثر از درجه سه است.

(ب) اولین و دومین مشتقات از $s_\Delta(x)$ روی $[a,b]$ پیوسته هستند.

بنابراین می توانیم در $[x_{j-۱},x_j]$ بنویسیم:

$$s''_\Delta(x)=\frac{x_j-x}{h_j}M_{j-۱}+\frac{x-x_{j-۱}}{h_j}M_j=\bar{z}\,M_{j-۱}+z\,M_j \qquad (۱\text{-}۳\text{-}۱)$$

که در آن داریم:

$$\bar{z}=۱-z \quad , \quad z=(x-x_{j-۱})/h_j \quad , \quad h_j=x_j-x_{j-۱} \quad , \quad s''_\Delta(x_j)=M_j$$

با دو بار انتگرال گیری از (۱-۳-۱) و قرار دادن $x=x_j$ و $x=x_{j-۱}$، ثابت های انتگرال گیری به وسیله ی شرایط $s_\Delta(x_j)=u_j$ و $s_\Delta(x_{j-۱})=u_{j-۱}$ تعیین می شوند. در نهایت به دست می آوریم:

$$s_\Delta(x)=z\,u_j+\bar{z}\,u_{j-۱}+h_j^{۲}[q_{۳}(z)M_j+q_{۳}(\bar{z})M_{j-۱}]/۳! \qquad (۲\text{-}۳\text{-}۱)$$

که در آن $q_{۳}(z)=z^{۳}-z$ و $q_{۳}(۰)=q_{۳}(\pm۱)=۰$، $q_{۳}$ یک تابع فرد از z است.

تابع s_Δ در بازه ی $[x_j,x_{j+۱}]$ با جایگذاری $j+۱$ به جای j در (۱-۳-۲) به دست می آید. بنابراین داریم:

$$s_\Delta(x)=z\,u_{j+۱}+\bar{z}\,u_j+h_{j+۱}^{۲}[q_{۳}(z)M_{j+۱}+q_{۳}(\bar{z})M_j]/۳! \qquad (۳\text{-}۳\text{-}۱)$$

که در آن $z=(x-x_j)/h_{j+۱}$ می باشد.

1.Parametric quintic spline-I
2.Parametric quintic spline-II
3.Adaptive quintic spline

روابط اسپلاین مکعبی

برای سادگی فرض می کنیم که زیر بازه ها دارای طول برابر هستند. بنابراین $h_j = h_{j+۱} = h$ بـه ازای $j = ۱(۱)N$. پیوستگی اولین مشتق از $s_\Delta(x)$ در $x = x_j$ مستلزم این است که $s'_\Delta(x_{j^-}) = s'_\Delta(x_{j^+})$. بنابراین داریم:

$$
\begin{aligned}
s'_\Delta(x_{j-}) &= \frac{۱}{h}(u_j - u_{j-۱}) + \frac{h}{۶}(۲M_j + M_{j-۱}), \quad j = ۱(۱)N \\
s'_\Delta(x_{j+}) &= \frac{۱}{h}(u_{j+۱} - u_j) - \frac{h}{۶}(۲M_j + M_{j+۱}), \quad j = ۰(۱)N-۱
\end{aligned}
\tag{۴-۳-۱}
$$

رابطه های اسپلاین زیر می توانند به دست آیند:

$$
\begin{aligned}
&(i)\ M_{j+۱} + ۴M_j + M_{j-۱} = \frac{۶}{h^۲}(u_{j+۱} - ۲u_j + u_{j-۱}), \quad j = ۱(۱)N-۱ \\
&(ii)\ m_{j+۱} + ۴m_j + m_{j-۱} = \frac{۳}{h}(u_{j+۱} - u_{j-۱})
\end{aligned}
\tag{۵-۳-۱}
$$

که در آن $m_j = s'_\Delta(x_j)$ می باشد.

روابط (۱-۳-۵) روابط پیوستگی یا سازگاری[1] از اسپلاین مکعبی نامیده می شوند. هم چنین روابط زیر می تواننـد بـه سادگی به دست آیند:

$$
\begin{aligned}
&(i)\quad m_j = -\frac{h}{۶}(M_{j+۱} + ۲M_j) + \frac{u_{j+۱} - u_j}{h} \\
&(ii)\quad m_{j+۱} = \frac{h}{۶}(M_j + ۲M_{j+۱}) + \frac{u_{j+۱} - u_j}{h} \\
&(iii)\ m_{j+۱} - m_j = \frac{h}{۲}(M_{j+۱} + M_j)
\end{aligned}
\tag{۶-۳-۱}
$$

معادله ی (۱-۳-۵) به یک دستگاه N معادله در $N+۲$ مجهول به ترتیب M_j یا m_j منجر می شود. جمع دو معادله، شرایط مرزی M یا m را نتیجه می دهد. دستگاه سه قطری[2] حاصل برای M_j یا m_j غالب قطری[3] است و می توانـد به وسیله ی یک الگوریتم کارآمد حل شود [۹]. بنابراین مقادیر u_j، معادله ی (۱-۳-۵) را با شرایط مرزی مناسـب از یـک دستگاه بسته برای M_j یا m_j نتیجه می دهند و با استفاده از (۱-۳-۲) یـا (۱-۳-۳) مقـادیر $s_\Delta(x)$ در همـه ی مکـان های میانی می توانند پیدا شوند.

1.Continuity or consistency relations
2.Tridiagonal system
3.Diagonally dominant

۱. ۳. ۱. توابع اسپلاین مکعبی پارامتری

تعریف: تابع $s_{\Delta}(x,\tau)$ وابسته به پارامتر τ از کلاس $C^{۲}[a,b]$ که $u(x)$ را در نقاط گره ای $\{x_j\}$ درون یابی می کند، در بازه ی $[a,b]$ وقتی $\tau \to ۰$ به اسپلاین مکعبی $s_{\Delta}(x)$ تبدیل می شود و تابع اسپلاین مکعبی پارامتری نامیده می شود. از آن جایی که پارامتر τ مقادیر دلخواه بسیاری را می تواند در $s_{\Delta}(x,\tau)$ داشته باشد، چنین اسپلاینی یکتا نیست. سه اسپلاین مکعبی پارامتری از اسپلاین مکعبی به وسیله ی معرفی پارامتر در سه حالت مختلف نتیجه می شوند که "اسپلاین مکعبی در تراکم" ،" اسپلاین مکعبی درکشش" و " اسپلاین مکعبی تطبیقی" نامیده می شوند.

۱. ۳. ۱. ۱ . اسپلاین مکعبی در تراکم

اگر $s_{\Delta}(x,\tau)$ یک اسپلاین مکعبی پارامتری صادق در معادله ی دیفرانسیل زیر باشد،

$$s''_{\Delta}(x,\tau)+\tau s_{\Delta}(x,\tau)=[s''_{\Delta}(x_{j-۱},\tau)+\tau s_{\Delta}(x_{j-۱},\tau)]\frac{(x_j-x)}{h_j}$$

(۱-۳-۱-۱-۱)

$$+[s''(x_j,\tau)+\tau s_{\Delta}(x_j,\tau)]\frac{(x-x_{j-۱})}{h_j}$$

که در آن $x\in[x_{j-۱},x_j]$ $h_j=x_j-x_{j-۱},s_{\Delta}(x_j,\tau)=u_j,$ و $\tau>۰$، آن گاه این اسپلاین، " اسپلاین مکعبی در تراکم" نامیده می شود ([۹۴،۵۸،۵۷،۵۶،۵۵] را ببینید.).

با حل معادله ی دیفرانسیل (۱-۳-۱-۱-۱) و به کار بردن شرایط درون یابی در x_j و $x_{j-۱}$ ثابت های انتگرال گیری محاسبه می شوند. با نوشتن $\omega=h_j\sqrt{\tau}$ داریم:

$$s_{\Delta}(x,\tau)=z\,u_j+\bar{z}\,u_{j-۱}+h_j^{۲}[q_{۱}(z)M_j+q_{۱}(\bar{z})M_{j-۱}]/\omega^{۲} \qquad (۱-۳-۱-۱-۲)$$

که در آن $z=(x-x_{j-۱})/h_j$ ، $\bar{z}=۱-z$ ، $q_{۱}(z)=z-\frac{\sin\omega z}{\sin\omega}$ ، $q_{۱}(۰)=q_{۱}(\pm۱)=۰$ و $q_{۱}(z)$ یک تابع فرد از z است.

به طور مشابه در بازه ی $[x_j, x_{j+1}]$ با جایگزینی $j+1$ به جای j در (۱-۳-۱-۱-۲) به دست می آوریم:

$$s_\Delta(x) = z\,u_{j+1} + \bar{z}\,u_j + h_{j+1}^2[q_1(z)M_{j+1} + q_1(\bar{z})M_j]/\omega^2 \qquad (۱\text{-}۳\text{-}۱\text{-}۱\text{-}۳)$$

روابط اسپلاین

برای طول گام یکنواخت یعنی $h = h_j = h_{j+1}$ ، روابط اسپلاین متناظر با (۱-۳-۵) (i) و (ii) می توانند به صورت زیر به دست آیند:

$$\begin{aligned} &(i)\ \alpha M_{j+1} + 2\beta M_j + \alpha M_{j-1} = \frac{1}{h^2}(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) \\ &(ii)\ \alpha m_{j+1} + 2\beta m_j + \alpha m_{j-1} = \frac{(\alpha+\beta)}{h}(u_{j+1} - u_{j-1}) \end{aligned} \qquad (۱\text{-}۳\text{-}۱\text{-}۱\text{-}۴)$$

که در آن داریم:

$$\begin{aligned} &m_j = s'_\Delta(x_j,\tau), \quad M_j = s''_\Delta(x_j,\tau), \quad \alpha = \frac{1}{\omega^2}(\omega \operatorname{cosec}\omega - 1), \\ &\beta = \frac{1}{\omega^2}(1 - \omega\cot\omega) \end{aligned} \qquad (۱\text{-}۳\text{-}۱\text{-}۱\text{-}۵)$$

رابطه ی سازگاری برای (۱-۳-۱-۱-۴) (i) به معادله ی $2\alpha + 2\beta = 1$ منجر می شود که می تواند به صورت $\tan(\omega/2) = \omega/2$ نیز بیان شود. این معادله یک ریشه ی صفر و تعداد نا محدودی ریشه ی غیر صفر دارد. کوچک ترین ریشه ی مثبت ...$\omega = 8/986818916$ به ازای $\alpha = \beta, \frac{\omega}{2} = \tan(\frac{\omega}{2}) \neq 0$ می باشد. در این حالت روابط اسپلاین (۱-۳-۱-۱-۴) به صورت زیر تبدیل می شوند:

$$\begin{aligned} &(i)\ \frac{h^2}{4}(M_{j+1} + 2M_j + M_{j-1}) = \delta^2 u_j \\ &(ii)\ \frac{h}{2}(m_{j+1} + 2m_j + m_{j-1}) = (u_{j+1} - u_{j-1}) \end{aligned} \qquad (۱\text{-}۳\text{-}۱\text{-}۱\text{-}۶)$$

به ازای $\omega \to 0$، $(\alpha,\beta) \to (\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$ و $q_1(z)/\omega^2 \to q_0(z)/6$ به طوری که معادله ی (۱-۳-۱-۱-۴) تبدیل به رابطه ی اسپلاین مکعبی متناظر در (۱-۳-۵) می شود.

برای $(\alpha,\beta)\rightarrow(\frac{۱}{۱۲},\frac{۵}{۱۲})$ معادله ی (۱-۳-۱-۱-۴) تبدیل به روش شناخته شده ی نیومرو[1] مرتبـه چهـارم و روش اسپلاین درجه چهار[2] از عثمانی [۳۶] می شود.

۱. ۳. ۱. ۲. اسپلاین مکعبی در کشش

اگر $s_{\Delta}(x,\tau)$ یک اسپلاین مکعبی پارامتری صادق در معادله ی دیفرانسیل زیر در زیربازه ی $[x_{j-۱},x_j]$ باشد،

$$s''_{\Delta}(x,\tau)-\tau s_{\Delta}(x,\tau)=[s''_{\Delta}(x_{j-۱},\tau)-\tau s_{\Delta}(x_{j-۱},\tau)]\frac{(x_j-x)}{h_j}+[s''(x_j,\tau)-\tau s_{\Delta}(x_j,\tau)]\frac{(x-x_{j-۱})}{h_j} \quad (۱\text{-}۳\text{-}۱\text{-}۲\text{-}۱)$$

که در آن $\tau>۰$ یک فاکتور کشش ، $s''_{\Delta}(x_j)=M_j, s'_{\Delta}(x_j)=m_j, s_{\Delta}(x_j)=u_j$ ، آن گاه $s_{\Delta}(x,\tau)$ "اسـپلاین مکعبی در کشش" نامیده می شود([۵۵،۲۸] را ببینید.).

با حل (۱-۳-۱-۲-۱) و به کار بردن شرایط درون یابی در x_j و $x_{j-۱}$ به دست می آوریم:

$$s_{\Delta}(x,\tau)=z\,u_j+\bar{z}\,u_{j-۱}+h_j^۲[q_۲(z)M_j+q_۲(\bar{z})M_{j-۱}]/\omega^۲ \quad (۱\text{-}۳\text{-}۱\text{-}۲\text{-}۲)$$

که در آن داریم:

$$z=(x-x_{j-۱})/h_j,\quad \bar{z}=۱-z,\quad \omega=\sqrt{\tau}h_j,\quad q_۲(z)=\frac{\sinh\omega z}{\sinh\omega}-z,$$
$$q_۲(۰)=q_۲(\pm۱)=۰,\quad h_j=x_j-x_{j-۱}$$

به طور مشابه در بازه ی $[x_j,x_{j+۱}]$ به دست می آوریم:

1.Numerov's method
2.Quartic spline