دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض— هندسه و توپولوژی

اوربیفلدها و گروه‌وارها

استاد راهنما: دکتر حسین خورشیدی

استاد مشاور: دکتر اکبر دهقان‌نژاد

پژوهش و نگارش: مالک پورحسینی

شهریور ۱۳۸۹

إنه من سليمان وإنه

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به:

محضر ولی عصر(عج)

با تشکر از اساتید بزرگوار:
دکتر حسین خورشیدی
دکتر اکبر دهقان نژاد
دکتر محمدرضا احمدی‌زند
دکتر مهدی نجفی‌خواه

چکیده

در این پایان‌نامه به بررسی خواص اوربیفلدها و گروه‌وارهای لی و ارتباط آن‌ها با یکدیگر پرداخته و بدین منظور مثال‌های متعددی از هر یک ارائه خواهیم داد و سپس با بررسی ساختارهایی روی هر یک از آنها (مانند متریک ریمانی روی اوربیفلدها، هم‌ارزی و همریختی‌ها بین گروه‌وارها) گروه‌وارهای اوربیفلدی را تعریف و کتگوری اوربیفلدها را توصیف خواهیم نمود.

فهرست مندرجات

۱ مفاهیم اولیه ۳

۱.۱ مفاهیم مقدماتی از هندسه دیفرانسیل ۳

۲.۱ عمل گروه روی یک مجموعه ۱۸

۳.۱ گروه‌وارهای جبری ۲۵

۲ اوربیفلدها ۳۱

۱.۲ چند مثال ۳۱

۲.۲ G–مجموعه‌ها ۴۲

۳.۲ اوربیفلدها ۴۴

۳ گروه‌وارها ۵۳

۱.۳ گروه‌وارهای لی ۵۳

۲.۳ ایزوتروپی و مدار ۵۷

۳.۳ رده‌هایی از گروه‌وارها ۶۱

۴.۳ گروه‌وارهای مونودرومی و هولونومی ۶۴

۴ هم‌ارزی و گروه‌وارهای اوربیفلدی ۶۸

۱.۴ همریختی‌ها ۶۸

۲.۴ هم‌ارزی ۷۳

۳.۴ گروه‌وار اوربیفلدی و کتگوری اوربیفلدها ۹۲

۵ واژه نامه انگلیسی به فارسی ۹۸

۶ مراجع ۱۰۲

مقدمه

اوربیفلدها و مفاهیم مربوط به آن به‌طور تلویحی اولین بار توسط هنری پوانکاره[1] به‌کار گرفته شد. در سال ۱۹۵۶ ساتاکه در [۷] مفهوم V—منیفلدها را ارائه کرد که سرآغاز بحث اوربیفلدهاست. ویلیام ترستن [2][۸]، در اواخر نیمه ۱۹۷۰ تعریف‌ها و بسیاری از نمادهای اصلی اوربیفلدها را که قسمت‌هایی از مطالعاتش روی ساختارهای هذلولوی بود ارائه کرد[3]. هدف از این پایان نامه توصیف اوربیفلدها در شرایط گروه‌واری است.

در فصل اول به مرور مفاهیم مقدماتی پرداخته نکاتی از هندسه دیفرانسیل (مانند برگ‌بندی، جرم) و عمل گروه را یادآور می‌شویم و سپس مفهوم گروه‌وارها را از دیدگاه جبری توصیف می‌کنیم.

در فصل دوم به منظور آشنایی هرچه بیشتر با اوربیفلدها ابتدا چند مثال ملموس را بررسی می‌نماییم سپس به توصیف G—مجموعه‌ها پرداخته و در پایان ساختار اوربیفلدها و بعضی از ویژگی‌های آنها مانند متریک ریمانی را مطالعه می‌کنیم.

در فصل سوم گروه‌وارها را از دیدگاه کتگوری مطالعه نموده و گروه‌وارهای لی را به‌عنوان کتگوری‌های کوچک که مجموعه اشیا و مجموعه پیکان‌ها (مرفیسم‌ها) هر دو منیفلدهای هموار هستند و پیکان‌ها دوسویی می‌باشند در نظر می‌گیریم. در این فصل مفاهیم اساسی و ساختارهایی که در مبحث گروه‌وارها مورد توجه هستند مطالعه خواهیم نمود و رده‌هایی از گروه‌وارها را بررسی می‌کنیم و در انتها گروه‌وارهای مونودرومی و هولونومی را مطالعه خواهیم نمود.

نهایتاً در فصل چهارم به بررسی همریختی‌ها و هم‌ارزی‌ها بین گروه‌وارها پرداخته مفهوم گروه‌وار اوربیفلدی را توصیف می‌کنیم و شرایطی که گروه‌وارها می‌توانند به‌عنوان اوربیفلد

[1] *Henri Poincaré*

[2] *William Thurston*

[3] در دایرة المعارف ویکی پدیا ذکر شده که ترستن از کارهای ساتاکه آگاه نبود

در نظر گرفته شوند بررسی می‌کنیم. در بخش آخر با بررسی ساختارهایی روی اوربیفلدها، کتگوری اوربیفلدها را توصیف می‌کنیم.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ مفاهیم مقدماتی از هندسه دیفرانسیل

۱.۱.۱ تعریف. فرض کنید M و N دو منیفلد C^∞، با بعدهای به‌ترتیب m و n و $f : M \to N$ نگاشتی C^∞ باشند. f را یک درنهش[۱] در نقطه $p \in M$ می‌نامیم در صورتی‌که df_p یک به یک باشد.

۲.۱.۱ تعریف. فرض کنید M و N دو منیفلد C^∞، با بعدهای به‌ترتیب m و n و $f : M \to N$ نگاشتی C^∞ است. f را یک برنهش[۲] در نقطه $p \in M$ می‌نامیم در صورتی‌که df_p پوشا باشد[۳].

---

[۱] *immersion*

[۲] *submersion*

[۳] اصطلاحات «درنهش و برنهش» که به‌ترتیب ترجمه کلمات ایمرسیون (*immersion*) و سوبمرسیون (*submersion*) هستند در متون دیگر به شکل دیگری ذکر شده‌اند اما به سبب هماهنگی آنها به لحاظ معنا و نیز تشابه آهنگ کلام بر سایر ترجمه‌ها ترجیح داده شده‌اند این کلمات از سوی استاد راهنما پیشنهاد شده‌اند.

برای برنهش‌ها و درنهش‌ها می‌توان فرم موضعی کانونی روی همسایگی کوچک از $x \in M$ به‌صورت زیر درنظر گرفت:

(۱) اگر f درنهش باشد، همسایگی‌های باز $U \subset M$ از x و $V \subset N$ از $f(x)$ با $f(U) \subset V$ و دیفئومرفیسم‌های $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ و $\psi : V \to \mathbb{R}^p$ وجود دارند که

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(y) = (y, 0)$$

نسبت به تجزیه $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-n}$ در نظر گرفته شده‌اند.

(۲) اگر f برنهش باشد، همسایگی‌های باز $U \subset M$ از x و $V \subset N$ از $f(x)$ با $f(U) = V$ و دیفئومرفیسم‌های $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ و $\psi : V \to \mathbb{R}^p$ وجود دارند که

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(y, z) = y$$

نسبت به تجزیه $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ در نظر گرفته شده‌اند.

۳.۱.۱ تعریف. فرض کنید $f : M \to N$ یک نگاشت هموار بین منیفلدهای هموار باشد. یک نقطه $q \in N$ مقدار منظم[۴] نامیده می‌شود اگر f در هر $p \in f^{-1}(q)$ برنهش باشد. به‌ازای نقطه $q \in N$ مجموعه $f^{-1}(q)$ یک فیبر[۵] (یا تار) نامیده می‌شود.

۴.۱.۱ قضیه. (قضیه برنهش کانونی) فرض کنیم $f : M \to N$ یک برنهش در $p \in M$ باشد آنگاه $m = dim\, M \geq n = dim\, N$ و کارت‌های (φ_1, U_1, V_1) حول p و (φ_2, U_2, V_2) حول $q = f(p)$ وجود دارند که نگاشت $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : V_1 \to V_1$ نگاشت تصویری

$$\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \quad (x_1, \cdots, x_m) \mapsto (x_1, \cdots, x_n)$$

---

[۴] $regular$

[۵] $fibre$

با تحدید به V_1 است.

اثبات. چون مسئله موضعی است، می‌توانیم فرض کنیم $p = 0 \in U \subset \mathbb{R}^m$ و $q = 0 \in V \subset \mathbb{R}^n$. در حقیقت f برنهشی است که هم‌ارز با ماتریس ژاکوبین $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$ می‌باشد که یک ماتریس $m \times n$ با رتبه n است. بنابراین به‌خصوص $m \geq n$. در صورت نیاز با دوباره مرتب کردن مختصات، می‌توانیم زیرماتریس

$$(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$$

را در نظر بگیریم که نامنفرد است. حال تابع F را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$F : U \to \mathbb{R}^m, (x_1, \cdots, x_m) \mapsto (f_1, \cdots, f_n, x_{n+1}, \cdots, x_m)$$

به‌وضوح $dF(0)$ نامنفرد است. بنا به قضیه تابع معکوس، F موضعاً وارون‌پذیر با معکوس H است. توجه کنید که $f = \pi \circ F$ که π نگاشت تعریف شده در قضیه است. پس

$$f \circ H = \pi \circ F \circ H = \pi$$

$\square$

۵.۱.۱ قضیه. اگر q یک مقدار منظم از نگاشت هموار $f : M \to N$ باشد آنگاه $S = f^{-1}(q)$ یک زیرمنیفلد از M با بعد $dim\ M - dim\ N$ است. بنابراین، برای هر $p \in S$، T_pS هسته نگاشت $df_p : T_pM \to T_pN$ است.

اثبات. فرض کنیم $p \in S = f^{-1}(q)$ باشد. پس بنا به قضیه برنهش کانونی، کارت‌های (φ, U, V) به مرکز p و (φ_1, U_1, V_1) به مرکز q وجود دارند که $f(U) \subset U_1$ و $\pi = \varphi_1 \circ f \circ \varphi^{-1}$. بنابراین φ مجموعه $U \bigcap f^{-1}(q)$ را بر $V \bigcap \pi^{-1}(0)$ می‌نگارد. پس $f^{-1}(q)$ یک زیرمنیفلد است.

اگر $\iota : S \to M$ نگاشت شمول باشد آنگاه برای هر $p \in S$، $f \circ \iota = q$. به‌عبارت

دیگر، $f \circ \iota$ یک نگاشت ثابت روی S است. بنابراین $df_p \circ d\iota_p = 0$ یعنی روی تصویر $d\iota_p : T_pS \hookrightarrow T_pM$ داریم $df_p = 0$. با در نظر گرفتن بعد، نتیجه می‌گیریم که T_pS منطبق با هسته df_p است. $\square$

۶.۱.۱ تعریف. فرض کنیم X و Y منیفلدهای دیفرانسیل‌پذیر باشند. تابع $f : X \to Y$ یک دیفئومرفیسم موضعی است، اگر برای هر نقطه x در X، یک مجموعه باز U شامل x وجود داشته باشد که $f(U)$ در Y باز باشد و $f|_U : U \to f(U)$ دیفئومرفیسم باشد.

تعاریف زیر را در مباحث بعدی نیاز خواهیم داشت.

۷.۱.۱ تعریف. تابع $f : X \to Y$ بین دو فضای توپولوژیک یک نگاشت سره[۶] است هرگاه تصویر معکوس هر مجموعه فشرده در Y، در X فشرده باشد.

۸.۱.۱ تعریف. کلاف برداری[۷] حقیقی شامل موارد زیر است:

۱– فضاهای توپولوژیک X (فضای پایه) و E (فضای کلی)

۲– نگاشت پیوسته پوشای $\pi : E \to X$ (نگاشت تصویری کلاف)

۳– برای هر x در X، ساختار فضای برداری حقیقی متناهی‌البعد روی فیبر $\pi^{-1}(x)$

که در شرط زیر صدق می‌کند: برای هر نقطه در X، همسایگی باز U، عدد طبیعی k و همئومرفیسم

$$\varphi : U \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(U)$$

وجود دارند که برای هر $x \in U$،

- برای همه بردارهای v در $\mathbb{R}^k$ داریم $\pi\varphi(x, v) = x$ و
- نگاشت $v \mapsto \varphi(x, v)$ ایزومرفیسمی میان فضاهای برداری $\mathbb{R}^k$ و $\pi^{-1}(\{x\})$ است.

[۶] *proper*

[۷] *vector bundle*

۹.۱.۱ تعریف. نماد (E, B, π, F) یک کلاف فیبری[۸] را مشخص می‌کند هرگاه E و B و F فضاهای توپولوژیک و $\pi : E \to B$ یک نگاشت پیوسته پوشا باشد که در شرط زیر صدق می‌کند: برای هر $x \in E$ یک همسایگی باز U از $\pi(x)$ موجود باشد به‌طوری‌که $\pi^{-1}(U)$ با فضای حاصل‌ضرب $U \times F$ همئومرف باشد به‌گونه‌ای که نمودار زیر جابجایی باشد

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times F \arrow[dl, "pr_1"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

که در آن $pr_1 : U \times F \to U$ تصویر روی مولفه اول است و $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ یک همئومرفیسم است مجموعه همه $\{(U_i, \varphi_i)\}$ را بدیهی‌سازی موضعی کلاف می‌نامند. بنابراین برای هر $p \in B$ مجموعه $\pi^{-1}(\{p\})$ همئومرف با F است و فیبر روی p نامیده می‌شود. هر کلاف فیبری $\pi : E \to B$ نگاشت باز است زیرا تصویرهای حاصل‌ضرب‌ها نگاشت‌های باز هستند. بنابراین B دارای توپولوژی خارج‌قسمتی است که با نگاشت π معین می‌شود کلاف فیبری را گاهی با دنباله $F \to E \xrightarrow{\pi} B$ نشان می‌دهند.

۱۰.۱.۱ تعریف. کلاف برداری $\pi : E \to X$ و زیرمجموعه باز U از X داده شده‌اند. برش‌های[۹] π روی U توابع پیوسته $s : U \to E$ با $\pi s = id_U$ هستند. برش‌های (هموار) کلاف مماس $T(M)$، میدان‌های برداری روی M هستند. اگر K زیرمنیفلدی از N و

---

[۸] *fibre bundle*

[۹] *section*

$f : M \to N$ یک نگاشت هموار باشد، گفته می‌شود که f متقاطع[10] روی K است اگر برای هر $x \in f^{-1}(K)$ رابطه $(df)_x(T_x(M)) + T_{f(x)}(K) = T_{f(x)}(N)$ برقرار باشد. اگر M منیفلد هموار باشد آنگاه C^∞−مدول $\chi(M)$ که متشکل از همه میدان‌های برداری روی M می‌باشد یک جبر لی است (به [۲۰] رجوع کنید).

۱۱.۱.۱ تعریف. فرض کنیم M و N منیفلد باشند و $x \in M$ و $y \in N$. جرم یک نگاشت از x به y یک کلاس هم‌ارزی از نگاشت‌های $f : U \to V$ از همسایگی باز U از x به همسایگی باز V از y با $f(x) = y$ است، در واقع دو نگاشت $f : U \to V$ و $f' : U' \to V'$ جرم‌های یکسانی از x به y مشخص می‌کنند اگر همسایگی باز $W \subset U \bigcap U'$ از x وجود داشته باشد که $f|_W = f'|_W$. جرم f از x به y (یا به اختصار جرم f در x) با f_x یا $germ_x(f) : (M,x) \to (N,y)$ نمایش می‌دهیم. جرم‌های $f_x : (M,x) \to (N,y)$ و $g_y : (N,y) \to (O,z)$ می‌توانند به شکل $g_y \circ f_x = (g \circ f_{domg\ g})_x : (M,x) \to (O,z)$ ترکیب شوند و همانی به شکل $germ\, id_x : (M,x) \to (M,x)$ است. جرم یک دیفئومرفیسم که (به‌طور موضعی) از x به y تعریف شده عبارت است از جرم نگاشت $f : U \to V$ با ضابطه $f(x) = y$ در نقطه x همان‌طور که در بالا اشاره شده است. توجه کنید که هر جرم یک دیفئومرفیسم $f_x : (M,x) \to (N,y)$ دارای معکوس $f_x^{-1} = (f^{-1})_x : (N,y) \to (M,x)$ است. به‌خصوص، جرم‌های دیفئومرفیسم‌های $(M,x) \to (M,x)$ یک گروه تشکیل می‌دهند که با

$$Diff_x(M)$$

نمایش داده می‌شود.

۱۲.۱.۱ تعریف. یک هوموتوپی میان دو تابع پیوسته f و g از فضای X به فضای Y یک نگاشت پیوسته G از $X \times [0,1] \mapsto Y$ است که $G(x,0) = f(x)$ و $G(x,1) = g(x)$.

[10] $transversal$

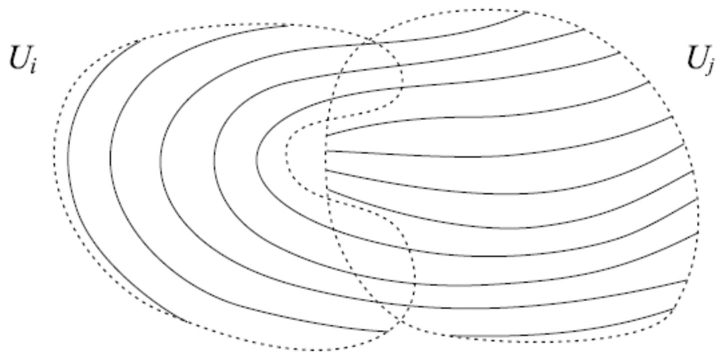
۱۳.۱.۱ تعریف. فرض کنیم M یک منیفلد هموار از بعد n باشد. یک اطلس برگ‌بندی شده از بعد متمم q برای M (که $0 \leq q \leq n$) اطلس

$$(\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q)_{i \in I}$$

از M است که دیفئومرفیسم‌های تبدیل کارت‌های موضعی φ_{ij} موضعاً به شکل

$$\varphi_{ij}(x, y) = (g_{ij}(x, y), h_{ij}(y))$$

هستند که نسبت به تجزیه $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q$ در نظر گرفته شده است. کارت‌های اطلس‌های برگ‌بندی کارت‌های برگ‌بندی نامیده می‌شوند. هر U_i به پلاک‌هایی[۱۱] تقسیم می‌شود که مولفه‌های همبند زیرمنیفلد $\varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^{n-q} \times \{y\})$، $y \in \mathbb{R}^q$ هستند و دیفئومرفیسم‌های تبدیل کارت این تقسیم‌بندی را حفظ می‌کنند (شکل زیر).



پلاک‌ها به‌طور سرتاسری به هم می‌پیوندند و برگ‌ها[۱۲] را به‌وجود می‌آورند که منیفلدهای هموراری از بعد $n - q$ بوده و با درنهشی یک به یک به‌توی M نگاشته می‌شوند. به‌عبارت دیگر، دو نقطه $x, y \in M$ روی یک برگ قرار دارند اگر دنباله‌ای از کارت‌های برگ‌بندی $U_1, \cdots, U_k$ و دنباله نقاط $x = p_0, p_1, \cdots, p_k = y$ وجود داشته باشند که p_{j-1} و p_j روی یک پلاک در U_j، برای هر $1 \leq j \leq k$ قرار داشته باشند.

[۱۱] $plaques$
[۱۲] $leaves$

یک برگ‌بندی[۱۳] از بعد متمم q برای M عبارت است از اطلس برگ‌بندی ماکسیمال M از بعد متمم q. هر اطلس برگ‌بندی یک برگ‌بندی مشخص می‌کند، چون مشمول در اطلس برگ‌بندی ماکسیمال منحصربفرد است. دو اطلس برگ‌بندی دقیقاً برگ‌بندی‌های یکسانی از M تعریف می‌کنند اگر افرازهای مشابهی از M به برگ‌ها القا کنند. منیفلد برگ‌بندی‌شده[۱۴] (هموار) جفت $(M, \mathcal{F})$ است که M منیفلد هموار و $\mathcal{F}$ برگ‌بندی M می‌باشد. فضای برگ‌های[۱۵] $M/\mathcal{F}$ برای منیفلد برگ‌بندی شده $(M, \mathcal{F})$ فضای خارج‌قسمتی M است که با یکی گرفتن دو نقطه از M به‌دست می‌آید هرگاه آنها روی برگ‌های یکسانی از $\mathcal{F}$ قرار داشته باشند. بعد $\mathcal{F}$ برابر $n - q$ است. نگاشت (هموار) میان منیفلدهای برگ‌بندی شده $f : (M, \mathcal{F}) \to (M', \mathcal{F}')$ نگاشت (هموار) $f : M \to N$ است که ساختار برگ‌بندی را حفظ می‌کند، یعنی نگاشتی که برگ‌های $\mathcal{F}$ را به‌توی برگ‌های $\mathcal{F}'$ می‌نگارد.

با توجه به آنچه که در مورد برگ‌بندی گفته شد منیفلد M یک برگ‌بندی k—بعدی روی خود دارد اگر به سطح‌های k—بعدی برگ‌بندی شده باشد. یعنی اگر برای هر نقطه M دقیقاً یک زیرمنیفلد k—بعدی هموار مشخص شده باشد که از آن نقطه عبور کند و به‌طور هموار (یا پیوسته) وابسته به نقاط منیفلد باشد. این سطوح، برگ‌های برگ‌بندی نامیده می‌شوند. به‌علاوه ضروری است که در همسایگی‌ای برای هر نقطه M بتوان مختصات $x^۱, \cdots, x^k, y^۱, \cdots, y^{n-k}$ تعریف کرد با این خاصیت که سطوح تراز $y^۱ = a_۱, \cdots, y^{n-k} = a_k$ دقیقاً برگ‌هایی از برگ‌بندی در آن همسایگی باشند (یک برگ برای هر $(n-k)$—تایی $(a_۱, \cdots, a_{n-k})$ و ضمناً $x^۱, \cdots, x^k$ مختصات موضعی برای هر برگ هستند.

---

[۱۳] $foliation$

[۱۴] $foliated\ manifold$

[۱۵] $space\ of\ leaves$

۱۴.۱.۱ مثال. (۱) فضای n—بعدی $\mathbb{R}^n$ را در نظر می‌گیریم. آن را با زیرفضاهایی که $n-p$ مختص اول آنها ثابت فرض شده است برگ‌بندی می‌کنیم. این فضا می‌تواند با یک کارت به تنهایی پوشانده شود. در واقع

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$$

در اینجا برگ‌ها به‌صورت $\mathbb{R}^{n-p}$ها هستند که به‌وسیله $\mathbb{R}^p$ها شمرده می‌شوند. مثلاً در حالت سه بعدی، با گذاشتن $n = ۳$ و $p = ۱$ برگ‌های دو بعدی یک کتاب با شماره صفحات (یک بعدی) شمرده می‌شود.

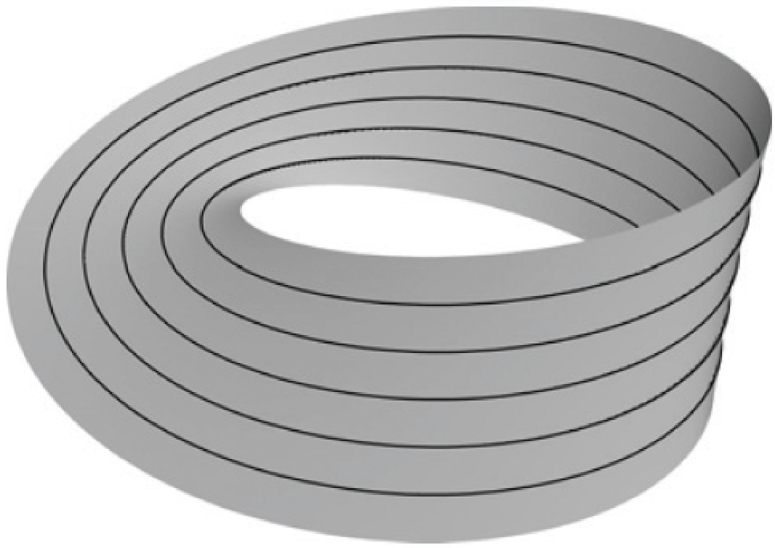
(۲) هر برنهش $f : M \to N$ برگ‌بندی $\mathcal{F}(f)$ از M را تعریف می‌کند که برگ‌ها مولفه‌های همبندی از فیبرهای f هستند. بعد متمم $\mathcal{F}(f)$ برابر بعد N است. اطلسی که $\mathcal{F}(f)$ را به‌دست می‌دهد از فرم موضعی کانونی برای برنهش f حاصل می‌شود. برگ‌بندی‌های وابسته به برنهش‌ها، برگ‌بندی‌های ساده[۱۶] نیز نامیده می‌شوند. برگ‌بندی‌های وابسته به برنهش‌ها با فیبرهای همبند، اکیداً ساده[۱۷] نامیده می‌شوند. یک برگ‌بندی ساده اکیداً ساده است دقیقاً وقتی‌که فضای برگ‌ها هاسدورف است.

(۳) (برگ‌بندی کرونکر برای چنبره) فرض کنیم a عدد حقیقی گنگ باشد و فرض کنیم برنهش $s : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ با $s(x, y) = x - ay$ داده شده است. بنا به مثال بالا برگ‌بندی $\mathcal{F}(s)$ از $\mathbb{R}^n$ را داریم. فرض کنیم $f : \mathbb{R}^۲ \to T^۲ = S^۱ \times S^۱$ نگاشت پوششی استاندارد از چنبره باشد، یعنی $f(x, y) = (e^{۲\pi ix}, e^{۲\pi iy})$. برگ‌بندی $\mathcal{F}(s)$ برگ‌بندی $\mathcal{F}$ از $T^۲$ را القا می‌کند: اگر φ یک کارت برگ‌بندی برای $\mathcal{F}(s)$ باشد که $f|_{dom\varphi}$ یک به یک است، آنگاه $\varphi \circ (f|_{dom\varphi})^{-۱}$ یک کارت برگ‌بندی برای $\mathcal{F}$ است. هر برگ $\mathcal{F}$ دیفئومرف با $\mathbb{R}$ است و در $T^۲$ چگال است (شکل پایین).

---
[۱۶] $simple\ foliations$

[۱۷] $strictly\ simple$

(۴) (برگ‌بندی نوار موبیوس) فرض کنیم $f : \mathbb{R}^۲ \to M$ نگاشت پوششی استاندارد نوار موبیوس (باز) باشد: $f(x,y) = f(x',y')$ هرگاه $x' - x \in \mathbb{Z}$ و $y' = (-۱)^{x'-x}y$. برگ‌بندی بدیهی از بعد متمم ۱ برای $\mathbb{R}^۲$، برگ‌بندی $\mathcal{F}$ از M را به همان روش مثال بالا القا می‌کند. همه برگ‌های $\mathcal{F}$ دیفئومرف با $S^۱$ هستند و دو بار حول M می‌پیچند، به جز برگ میانی که تنها یک بار می‌پیچند (شکل زیر).



۱۵.۱.۱ تعریف. حال فرض کنیم $(M, \mathcal{F})$ یک منیفلد برگ‌بندی‌شده با $q = codim(\mathcal{F})$ باشد و فرض کنیم L یک برگ $\mathcal{F}$ باشد. فرض کنیم $x, y \in L$ دو نقطه

در این برگ باشند و فرض کنیم T و S برش‌های متقاطع[18] در x و y باشند (یعنی زیرمنیفلدهایی از M که با برگ‌های $\mathcal{F}$ متقاطع‌اند و $x \in T$ و $y \in S$). به هر مسیر α از x به y در L یک جرم دیفئومرفیسم

$$hol(\alpha) = hol^{S,T}(\alpha) : (T, x) \to (S, y)$$

به‌صورتی که در ادامه شرح آن می‌آید نسبت داده می‌شود که هولونومی[19] مسیر α در L نسبت به برش‌های متقاطع T و S نامیده می‌شود. اما نحوه تعریف جرم فوق به‌صورت زیر است:

ابتدا فرض کنیم یک (دامنه از یک) کارت برگ‌بندی U از $\mathcal{F}$ چنان موجود باشد که $\alpha([\circ, \text{۱}]) \subset U$. به‌خصوص نقاط x و y روی پلاک‌های یکسانی در U قرار داشته باشند. سپس می‌توانیم یک همسایگی باز کوچک A از x در T با $A \subset U$ پیدا کنیم که روی آن می‌توان نگاشت هموار $f : A \to S$ را تعریف کرد که $f(x) = y$ و برای هر $x' \in A$ نقطه $f(x')$ در همان پلاک از U واقع باشد که x' واقع است. به‌وضوح می‌توانیم A را آنقدر کوچک انتخاب کنیم که f یک دیفئومرفیسم به‌روی تصویرش باشد. بنابراین

$$hol^{S,T}(\alpha) = germ_x(f)$$

را تعریف می‌کنیم.

این تعریف به انتخاب U و f بستگی ندارد و اگر β راه دیگری در $L \bigcap U$ از x به y باشد آنگاه $hol^{S,T}(\alpha) = hol^{S,T}(\beta)$.

حال حالت کلی را در نظر می‌گیریم. دنباله‌ای از کارت‌های برگ‌بندی $U_\text{۱}, \cdots, U_k$ را انتخاب می‌کنیم که $\alpha([\frac{i-\text{۱}}{k}, \frac{i}{k}]) \subset U_i$. فرض کنیم α_i مسیری در $L \bigcap U_i$ از $\alpha(\frac{i-\text{۱}}{k})$ به

[18] $transversal\ sections$

[19] $holonomy$