تقدیر و تشکر

با سپاس از زحمات بی شائبه و گرانقدر استاد راهنمای گرامی جناب آقای دکتر محمد رضا جبارزاده که با راهنمایی های ارزندهٔ خود در کلیه مراحل پایاننامه عامل اصلی پیشبرد آن بودند، از کلیه زحمات و مساعدت های ایشان تشکر و قدردانی می‌کنم.

از اساتید محترم جناب آقای دکتر محمد حسن فاروقی و دکتر محمد صال مصلحیان کمال تشکر را دارم.

از پدر و مادرم و پدر بزرگ و مادر بزرگ عزیزم که مایه های فکری خود را به تربیت اولیه آنها و مساعدتشان مدیونم کمال تشکر را دارم.

دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان

ساختار توپولوژیک فضای عملگرهای ترکیبی روی H^∞

استاد راهنما

آقای دکتر محمد رضا جبارزاده

استاد مشاور

آقای دکتر حمید واعظی

پژوهشگر

حامد اسماعیل زاده

بهمن ۱۳۸۶

بِسْمِ اللّهِ الرّحمنِ الرّحيم

سر آغاز دین خدا شناسی است و کمال شناخت خدا، باور داشتن او و کمال باور داشتن خدا شهادت به یگانگی اوست و کمال توحید و کمال اخلاص، خدا را از صفات مخلوقات جدا کردن است، زیرا هر صفتی نشان میدهد که غیر از موصوف و هر موصوفی گواهی میدهد که غیر از صفت است پس هرکس که خدا را با صفت مخلوقات تعریف کند او را به چیزی نزدیک کرده و با نزدیک کردن خدا به چیزی دو خدا مطرح شده و با طرح شدن دو خدا، اجزائی برای او تصوّر نمود و با تصوّر اجزا برای خدا، او را نشناخته است.

خلقت را آغاز کرد و موجودات را بیافرید. بدون نیاز به فکر و اندیشه‌ای، یا استفاده از تجربه‌ای، بی آنکه حرکتی ایجاد کند و یا تصمیمی مضطرب در او راه داشته باشد.

آنچه را آفرید با اندازه گیری دقیق استوار کرد، و با لطف و مهربانی نظمشان داد و به خوبی تدبیر کرد. هر پدیده را برای همان جهت که آفریده شد به حرکت درآورد. چنانکه نه از حدّ و مرز خویش تجاوز نماید و نه در رسیدن مراحل رشد خود کوتاهی کند و این حرکت حساب شده را بدون دشواری به سامان رساند تا بر اساس اراده او زندگی کند.

از فرمایشات گرانبهای حضرت علی (ع)

تقدیم به:

آنکه خالق زیباییست و زیبایی از اوست

نام خانوادگی دانشجو: اسماعیل زاده نام: حامد

عنوان: ساختار توپولوژیک فضای عملگرهای ترکیبی روی H^∞

استاد راهنما : آقای دکتر محمد رضا جبارزاده

استاد مشاور: آقای دکتر حمید واعظی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ‌التحصیلی: بهمن ۱۳۸۶ تعداد صفحه: ۷۹

کلید واژه‌ها: عملگرهای ترکیبی، توابع تحلیلی کراندار، مؤلفه ها، نقاط تنها(ایزوله)، متریک پوانکاره، فضای بلاک

چکیده

این پژوهش مبتنی بر مقالهٔ

Topological structure of the space of composition operators on H^∞ از Shûichi Ohno،
Barbara MacCluer و Ruhan Zhao است ، که در مجلهٔ
Integral Equations Operator Theory Volume 40, No. 4, Page 481-404, November 4 (2001) به چاپ رسیده است .

در این پایاننامه ما ساختار توپولوژیک فضای عملگرهای ترکیبی روی H^∞ را با استفاده از

ادامهٔ چکیدهٔ پایاننامه

اعمال متریک هذلولی—نما بررسی می کنیم و آن را جهت بررسی فشردگی تفاضل دو عملگر ترکیبی بکار می گیریم . بدین منظور مؤ لفه ها و نقاط تنهای این توپولوژی را مشخص می نماییم .

تفاضل فشردهٔ دو عملگر ترکیبی را بررسی می کنیم و به کمک آن نشان می دهیم که تفاضل دو عملگر ترکیبی که در یک مؤ لفه توپولوژیک فضای عملگرهای ترکیبی با توپولوژی نرم عملگر قرار می گیرد ، لزوماً فشرده نیست .

فهرست مطالب

۱.۰ مقدمه

فرض کنید $H(\mathbb{D})$ فضای تمام توابع تحلیلی روی گوی واحد $\mathbb{D}$ باشد. $\mathcal{S}(\mathbb{D})$ نشان دهندهٔ تمام توابع تحلیلی از $\mathbb{D}$ به توی $\mathbb{D}$ باشد. به ازای هر $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ یک عملگر ترکیبی $C_\varphi(f)$ از $H(\mathbb{D})$ به توی $H(\mathbb{D})$ القا می شود، که به صورت زیر تعریف می شود.

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi \quad f \in H(\mathbb{D})$$

فرض کنید $\mathcal{C}(X)$ نشان دهندهٔ فضای عملگرهای ترکیبی روی فضای باناخ X از توابع تحلیلی، با توپولوژی القا شده توسط نرم عملگر باشد. یعنی توپولوژی که توسط نرم $||T|| = \sup\{||Tf|| \ ; \ ||f|| \leq 1\}$ تولید شود .

چون به ازای $z \in \mathbb{D}$

$$C_\varphi : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$$
$$C_\varphi(f)(z) = (f \circ \varphi)(z)$$

داریم :

$$\begin{aligned} ||C_\varphi(f)|| &= \sup\{|(C_\varphi(f))(z)| : \ z \in \mathbb{D}\} \\ &= \sup\{|f(\varphi(z))| : \ z \in \mathbb{D}\} \\ &\leq \sup\{|f(z)| : \ z \in \mathbb{D}\} \\ &= ||f|| \end{aligned}$$

از رابطهٔ فوق نتیجه می شود که $||C_\varphi|| \leq 1$. با در نظر گرفتن $g \equiv 1$ نتیجه می شود $||C_\varphi|| \geq ||C_\varphi(g)|| = 1$ لذا $||C_\varphi|| \geq 1$. در نتیجه $||C_\varphi|| = 1$.

در این پایاننامه ما به بررسی ساختار توپولوژیک

$$\mathcal{C}(H^\infty) := \{C_\varphi : \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})\}$$

می پردازیم که در آن H^∞ فضای باناخ متشکل از توابع تحلیلی کراندار بانرم سوپریمم روی قرص واحد $\mathbb{D}$ است .

توپولوژی القا شده توسط متر d_β روی $\mathcal{S}(\mathbb{D})$ را با $\mathcal{S}(\mathbb{D}, d_\beta)$ نشان می دهیم، که d_β به ازای $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ بدین صورت تعریف می شود .

$$d_\beta(\varphi, \psi) = \sup_{z \in \mathbb{D}} \beta(\varphi(z), \psi(z)) \quad , \quad \beta(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \bar{z}w} \right|$$

نشان می دهیم توپولوژی القا شده توسط متر d_β روی $\mathcal{S}(\mathbb{D})$ با توپولوژی نرم عملگر روی $\mathcal{C}(H^\infty)$ معادل است . در فصل دوم به بررسی مؤلفه ها و نقاط تنهای فضای توپولوژیک $\mathcal{C}(H^\infty)$ طی دو قضیه‌اساسی که ذیلاً آورده می شود می پردازیم.

قضیه ۱: فرض کنید φ و ψ در $\mathcal{S}(\mathbb{D})$ باشند، در این صورت شرایط زیر معادلند .

۱) C_φ و C_ψ در یک مؤلفه مسیری در $\mathcal{C}(H^\infty)$ قرار گیرند .

۲) $\sup_{z \in \mathbb{D}} \beta(\varphi(z), \psi(z)) < 1$.

۳) $||C_\varphi - C_\psi|| < 2$.

قضیه ۲: فرض کنید φ در $\mathcal{S}(\mathbb{D})$ باشد، در این صورت شرایط زیر معادلند :

۱) C_φ در $\mathcal{C}(H^\infty)$ تنها(ایزوله) است .

۲) برای هر $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ و $\psi \neq \varphi$ داریم $\sup_{z \in \mathbb{D}} \beta(\varphi(z), \psi(z)) = 1$.

۳) برای هر $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ و $\psi \neq \varphi$ داریم $||C_\varphi - C_\psi|| = 2$.

در فصل سوم فشردگی و تفاضل فشردهٔ دو عملگر ترکیبی را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که اگر $C_\varphi - C_\psi : H^\infty \to H^\infty$ فشرده باشد، آنگاه C_φ و C_ψ در یک مؤلفه قرار می‌گیرند ولی عکس این موضوع صادق نمی‌باشد.

فصل ۱

پیشینه‌ی پژوهش و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ پیشینه‌ی پژوهش

عملگرهای ترکیبی در دههٔ شصت به طور کلاسیک توسط نوردگرین [1] و ریدج [2] معرفی گردید. بعدها ریاضیدانان زیادی توجه خود را بدین موضوع معطوف کردند، که از جملهٔ این افراد می توان به کاموویتز[3] و سینگ [4] اشاره کرد. یکی از عوامل مهمی که باعث شده ریاضیدانان اهمیت زیادی بدان قائل شوند در بر داشتن ردهٔ وسیعی از عملگرهای کراندار روی فضاهای باناخ است. معمولاً فضای عملگرها را از دو دیدگاه مورد بررسی قرار می‌دهند.اول فضایی است که این عملگرها روی آن تعریف می شوند، مانند $A(\mathbb{D})$ ، $C(\mathbb{D})$ ، H^p ، فضاهای برگمن L_a^p ، فضاهای بسف B_p و فضاهای بلاک و... .

دوم نوع این عملگرها از نظر کرانداری ، فشردگی، هسته ای بودن و برد بسته داشتن و تنهایی [5] در توپولوژی نرم عملگر است، که از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است .

برخی از مسائل فوق برای فضای هاردی H^2 مورد بررسی قرار گرفته است. به عنوان مثال در [۱] ارل برکسون [6] کشف کرد، که عملگرهای ترکیبی عمیقاً نافشردهٔ [7] معینی در فضای $\mathcal{C}(H^2)$ تنهایند. این نتایج توسط شاپیرو [8] و ساندبرگ [9] در[۱۲] و باربارامک کولییر[10] در[۸] بسط داده شد. برخی از شرایط لازم و کافی در مورد مؤلفه‌ها و نقاط تنهای $\mathcal{C}(H^2)$ را می توان در[۱۲] و

Nordgren[1]
Ridge[2]
Kamowitz[3]
Singh[4]
Isolation[5]
Earl Berkson[6]
Highly Non-compact[7]
H. Shapiro[8]
Carl Sundberg[9]
Barbara D. MacCluer[10]

[۸] یافت، اما هیچ توصیف کاملی از مؤلفه ها و نقاط تنها شناخته نشده است. بااین احوال شاپیرو و ساندبرگ در[۱۲] سؤالات زیر را مطرح کرده اند.

۱) مشخصه سازی مؤلفه های $\mathcal{C}(H^2)$

۲) کدام یک از عملگرهای ترکیبی در $\mathcal{C}(H^2)$ تنهایند؟

۳) کدام یک از تفاضل های ترکیبی در $\mathcal{C}(H^2)$ فشرده اند؟

اینها مسائل بسیار مشکلی به نظر میرسند. ما در این پایاننامه این مسائل را تنها برای فضای H^∞ مورد بررسی قرار می دهیم .

۲.۱ نگاشت موبیوس

فرض کنید $\mathbb{D}$ گوی واحد $\{z : |z| < 1\}$ در صفحهٔ مختلط باشد و $\mathcal{S}(\mathbb{D})$ مجموعهٔ تمام توابع تحلیلی از $\mathbb{D}$ به‌توی $\mathbb{D}$ باشد. در این صورت $|f(z)| < 1$، اگر $f \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$.

تعریف ۱.۱ فرض کنید X و Y دو مجموعه بوده‌و S وT دو نگاشت تعریف شده از فضای $F_1(Y)$ (فضای توابع تعریف شده روی Y) به فضای $F_2(X)$ (فضای توابع تعریف شده روی X) بصورت زیر باشند

$$Sf(x) = f(\varphi(x))$$

$$Tf(x) = u(x)f(\varphi(x))$$

که در آن $\varphi : X \longrightarrow Y$ و$u \in F_2(X)$ می باشد. در این صورت روابط فوق به ترتیب عملگر ترکیبی و ترکیبی وزن دار از $F_1(Y)$ به فضای $F_2(X)$ می نامند. به تابع u معمولاً تابع وزن گفته می شود.

تعریف ۲.۱ یک زیر مجموعه غیر خالی باز و همبند از صفحهٔ مختلط را یک ناحیه یا حوزه می نامند.

لم ۳.۱ (قضیه مدول ماکسیمم) اگر Ω یک ناحیه باشد، $f \in H(\Omega)$، و$\bar{D}(a;r) \in \Omega$ در این صورت

$$|f(a)| \leq \max_{\theta} |f(a + re^{i\theta})|$$

و تساوی برقرار است، اگر و تنها اگر f ثابت باشد.

برهان. رجوع شود به [۱۰] صفحهٔ ۲۱۲. $\square$

نتیجه ۴.۱ اگر $f \in H^\infty$ برای هر دنبالهٔ $\{z_n\}$ در $\mathbb{D}$ که به یک نقطهٔ مرزی $\partial\mathbb{D}$ همگرا باشد و $|f(z_n)| \longrightarrow 0$ آنگاه $f \equiv 0$.

برهان. بنا به قضیهٔ مدول ماکسیمم f ماکزیمم مقدار خود را روی مرز می گیرد، لذا $f \equiv 0$. $\square$

لم ۵.۱ (لم شوارتز) اگر $f \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ و اگر $f(0) = 0$ ، آنگاه

$$|f'(0)| \leq 1 \qquad , \qquad |f(z)| \leq |z| \,, \qquad z \neq 0$$

و تساوی زمانی برقرار است، که به ازای $z \in \mathbb{D}$ ویک ثابت حقیقی φ داشته باشیم $f(z) = e^{i\varphi}z$ و بالعکس.

برهان. رجوع شود به [۱۰] صفحهٔ ۲۵۴. $\square$

تعریف ۶.۱ یک تبدیل موبیوس به صورت

$$\tau(z) = e^{i\varphi}\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

تعریف می شود، که φ حقیقی و $|z_0| < 1$ با این علامت گذاری داریم $z_0 = \tau^{-1}(0)$.

برای هر $z \in \mathbb{D}$ فرض کنید

$$\varphi_z(w) = \frac{z - w}{1 - \bar{z}w}, \qquad w \in \mathbb{D}$$

نشان دهندهٔ تبدیل موبیوس روی $\mathbb{D}$ باشد.

φ_z در $\mathbb{C}$ به جز نقطهٔ $w = \frac{1}{\bar{z}}$ تحلیلی است و چون $\{w \in \mathbb{C} \ : \ |w| < \frac{1}{\bar{z}}\}$ شامل $\mathbb{D}$ است، پس φ_z در $\mathbb{D}$ تحلیلی است و

$$\varphi_z'(w_0) = \lim_{w \to w_0} \frac{\varphi_z(w) - \varphi_z(w_0)}{w - w_0} = \lim_{w \to w_0} \frac{\frac{z-w}{1-\bar{z}w} - \frac{z-w_0}{1-\bar{z}w_0}}{w - w_0} = \frac{|z|^2 - 1}{(1 - \bar{z}w_0)^2}$$

از رابطهٔ $\varphi_z(\varphi_z(w)) = \varphi_z(\frac{z-w}{1-\bar{z}w}) = \frac{z - \frac{z-w}{1-\bar{z}w}}{1 - \bar{z}\frac{z-w}{1-\bar{z}w}} = w$

نتیجه می شود φ_z یک به یک و معکوس آن φ_z است.

برای t حقیقی داریم :

$$|\varphi_z(e^{it})| = \left|\frac{z - e^{it}}{1 - \bar{z}e^{it}}\right| = \left|\frac{z - e^{it}}{e^{-it} - \bar{z}}\right| = 1$$

اگر $\mathbb{T}$ دایرهٔ واحد باشد، آنگاه $\varphi_z(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$ یعنی φ_z، $\mathbb{T}$ را به توی $\mathbb{T}$ می نگارد و از قضیهٔ مدول ماکسیمم نتیجه می شود $\varphi_z(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

یاد آوری میکنیم که منظوراز $Aut(\mathbb{D})$ مجموعهٔ تمام درونریختی های تحلیلی دو سویه [11] روی قرص واحدند. یعنی داریم $f \in Aut(\mathbb{D})$، f

(i) اگر $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ دوسویی و تحلیلی باشد.

(ii) f^{-1} تحلیلی باشد.

اگر $f \in Aut(\mathbb{D})$ در این صورت $\psi = \varphi_{f(0)} \circ f \in Aut(\mathbb{D})$ و$\psi(0) = 0$ از لم شوارتز نتیجه می‌شود $|\psi'(0)| \leq 1$. و چون $\psi^{-1} \in Aut(\mathbb{D})$ نتیجه می شود

$$|(\psi^{-1})'(0)| = \frac{1}{|\psi'(0)|} \leq 1 \ .$$

[11] biholomorphic automorphisms

لذا خواهیم داشت $|\psi'(0)| = 1$ و بنابه لم شوارتز به ازای $\theta \in \mathbb{R}$ ای و هر $z \in \mathbb{D}$ داریم $\psi(z) = e^{i\theta}z$. بنابراین برای هر عضو $Aut(\mathbb{D})$ خواهیم داشت $f = \varphi_{f(0)} \circ \psi$ که نشان دهندهٔ ترکیب یک دوران و تبدیل موبیوس است.

لم ۷.۱ (لم شوارتز—پیک) اگر $f \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ در این صورت

$$\frac{|f(z) - f(w)|}{|1 - \bar{f(z)}f(w)|} \leq \left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right| \qquad \text{به ازای هر } z, w \in \mathbb{D} \tag{۱.۱}$$

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)^2|} \leq \frac{1}{1-|z|^2} \qquad \text{به ازای هر } z \in \mathbb{D} \tag{۲.۱}$$

و تساوی در(۱.۱)و(۲.۱) در نقطه‌ای مانند z رخ می دهد، اگر $f \in Aut(\mathbb{D})$. اگر تساوی در نامساوی (۱.۱) به ازای یک جفت $z \neq w$ یا در نامساوی (۲.۱) به ازای zای برقرار باشد، آنگاه $f \in Aut(\mathbb{D})$.

برهان. فرض کنید $g = \varphi_{f(z)} \circ f \circ \varphi_z$. در این صورت $g \in \mathcal{B}$ و $g(w) = \varphi_{f(z)}(f(\frac{z-w}{1-\bar{z}w}))$. به خصوص $g(0) = \varphi_{f(z)}(f(z)) = 0$ بنا به لم شوارتز به ازای هر $\zeta \in \mathbb{D}$ داریم $|g(\zeta)| \leq |\zeta|$ و در نتیجه

$$|g(\varphi_z(w))| \leq |\varphi_z(w)|$$

یعنی داریم $|\varphi_{f(z)}(f(w))| \leq |\varphi_z(w)|$ و رابطهٔ زیر بدست می آید

$$\frac{|f(z) - f(w)|}{|1 - \bar{f(z)}f(w)|} \leq \left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right| \qquad z, w \in \mathbb{D}\ .$$

اگر تساوی به ازای $z \neq w$ای برقرار باشد، در این صورت $|g(\varphi_z(w))| = |\varphi_z(w)|$ و بنا به لم شوارتز به ازای $\theta \in \mathbb{R}$ ای و هر $z \in \mathbb{D}$ داریم $g(z) = e^{i\theta}z$. لذا $g \in Aut(\mathbb{D})$ و $f = \varphi_{f(z)} \circ g \circ \varphi_z \in Aut(\mathbb{D})$.

بنا به (۱.۱)

$$\begin{aligned}
\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)^2|} &= \lim_{\substack{w\to z\\ w\neq z}} \{|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}|.\frac{1}{|1-\bar{f}(z)f(w)|}\}\\
&\leq \lim_{\substack{w\to z\\ w\neq z}} \frac{1}{|1-\bar{z}w|} = \frac{1}{|1-\bar{z}z|} \leq \frac{1}{1-|z|^2}\ .
\end{aligned}$$

اکنون فرض کنید تساوی در (۲.۱) برقرار باشد. با فرض اینکه $z = w$

$$\begin{aligned}
|g'(0)| &= |\varphi'_{f(z)}(f\circ\varphi_z(0))|.|f'(\varphi_z(0))|.|\varphi'_z(0)|\\
&= |\varphi'_{f(z)}(f(z))|.|f'(z)|.(1-|z|^2)\\
&= \frac{1-|f(z)|^2}{(1-\bar{f}(z)f(z))^2}.|f'(z)|.(1-|z|^2)\\
&= \frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}.(1-|z|^2) = 1\ .
\end{aligned}$$

لذا $g \in Aut(\mathbb{D})$ و $f = \varphi_{f(z)} \circ g \circ \varphi_z \in Aut(\mathbb{D})$

سرانجام اگر $f \in Aut(\mathbb{D})$ در این صورت با قرار دادن f و f^{-1} در (۱.۱) نتیجه می شود

$$\left|\frac{f^{-1}(f(z))-f^{-1}(f(w))}{1-\bar{f}^{-1}(f(z))f^{-1}(f(w))}\right| = \left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right| \leq \frac{|f(z)-f(w)|}{|1-f\bar{(z)}f(w)|} \leq \left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|$$

و تساوی برقرار می شود. به طور مشابه برای (۲.۱) داریم

$$\frac{1}{1-|z|^2} = \frac{|(f^{-1}\circ f)'(z)|}{1-|f^{-1}\circ f(z)|^2} \leq \frac{|f'(z)|}{1-|f(z)^2|} \leq \frac{1}{1-|z|^2}$$

و در این حالت نیز به ازای $f \in Aut(\mathbb{D})$ تساوی برقرار است. $\square$