
بسم الله الرحمن الرحیم
الحمد لله رب العالمین الرحمن الرحیم مالک یوم الدین
ایاک نعبد وایاک نستعین اهدنا الصراط المستقیم
صراط الذین انعمت علیهم غیر المغضوب علیهم ولا الضالین

دانشگاه لرستان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

عنوان

نامساوی های اکید نوع سیمپسون و استروسکی

نگارش

آمنه گراوند

استاد راهنما

دکتر علی ثامری پور

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض

دی ماه ۱۳۹۲

فهرست مطالب

چکیده

نام خانوادگی: گراوند **نام:** آمنه

عنوان پایان‌نامه: نامساوی های اکید نوع سیمپسون و نوع استروسکی

استاد راهنما:دکتر علی ثامری پور

استاد مشاور: دکتر محمود شکوری

درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** آنالیز

محل تحصیل: دانشگاه لرستان **دانشکده:** علوم پایه

تاریخ فارغ التحصیلی: دی ماه ۱۳۹۲ تعداد صفحه: ۷۵

کلید واژه ها: فرمول مربعی، کران های صریح خطا ،نامساوی سیمپسون ،نامساوی استروسکی،انتگرال عددی

چکیده: در این پایان نامه پس از بیان مقدمه ای کوتاه در مورد نامساوی های مشهور سیمپسون و استروسکی، ابتدا نامساوی های اکید سیمپسون برای توابع پیوسته مطلق ، مشتق پذیر متعلق به $L_2(a,b)$ مطرح می شود،به این منظور به تعاریف و قضایای مقدماتی نیاز داریم که در فصل اول به آن ها می پردازیم، سپس در ادامه نامساوی اکید نوع استروسکی و کاربردهای آن برای قاعده سیمپسون و میانگین های خاص را بیان می کنیم،در نهایت تعمیم های جدید در مورد نامساوی های خاص نوع استروسکی را بررسی می کنیم.

پیش گفتار

در سال های اخیر شماری از مولفان نامساوی هایی را مورد بررسی قرار دادند که کران های صریح خطا را بر ای بعضی فرمول های مربعی به دست می آورند به عنوان مثال نامساوی سیمپسون که یک کران خطا برای قاعده معروف سیمپسون بدست می آورد مورد بررسی قرار می گیرد. در [۶ − ۱] نامساوی نوع سیمپسون مشاهده می شود، در [۱] نامساوی زیر را داریم:

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{۶}\left[f(a) + ۴f\left(\frac{a+b}{۲}\right) + f(b)\right]\right| \leq \frac{\Gamma-\gamma}{۱۲}(b-a)^{۲}$$

که Γ و γ اعدادی حقیقی می باشند ، به طوری که $\gamma \leq f'(t) \leq \Gamma$ و $t \in [a,b]$
نامساوی اول نوع گروس استروسکی [۱] در [۱۰ − ۷] مشاهده می شود که معروفترین نوع این نامساوی عبارت است از:

$$\left|(b-a)f(x) - \left(x - \frac{a+b}{۲}[f(b)-f(a)] - \int_a^b f(t)dt\right|\right. \leq \frac{\Gamma-\gamma}{۸}(b-a)^{۲}$$

در این رساله ، ابتدا نامساوی اکید نوع سیمپسون برای توابع پیوسته مطلق ، مشتق پذیر متعلق به $L_{۲}(a,b)$ مطرح می شود.
در مرحله دوم نامساوی اکید نوع استروسکی را بررسی می کنیم.
هدف اصلی در این پایان نامه ، بررسی دو نوع نامساوی مذکور است که کران های صریح خطا را برای بعضی فرمول های مربعی به دست می آورند.

---

[۱] Gruss-Ostrowski

این پایان نامه شامل چهار فصل است و مطالب هر فصل را به طور خلاصه بیان می کنیم، فصل اول به تعاریف مقدماتی مورد نیاز در سراسر پایان نامه اختصاص یافته است ، در فصل دوم نامساوی سیمپسون مورد بررسی قرار می گیرد ، در فصل سوم یک نامساوی نوع استروسکی و کاربردهای آن برای قاعده سیمپسون و میانگین های خاص بیان می شود، و سرانجام در فصل چهارم که فصل آخر پایان نامه می باشد ،تعمیم های جدید نامساوی های خاص نوع استروسکی بیان می شود.

در آخر ، واژه نامه ی انگلیسی به فارسی و کتاب نامه ی استفاده شده در این رساله درج شده است.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

مقدمه : در این فصل به بیان برخی از تعاریف و قضایای مقدماتی که در فصل های آینده مورد نیازند ، می پردازیم. این فصل شامل هفت بخش است که در آن به توابع مشتق پذیر، انتگرال ریمان، اندازه صفر ،توابع با تغییر کراندار ، توابع پیوسته مطلق ، توابع لیپ شیتس ، فضای نرم دار و L_p ،...و قضایای مربوط می پردازیم. اکثر مطالب این فصل از [۱۳-۱۲] انتخاب شده اند.

۱.۱ توابع مشتق پذیر

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم تابع f بر بازه $[a,b]$ تعریف شده باشد ، به ازای هر $x \in [a,b]$ تعریف می کنیم:

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \qquad (a < t < b, t \neq x),$$

مشروط بر آن که این حد وجود داشته باشد.

f' را مشتق f می نامیم که دامنه اش مجموعه x هایی است که در آن ها حد بالا وجود داشته باشد.

در تعریف مذکور می توان حدود سمت راست و سمت چپ را در نظر گرفت ، که این امر به تعریف مشتق های سمت راست و سمت چپ منجر می شود ولی به هر حال ، در جزییات مشتق های یک طرفه وارد نخواهیم شد.

قضیه ۱.۱.۱. فرض f بر $[a,b]$ تعریف شده باشد ، هرگاه f در نقطه $x \in [a,b]$ مشتق پذیر باشد ، f در x پیوسته است.

و عکس این قضیه درست نیست، به عنوان مثال تا بع $f(x) = |x|$ در نقطه $x = ۰$ پیوسته است، ولی در این نقطه مشتق پذیر نیست.

قضیه ۲.۱.۱. فرض کنیم fوg بر $[a,b]$ تعریف شده و در نقطه ی $x \in [a,b]$ مشتق پذیر باشند ، در این صورت ، $f+g$ ،fg ،و $\frac{f}{g}$ در x مشتق پذیرند، و

(a)

$$;(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

(b)

$$;(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(c)

$$.(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^{۲}(x)}$$

البته ، در قسمت (c) فرض می کنیم $g(x) \neq ۰$.

قضیه ۳.۱.۱. هرگاه f یک تابع پیوسته حقیقی بر بازه $[a,b]$ باشد که در (a,b) مشتق پذیر است ، آن گاه نقطه ای مانند $x \in (a,b)$ هست که در آن

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

قضیه ۴.۱.۱. فرض کنیم f در (a,b) مشتق پذیر باشد.

(a) هرگاه به ازای هر $x \in (a,b)$ ، $f'(x) \geq ۰$ ، آن گاه f صعودی است .

(b) هرگاه به ازای هر $x \in (a,b)$ ، $f'(x) = ۰$ ، آن گاه f ثابت است.

(c) هرگاه به ازای هر $x \in (a,b)$ ، $f'(x) \leq ۰$ ،آن گاه f نزولی خواهد بود.

تعریف ۲.۱.۱. هرگاه f بر بازه ای مشتق داشته و f' خود مشتق پذیر باشد، مشتق f' را با f'' نشان داده آن را مشتق دوم f می نامیم ، با ادامه این کار ، تابع های

$$f, f', f'', f^{(۳)}, \cdots, f^{(n)}$$

را خواهیم داشت که هر یک مشتق تابع پیش از خود است ، $f^{(n)}$ مشتق مرتبه n ، f نامیده شده است

تذکر ۱.۱.۱. برای آن که $f^{(n)}(x)$ در x وجود داشته باشد باید $f^{(n-۱)}(t)$ در یکی از همسایگی های x (یا ، اگر x یک نقطه انتهایی بازه ای باشد که f بر آن تعریف شده ، در یکی از همسایگی های یک طرفه x) وجود داشته و $f^{(n-۱)}$ در x مشتق پذیر باشد.

قضیه ۵.۱.۱. فرض کنیم f یک تابع حقیقی بر $[a,b]$ بوده ، n عدد صحیح مثبتی باشد ، $f^{(n-۱)}$ بر $[a,b]$ پیوسته باشد ، و $f^{(n)}(t)$ به ازای هر $t \in (a,b)$ وجود داشته باشد . α و β را نقاط متمایزی از $[a,b]$ در نظر گرفته ، تعریف می کنیم :

$$P(t) = \sum_{k=۰}^{n-۱} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t-\alpha)^k. \qquad (۱)$$

در این صورت ، نقطه ای مانند x بین α و β هست به طوری که :

$$f(\beta) = p(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta-\alpha)^n. \qquad (۲)$$

نتیجه ۱.۱.۱. قضیه تیلور در حالت کلی ،نشان می دهد که f را می توان با یک چندجمله ای درجه $n-1$ تقریب کرد ، و با دانستن کران های $|f^{(n)}(x)|$ می توان خطا را به وسیله رابطه (۲) تخمین زد، واین قضیه به ازای $n=1$ همان قضیه مقدار میانگین است.

۲.۱ انتگرال ریمان

تعریف ۱.۲.۱. بازه بسته و فشرده $[a,b]$ را در نظر بگیرید ، مجموعه $P\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ را که در آن $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ است را یک افراز $[a,b]$ می نامیم،و مجموعه تمام افرازهای $[a,b]$ را با $P[a,b]$ نمایش می دهیم.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم f یک تابع حقیقی و کراندار باشد که بر $[a,b]$ تعریف شده است . به ازای هر افراز p از $[a,b]$ ، قرار می دهیم

$$M_i = sup f(x) \qquad (x_{i-1} \leq x \leq x_i),$$
$$m_i = inf f(x) \qquad (x_{i-1} \leq x \leq x_i),$$

$$U(p,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

$$L(p,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

و، بالاخره

$$\overline{\int_a^b} f dx = inf U(p,f), \tag{1}$$

$$\underline{\int_a^b} f dx = sup L(p,f), \tag{2}$$

که در آن ها inf و sup روی تمام افرازهای p از $[a,b]$ گرفته شده اند. هرگاه انتگرال های بالایی و پایینی

مساوی باشند ، می گوییم f بر $[a,b]$ ریمان انتگرال پذیر است ، می نویسیم $f \in R$ ، و مقدار مشترک (۱) و (۲) را با

$$\int_a^b f dx \tag{۳}$$

یا با

$$\int_a^b f(x) dx \tag{۴}$$

نشان می دهیم.

۳.۱ اندازه صفر

تعریف ۱.۳.۱. مجموعه S از اعداد حقیقی دارای اندازه صفر است هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ یک پوشش شمارش پذیر از بازه های باز وجود داشته باشد که مجموع طول های آن ها از ϵ کوچکتر باشد، اگر این بازه ها را با (a_k, b_k) نشان دهیم ،باید داشته باشیم:

$$S \subset \bigcup_k (a_k, b_k) \qquad , \qquad \sum_k (b_k - a_k) < \epsilon$$

و k می تواند روی یک مجموعه متناهی یا نامتناهی شمارش پذیر تغییر کند.

قضیه ۱.۳.۱. اگر F دسته ای شمارش پذیر از مجموعه هایی در $\mathbb{R}$ به عنوان مثال به صورت $F = \{F_1, F_2, \cdots,\}$ باشد که هر کدام دارای اندازه صفر هستند ،در این صورت اجتماع آن ها یعنی

$$S = \cup_{k=1}^{\infty} F_k$$

نیز دارای اندازه صفر خواهد بود.

نتیجه ۱.۳.۱. تک نقطه ای ها دارای اندازه صفر هستند.

نتیجه ۲.۳.۱. مجموعه های متناهی دارای اندازه صفر هستند.

نتیجه ۳.۳.۱. مجموعه های شمارش پذیر دارای اندازه صفر هستند.

نتیجه ۴.۳.۱. مجموعه ناشمارایی که اندازه آن صفر است مجموعه کانتور می باشد.

قضیه ۲.۳.۱. (محک لبگ برای وجود انتگرال ریمان) فرض کنیم f بر بازه $[a, b]$ تعریف شده وکراندار باشد و مجموعه D مجموعه نقاط ناپیوستگی های f در $[a, b]$ باشد، در این صورت $f \in R$ روی $[a, b]$ ، اگر و تنها اگر مجموعه D دارای اندازه صفر باشد.

نتیجه ۵.۳.۱. اگر $f \in R$ روی $[a, b]$ آن گاه f^{2} و $|f|$ نیز روی $[a, b]$ انتگرال پذیرند.

اثبات. مجموعه نقاط ناپیوستگی f^{2} و $|f|$ زیر مجموعه نقاط ناپیوستگی f است ، بنابراین اندازه آن صفر ، وبنا به محک لبگ انتگرال پذیر است.

مثال ۱.۳.۱. تابع زیر روی $[0, 1]$ انتگرال پذیر ریمان است،

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in P \\ 0 & x \in [0, 1] - P \end{cases} \qquad \text{(p) مجموعه کانتور}$$

تابع فوق در نقاط P که مجموعه کانتور می باشد ناپیوسته است، و اندازه مجموعه P ، صفر است بنابراین ، بنا به محک لبگ $f \in R$ روی $[a, b]$.

نکته: اگر f پیوسته و g روی $[a, b]$ انتگرال پذیر باشد آن گاه $fog \in R$ روی $[a, b]$.

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید S یک زیر مجموعه $\mathbb{R}$ باشد اگر همه ی نقاط S به جزء نقاط زیر مجموعه ای از آن که دارای اندازه صفر است ، دارای خاصیتی باشند ،گوییم آن خاصیت تقریبا همه جا بر S برقرار است.

قضیه ۳.۳.۱. هر تابع کراندار بر بازه $[a,b]$، فقط وفقط وقتی انتگرال ریمان دارد که f تقریبا همه جا بر $[a,b]$ پیوسته باشد.

قضیه ۴.۳.۱. (قضیه اساسی حساب دیفرانسیل وانتگرال) هرگاه $f \in R$ بر $[a,b]$ ، و تابع مشتق پذیر F بر $[a,b]$ چنان باشد که $F' = f$ ، آن گاه :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

قضیه ۵.۳.۱. فرض کنیم F و G توابع مشتق پذیری بر $[a,b]$ باشند ، $F' = f \in R$ و $G' = g \in R.$ در این صورت ،

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

اثبات. قرار می دهیم $H(x) = F(x)G(x)$ ، و قضیه قبل (قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال) را در مورد H و مشتق آن به کار می بریم.

۴.۱ تابع های با تغییر کراندار

تعریف ۱.۴.۱. تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ را با تغییر کراندار گوییم هرگاه به ازای هر افراز دلخواه $P = \{x_k\}_{k=۰}^{n}$، عدد مثبتی مانند M موجود باشد به طوری که

$$\sum_{k=۱}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-۱})| \leq M$$

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنیم f بر بازه $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد آن گاه متناظر با افراز $P = \{x_۰, x_۱, \cdots, x_n\}$ از $[a, b]$ قرار می دهیم:

$$\sum_{k=۱}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-۱})| = \sum P$$

حال تعریف می کنیم :

$$V_f[a, b] = sup \left\{ \sum p | p \in P[a, b] \right\}$$

وآن را تغییر کل f بر بازه $[a, b]$ می نامیم .

قضیه ۱.۴.۱. هرگاه تابع f بر $[a, b]$ یکنوا باشد ، آن گاه تابع f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار است .

اثبات. فرض کنیم f صعودی باشد ، در این صورت برای هر افراز دلخواه $[a, b]$، با توجه به این که $f(x_k) - f(x_{k-۱}) \geq ۰$ داریم:

$$\sum_{k=۱}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-۱})| = \sum_{k=۱}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-۱})) = f(b) - f(a)$$

(در حالت نزولی $-f$ را در نظر می گیریم)

مثال ۱.۴.۱. توابع $\sqrt{x}$ و $۲x + ۱$ بر بازه $[۰, ۱]$ با تغییر کراندار هستند (با توجه به قضیه بالا و اینکه توابع مذکور بر بازه $[a, b]$ صعودی اند).

قضیه ۲.۴.۱. اگر تابع f بر بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد و f' بر بازه باز (a,b) موجود و کراندار باشد یعنی عدد مثبتی مانند M موجود باشد به طوری که برای هر $x \in (a,b)$، $|f'(x)| \leq M$ باشد آن گاه f بر بازه $[a,b]$ با تغییر کراندار است .

اثبات. فرض کنیم $P = \{x_k\}_{k=۰}^{n}$ یک افراز دلخواه از $[a,b]$ باشد ، بنا بر قضیه مقدار میانگین عدد حقیقی $u_k \in (x_{k-۱}, x_k)$ موجود است به طوری که :

$$f(x_k) - f(x_{k-۱}) = f'(u_k)(x_k - x_{k-۱})$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{k=۱}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-۱})| &= \sum_{k=۱}^{n} |f'(u_k)(x_k - x_{k-۱})| \\ &\leq M \sum_{k=۱}^{n} (x_k - x_{k-۱}) \\ &= M(b-a)\end{aligned}$$

یعنی f بر $[a,b]$ با تغییر کراندار است .

قضیه ۳.۴.۱. فرض کنیم دو تابع f و g بر بازه بسته $[a,b]$ با تغییر کراندار باشند ، در این صورت مجموع ، تفاضل و حاصل ضرب آن ها نیز با تغییر کراندارند و داریم :

$$V_{f\pm g} \leq V_f \pm V_g \qquad \text{و} \qquad V_{f.g} \leq AV_f + BV_g$$

قضیه ۴.۴.۱. f بر بازه $[a,b]$ با تغییر کراندار است اگر وتنها اگر f بر $[a,c]$ و $[c,b]$ با تغییر کراندار باشد که در آن $c \in (a,b)$

نکته ۱.۱.۱. اگر f بر $[a,b]$ با تغییر کراندار باشد و $c \in (a,b)$ در این صورت داریم:

$$V_f[a,b] = V_f[a,c] + V_f[c,b]$$

و اگر $\alpha \in \mathbb{R}$ آن گاه αf نیز با تغییر کراندار است و

$$V_{\alpha f}[a,b] = |\alpha| V_f[a,b].$$

نکته.۱.۱.۲. هرگاه f بر $[a,b]$ با تغییر کراندار باشد، آن گاه $|f|$ نیز بر $[a,b]$ با تغییر کراندار است ولی عکس نکته بالا برقرار نیست به عنوان مثال تابع

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & \text{گویا } x \\ -۱ & \text{گنگ } x \end{cases}$$

با تغییر کراندار نیست ولی $|f(x)| = ۱$ با تغییر کراندار است چون تابع ثابت است .

قضیه ۱.۴.۵. هر گاه f بر $[a,b]$ با تغییر کراندار باشد آن گاه $f \in R$ روی $[a,b]$.

اثبات. هر تابع با تغییر کراندار را به صورت تفاضل دو تابع صعودی می نویسیم ، هر تابع صعودی هم نقاط ناپیوستگی اش حداکثر شمارش پذیر است ،بنابراین اندازه مجموعه نقاط ناپیوستگی اش صفر می شود و بنا به محک لبگ انتگرال پذیر است .

۵.۱ تابع های پیوسته مطلق

تعریف ۱.۵.۱. تابع حقیقی f را بر بازه بسته $[a,b]$ پیوسته مطلق [۱] می نامیم در صورتی که برای هر $\epsilon > ۰$ ، δ مثبتی موجود باشد به طوری که اگر برای هر زیر بازه ی باز جدا از هم $[a,b]$ داشته باشیم ؛

$$\sum_{k=۱}^{n} |b_k - a_k| < \delta$$

آن گاه :

$$\sum_{k=۱}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$$

قضیه ۱.۵.۱. هر تابع پیوسته مطلق بر $[a,b]$ بر این بازه ، پیوسته و با تغییر کراندار است .

اثبات. اولا پیوستگی آن به وضوح برقرار است زیرا به ازای x و y های مرتبط به δ نظیر ϵ می توان بازه (x,y) در نظر گرفت . از طرفی با توجه به تعریف پیوستگی مطلق δ را متناظر با $\epsilon = ۱$ اختیار می کنیم . در این صورت هر تقسیم جزیی $[a,b]$ را می توان به K دسته مجزا از فاصله ها بخش کرد (در صورت لزوم با افزودن نقاط جدید) که طول کلی هر یک ، از δ کوچکتر باشد که در آن $K = \left[\dfrac{b-a}{\delta}\right] + ۱$ است . پس :

$$\sum_{i=۱}^{n} |f(x_i)-f(x_{i-۱})| = \sum_{i=۱}^{n} ۱|f(x_i)-f(x_{i-۱})|+\cdots+\sum_{i=۱}^{n} k|f(x_i)-f(x_{i-۱})| \leq ۱+\cdots+۱ = K$$

نکته ۱.۵.۱. تابعی که پیوسته و با تغییر کراندار باشد لزوما پیوسته مطلق نیست.

تعریف ۲.۵.۱. تابع f روی یک فاصله در شرط لیپ شیتس [۲] (از مرتبه یک) صدق می کند هر گاه عدد ثابت M موجود باشد به طوری که برای همه ی مقدارهای x,y از این فاصله داشته باشیم :

$$|f(y) - f(x)| \leq M|x-y|$$

[۱] absolutely continuous

[۲] Lipschitzian

قضیه ۱.۵.۲. هر تابع که در شرط لیپ شیتس صدق کند پیوسته مطلق است.

نتیجه ۱.۲.۱ . هر تابع که در شرط لیپ شیتس صدق کند با تغییر کراندار است.

نکته ۱.۵.۲ . عکس نتیجه بالا الزاما برقرار نیست.

مثال ۱.۵.۱. تابع

$$f(x) = \begin{cases} ۲x & x \geq ۱ \\ x^۲ & x < ۱ \end{cases}$$

در بازه $[-۲, ۲]$ با تغییر کراندار است چون در بازه های $[-۲, ۱]$ و $[۱, ۲]$ دارای مشتق کراندار است . ولی چون $f(x)$ در نقطه $x = ۱$ پیوسته نیست در شرط لیپ شیتس صدق نمی کند.

۶.۱ فضای نرم دار

تعریف ۱.۶.۱. یک فضای برداری X را فضای نرم دار گوییم هرگاه برای $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی $\|x\|$ موسوم به نرم x با ویژگی های زیر نسبت داده شود.

۱) به ازای هر $x, y \in X$ $\qquad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

۲) به ازای هر $x \in X, \alpha \in F$ $\qquad \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

۳) هرگاه $x \neq ۰$ آن گاه $\|x\| > ۰$ و اگر $x = ۰$ آن گاه $\|x\| = ۰$

۷.۱ فضای L_p

فضاهای L_p دسته ای خاص از فضاهای باناخ هستند، این فضاها شامل توابعی هستند که نرم آن ها بر حسب انتگرال تعریف می شود.