۸۷/۱/۱۰-۱۴۳۲

۸۷/۱۰/۱۱

بسم الله الرحمن الرحیم

۱۰۴۳۶۱

دانشگاه تبریز

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض(آنالیز)

عنوان

بهترین ثابت پایداری هایرز-اولام

استاد راهنما

دکتر محمدرضا جبارزاده

استاد مشاور

دکتر یدا... نژاد دهقان

پژوهشگر

زینب غمسوار خیرالدین

اسفند ماه ۱۳۸۶

بسم الله الرحمن الرحیم

پس از حمد و ثنای پروردگار یکتا بر خود واجب می دانم از اساتید بزرگواری که همواره ازرهنمودهای آنان بهره برده ام تشکر و قدردانی کنم.

در ابتدا از استاد ارجمندم دکتر محمدرضا جبارزاده که زحمت فراوانی را در راهنمایی این پایاننامه متحمل شدند کمال تشکر را دارم و توفیقات روزافزون ایشان را از خداوند خواستارم.

همچنین از دکتر یدا... نژاددهقان که استاد مشاور بنده در تنظیم مطالب بودند قدردانی می کنم.

از دکتر حمید واعظی هم که زحمت داوری این پایاننامه را بر عهده داشتند تشکر می کنم.

نام خانوادگی : غمسوار خیرالدین　　　　نام : زینب　　　　:

عنوان پایان نامه : بهترین ثابت پایداری هایرز-اولام

استاد راهنما : دکتر محمدرضا جبارزاده　　　استاد مشاور: دکتر یدا... نژاد دهقان

مقطع تحصیلی:کارشناسی ارشد　　　رشته:ریاضی محض　　　گرایش:آنالیز

دانشگاه:تبریز　　　دانشکده:ریاضی　　　تاریخ فارغ التحصیلی:اسفند ماه ۱۳۸۶

تعداد صفحه : ۷۵

کلید واژه ها: پایداری، ثابت پایداری،عملگر ترکیبی وزن دار، مجموعه ی قله ای

چکیده : ابتدا پایداری هایرز- اولام یک عملگر خطی را تعریف می کنیم و در ادامه ثابت پایداری و بهترین ثابت پایداری را معرفی خواهیم کرد. سپس شرطهای لازم و کافی را ارائه خواهیم کرد تا نشان دهیم عملگرهای ترکیبی وزن دار و عملگرهای دیفرانسیل پذیر دارای پایداری هایرز- اولام می باشند. با استفاده از نتایجی که بدست آمده ، پایداری هایرز-اولام یک عملگر بسته در فضای هیلبرت مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

با احترام و سپاس ، تقدیم به

پدر و مادرم

فهرست مطالب

صفحه

فصل اول.مفاهیم مقدماتی و پیشینه پژوهش

فصل دوم. بهترین ثابت پایداری هایرز اولام

فصل سوم. پایداری هایرز-اولام یک عملگر بسته در فضای هیلبرت

مقدمه

در سال ۱۹۴۱ ، هایرز [1] مساله ای را به صورت زیر مطرح کرد :

هر گاه $f : E_1 \to E_2$ ، و $\varepsilon \geq 0$ ای موجود باشد به طوریکه برای هر $x, y \in E_1$

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

آنگاه یک نگاشت خطی یکتا مانند $T : E_1 \to E_2$ وجود دارد بطوریکه برای هر $x \in E_1$

$$\|f(x) - T(x)\| \leq \varepsilon.$$

نتیجه پایداری هایرز-اولام [2] ، معادلات جمعپذیر و کشی $g(x+y) = g(x) + g(y)$ نامیده می شود. در سال ۱۹۷۸، راسیاس [3] ، یک نامساوی تابعی جدیدی را به صورت زیر معرفی کرد:

اگر $\varepsilon \geq 0$ و $0 \leq p < 1$ ای وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $x, y \in E_1$

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon(\|x\|^p + \|y\|^p).$$

آنگاه یک نگاشت خطی یکتا مانند $T : E_1 \to E_2$ وجود دارد بطوریکه

$$\|f(x) - T(x)\| \leq \frac{2\theta}{|2 - 2^p|}\|x\|^p.$$

از آن پس توجه ریاضیدانان متعددی جلب نتیجه راسیاس شد و مسائل پایداری معادلات تابعی را مورد تحقیق و بررسی قرار دادند.

در سال ۱۹۹۱ ، Z.Gajda ، مساله را در حالت $p > 1$ حل کرد و در حقیقت نتیجه ی راسیاس در حالت $p > 1$ معتبر است .

---

[1] Hyers

[2] Hyers-Ulam Stability

[3] Rassias

سرانجام دو ریاضیدان به نامهای میاجیما و تاکاهاشی نظریه پایداری را برای نگاشتی که از یک فضای نرمدار خطی به فضای نرمدار خطی دیگر تعریف شده بود مطرح کردند.

این پایاننامه در سه فصل تنظیم شده و برگرفته از مقاله ای تحت عنوان

"ON THE BEST CONSTANT OF HYERS-ULAM STABILITY"

می باشد که توسط پنج ریاضیدان به نامهای هاتوری، کوبایاشی، میورا، تاکاگی و تاکاهاشی در سال ۲۰۰۴ ارائه شد و در مجله ی

Nonlinear Convex Ana.

به چاپ رسید.

فصل اول

مفاهیم مقدماتی و پیشینه پژوهش

۱-۱ نمادگذاری : مجموعه اعداد مختلط را با $\mathbf{C}$ و مجموعه اعداد حقیقی را با $\mathbf{R}$ نشان می دهیم. قدر مطلق عدد α را با $|\alpha|$ و مزدوج آنرا با $\overline{\alpha}$ نشان می دهیم. مجموعه اعداد صحیح را با $\mathbf{Z}$ و مجموعه اعداد طبیعی را با $\mathbf{N}$ نمایش می دهیم.

۱-۲ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱-۲-۱ تعریف : تابع T را یک تبدیل خطی یا عملگر خطی گویند هر گاه دامنه و برد آن فضای برداری روی یک میدان اسکالر ϕ ($\mathbf{R}$ یا $\mathbf{C}$) بوده و به ازای هر x,y در دامنه داشته باشیم

$$T(x+y)=T(x)+T(y).$$
$$T(\alpha x)=\alpha T(x).$$

هر گاه T یک عملگر خطی از فضای برداری X به ϕ باشد آن را یک تابعک خطی روی X می نامیم.

۱-۲-۲ تعریف : هر گاه X و Y فضاهای برداری نرمدار و $T:X\to Y$ یک عملگر خطی کراندار باشد در اینصورت نرم عملگر T را با $\|T\|$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\|T\|=\sup_{\|x\|\le 1}\|Tx\|.$$

۱-۲-۳ تعریف : دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از فضای نرمدار E را یک دنباله کشی می نامیم هر گاه به ازای هر $\varepsilon>0$ ، N ای موجود باشد که به ازای هر $m,n\ge N$ داشته باشیم

$$\|x_n-x_m\|<\varepsilon.$$

۱-۲-۴ تعریف : معادله تابعی

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

را معادله کشی[۱] یا جمعی می نامیم و هر جواب این معادله را نگاشت جمعی[۲] می نامیم.

واضح است که تابع حقیقی $f(x)=cx$ که c عدد حقیقی ثابتی است ، یک جواب این معادله می باشد. معادله کشی مهمترین معادله در مطالعه پایداری معادلات تابعی می باشد و می توان گفت سابقه ای برابر سابقه ی مساله ی پایداری هایرز-اولام[۳] معادلات تابعی دارد و هر تحولی در رابطه با پایداری ، تقریبا" اولین ریشه در معادله فوق دارد.

۱-۲-۵ تعریف : فضای X را هاسدورف[۴] نامیم هر گاه به ازای هر $x,y\in X$ همسایگی های V,W به ترتیب شامل x,y چنان موجود باشند که $V\cap W=\phi$.

۱-۲-۶ تعریف : فضای X را موضعا" فشرده[۵] نامیم هر گاه هر نقطه از آن دارای همسایگی باز U باشد به طوری که بستار U (یا $\overline{U}$) فشرده باشد.

۱-۲-۷ تعریف : گوئیم A نقاط X را جدا می کند هر گاه به ازای هر $x_1,x_2\in X$ که $x_1\neq x_2$، $f\in A$ ای موجود باشد به طوری که:

$$f(x_1)\neq f(x_2).$$

تعریف ۱-۲-۸ : فضای برداری X فضای نرمدار خطی نامیده می شود هر گاه به ازای هر $x\in X$ یک عدد حقیقی غیرمنفی $\|x\|$ موجود باشد به طوری که

---

caushy equation [1]
additive mapping [2]
Hyers-Ulam [3]
Hausdorff [4]
locally compact [5]

$$1)\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|.$$
$$2)\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|.$$
$$3)\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0.$$

نامساوی مثلثی (۱) را می توان به فرم $\|x-y\| \le \|x-z\| + \|z-y\|$ نیز نوشت.

۱-۲-۹ **تعریف** : فضای باناخ یک فضای نرمدار خطی است هر گاه نسبت به نرم تعریف شده اش کامل باشد. به عبارت دیگر فضای نرمدار E را فضای باناخ نامیم هر گاه هر دنباله کشی در آن همگرا باشد.

۱-۲-۱۰ **تعریف** : ضرب داخلی روی فضای برداری مختلط H، نگاشتی همچون

$$\langle .,. \rangle : H \times H \to \mathbf{C}$$

است به گونه ای که به ازای هر x, y, z متعلق به H و هر λ متعلق به $\mathbf{C}$ داشته باشیم

$$1.\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}.$$
$$2.\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle.$$
$$3.\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle.$$
$$4.\langle x, x\rangle \ge 0, \qquad \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

فضای ضرب داخلی ، زوج $(H, \langle .,. \rangle)$ است که در آن H یک فضای برداری مختلط و $\langle .,. \rangle$ یک ضرب داخلی روی H است.

شرایط (۱) و (۲) و (۳) ایجاب می کنند که

$$\langle x, \lambda y + z\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle.$$

روی R^n نیز ضرب داخلی وجود دارد. هر گاه $\alpha = (x_1, x_2, \ldots.. x_n)$ و $\beta = (y_1, y_2, \ldots. y_n)$

آنگاه
$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_i x_i y_i .$$

۱-۲-۱۱ نامساوی کشی شوارتز: در فضای ضرب داخلی H داریم

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|.\|y\|, (x, y \in H).$$

۱-۲-۱۲ **تعریف** : دو عنصر x, y را در فضای ضرب داخلی H متعامد نامند هر گاه حاصلضرب داخلی آنها صفر باشد. زیر مجموعه S از H را مجموعه متعامد خوانند هر گاه بازای هر جفت عنصر متمایز x, y در S ، $\langle x, y \rangle = 0$.

۱-۲-۱۳ **تعریف** : اگر M یک زیر فضای H باشد ، زیر فضای متعامد $M^{\perp}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$M^{\perp} = \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in M\}.$$

۱-۲-۱۴ **قضیه** : اگر M یک زیر فضای بسته H باشد آنگاه نگاشت های خطی و منحصربفرد P, Q وجود دارند به طوری که P ، H را به روی M و Q ، H را به روی $M^{\perp}$ می نگارد و داریم

$$x = Px + Qx \qquad ,(x \in H).$$

علاوه بر این نگاشت های P, Q خصوصیات زیر را دارند:

اگر $x \in M$ ، $Qx = 0$ و $Px = x$.

اگر $x \in M^{\perp}$ ، $Qx = x$ و $Px = 0$.

به P, Q به ترتیب تصاویر متعامد[6] H بروی M و $M^{\perp}$ گوئیم.

---

[6] orthogonal projections

۱-۲-۱۵ تعریف : فضای ضرب داخلی H که نسبت به نرم القاء شده توسط ضرب داخلی یک فضای باناخ باشد ، فضای هیلبرت نامیده می شود.

۱-۲-۱۶ تعریف : دو فضای هیلبرت H_1 و H_2 را ایزومورفیک گویند هر گاه نگاشتی خطی و یک به یک مانند T از H_1 به H_2 وجود داشته باشد به طوری که حافظ ضرب داخلی نیزباشد. یعنی به ازای هر $x, y \in H_1$ ، داشته باشیم $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$.

در اینصورت T را یک ایزومورفیسم از فضای هیلبرت H_1 بروی H_2 می گویند.

۱-۲-۱۷ قضیه : هر گاه H فضای هیلبرت باشد به ازای هر $y \in H$ ، نگاشتهای

$$x \to \langle x, y\rangle \quad \text{و} \quad x \to \langle y, x\rangle \quad \text{و} \quad x \to \|x\|$$

توابع پیوسته ای در H هستند.

۱-۲-۱۸ تعریف: خانواده $\sum$ از زیر مجموعه های مجموعه ی X ، یک σ - جبر در X نامیده می شود هر گاه $\sum$ دارای خواص زیر باشد :

۱) $X \in \sum$.
۲) $A \in \sum \Rightarrow A^c \in \sum$.
۳) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n , A_n \in \sum , n = 1,2,\ldots \Rightarrow A \in \sum$.

۱-۲-۱۹ تعریف : اگر $\sum$ یک σ - جبردر X باشد، X را فضای اندازه پذیرمی نامیم.

۱-۲-۲۰ تعریف : اگر $(X, \sum)$ فضای اندازه پذیر، Y فضای توپولوژیکی و f نگاشتی از X بتوی Y باشد، آنگاه f اندازه پذیر نامیده می شود هر گاه به ازای هر

مجموعه ی باز V در Y، $f^{-1}(V)$ عضوی از $\sum$ باشد.

۱-۲-۲۱ تعریف : یک اندازه ی مثبت در یک فضای اندازه پذیر (X, Σ)،

نگاشتی مانند $\mu:\Sigma\to[0,\infty]$ است به طوری که برای حد اقل $A\in\Sigma$ ای،

$\mu(A)<\infty$ و هر گاه $\{A_i\}_{i\in N}$ خانواده ی شمارای دو به دو جدا از هم باشند آنگاه

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i).$$

۱-۲-۲۲ تعریف : اگر $0<p<\infty$ و f تابع مختلط اندازه پذیر روی X باشد فضای

کلاسیک $L^p(\mu)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$L^p(\mu)=\{f : \text{اندازه پذیر مختلط } f \text{ و } \|f\|_p<\infty\},$$

که در آن:

$$\|f\|_p=(\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}.$$

۱-۲-۲۳ تعریف : اگر X مجموعه ی دلخواه و $E\subset X$، اندازه ی شمارشی

μ روی مجموعه ی X را به صورت زیرتعریف می کنیم :

در صورتی که E مجموعه ی نا متناهی باشد $\mu(E)=\infty$ و اگر E مجموعه ی متناهی

باشد، $\mu(E)$ را تعداد اعضای E تعریف می کنیم.

۱-۲-۲۴ تعریف : فرض کنیم W زیر فضایی از V باشد فضای برداری $\frac{V}{W}$ فضای

خارج قسمتی V,W نامیده می شود در این صورت یک تبدیل خطی مانند T از V به

$\frac{V}{W}$ با ضابطه ی $T(\alpha)=\alpha+W$ وجود دارد.

باید در نظر داشت که در $\frac{V}{W}$ عملها را طوری تعریف می کنیم که تبدیل T خطی باشد .

فضای پوچ این تبدیل زیر فضای W می باشد. T را تبدیل خارج قسمت یا نگاشت خارج قسمت از V بروی $\frac{V}{W}$ می نامیم که با نرم معمولی

$$\|f+W\|=\inf\{\|f+h\|:h\in W\}$$

تعریف می شود.

۱-۲-۲۵ لم (لم اوریزون)[۷] : فرض کنیم X فضای هاسدورف موضعا" فشرده و V در X باز باشد ، و داشته باشیم $K \subset V$ که K فشرده است، آنگاه یک $f \in C_c(X)$ ای وجود دارد به طوری که $K < f < V$.

اثبات رجوع کنید به [۸] صفحه ۳۹.

۱-۲-۲۶ قضیه (نگاشت باز)[8] : فرض کنیم $\varphi \in H(\Omega)$ (یعنی φ روی ناحیه Ω تحلیلی باشد)، $z_0 \in \Omega$ و $\varphi'(z_0) \neq 0$. آنگاه Ω دارای یک همسایگی V از z_0 است به طوری که

۱. φ روی V یک به یک است.

۲. $W = \varphi(V)$ یک مجموعه باز است .

۳. هر گاه $\Psi : W \to V$ به صورت $\Psi(\varphi(z)) = z$ تعریف شود آنگاه $\Psi \in H(W)$.

اثبات : رجوع کنید به [۸] صفحه ۲۱۵.

۱-۲- ۲۷قضیه (صورت دیگر قضیه نگاشت باز) :هر گاه X و Y دو فضای

---

[7] Urysohn lemma
[8] open mapping theorem

باناخ و T یک عملگر خطی پیوسته از X به Y باشد ، آنگاه T یک نگاشت باز است.

۱-۲-۲۸ قضیه (نگار بسته)[9] : فرض کنیم

۱. X و Y دو F-فضا بوده ؛

۲. $\Lambda : X \to Y$ خطی باشد؛

۳. $G = \{(x, \Lambda x) : x \in X\}$ در $X \times Y$ بسته باشد.

در اینصورت Λ پیوسته می باشد.

اثبات رجوع کنید به آنالیز تابعی رودین صفحه ۴۶.

۱-۲-۲۹ قضیه (حالت خاص قضیه نگار بسته): هر گاه X و Y دو فضای باناخ و T یک عملگر خطی از X به Y باشد ، آنگاه T پیوسته است اگر و تنها اگر نگار مربوط به آن بسته باشد.

۱-۲-۳۰ قضیه (توسیع تیتز[10]**)** : فرض کنیم K زیر مجموعه ی فشرده ای از فضای هاسدورف و موضعا" فشرده ی X و $f \in C(K)$ باشد. آنگاه $F \in C_c(X)$ ای وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in K$ ، $F(x) = f(x)$.

اثبات: رجوع شود به [8] صفحه ۴۲۲.

۱-۲-۳۱ قضیه (قضیه یکتایی برای توابع تحلیلی)[11] : فرض کنیم g, f بر ناحیه باز S در C تحلیلی باشند. هر گاه $a \in S$ یک نقطه انباشتگی یکی از زیر مجموعه های S مانند K باشد ، و به ازای هر z در K ، $f(z) = g(z)$ ، آنگاه به ازای هر z در S $f(z) = g(z)$.

---

[9] closed graph theorem
[10] Tietz extension theorem
[11] uniqueness theorem for analytic functions

۱-۲-۳۲ تعریف : فرض کنیم G و H فضاهای هیلبرت با نرمهای $\|\cdot\|_G$ و $\|\cdot\|_H$ باشند، عملگر T از $D(T)\subset G$ به H عملگر بسته نامیده می شود هر گاه $\{(u,Tu):u\in D(T)\}$ یک زیر فضای بسته در فضای حاصلضربی و هیلبرت $G\times H$ باشد به عبارت دیگر اگر $u_n\in D(T)$ و $T(u_n)\in H$ به طوری که به ترتیب به $u_0\in G$ و $v_0\in H$ همگرا باشند آنگاه $u_0\in D(T)$ و $v_0=Tu_0$.

۱-۲-۳۳ تعریف : فرض کنیم T یک عملگر بسته از $D(T)\subset G$ به H باشد گوییم T از پایین کراندار است هر گاه ثابت مثبتی چون γ موجود باشد به طوری که:

$$\|Tv\|_H \geq \gamma\|v\|_G \qquad \forall v\in D(T)\,\mathrm{I}\,\ (\ker T)^{\perp}.$$

۱-۳ جبرهای یکنواخت[12]

۱-۳-۱ تعریف : فرض کنیم X فضای توپولوژیک فشرده باشد . مجموعه همه توابع پیوسته از X به میدان مختلط $\mathbf{C}$ را با $C(X)$ نشان می دهیم . برای هر $f\in C(X)$ تعریف می کنیم :

$$\|f\|=\sup\{|f(x)|:x\in X\}.$$

و اگر $K\subset X$ قرار می دهیم

$$\|f\|_K=\sup\{|f(x)|:x\in K\}.$$

۱-۳-۲ تعریف : گوئیم A یک جبر یکنواخت روی X است هر گاه :

۱) X یک فضای توپولوژیک فشرده باشد .

---

[12] uniform Algebra

۲) $A \subseteq C(X)$ و A نقاط X را جدا کند.

۳) $1 \in A$.

۴) A زیر جبر بسته ای از $C(X)$ باشد.

بنا به (۲) ، X فضای هاسدورف است.

۱-۳-۳ قضیه : هر گاه X فضای هاسدورف فشرده باشد ، آنگاه $C(X)$ یک جبر یکنواخت روی X خواهد بود.

اثبات رجوع کنید به [۱] صفحه ۳.

۱-۳-۴ تعریف : یک زیر مجموعه ی بسته ی F از X یک مجموعه ی قله ای برای A نامیده می شود هر گاه $f \in A$ ای موجود باشد به طوری که :

$$f(x)=1 \qquad \forall x \in F \quad , \quad |f(x)|<1 \qquad \forall x \in X \setminus F .$$

۱-۴ جبرگوی[13]

۱-۴-۱ قرارداد : فرض کنیم D گوی واحد باز فضای C^n باشد ، که n عدد صحیح مثبتی است . بستار و مرز D را به ترتیب با $\overline{D}$ و T نشان می دهیم.

۱-۴-۲ تعریف : جبر گوی $A(D)$ ، جبر یکنواخت همه توابع پیوسته روی $\overline{D}$ است که روی D تحلیلی هستند. هر گاه $n=1$ اختیار شود ، $A(D)$ را جبر دیسک[۱۴] خواهیم نامید.

۱-۵ فضاهای بازتابی

[13] ball algebra
[14] disc algebra