بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز

توابع شکاف و کاربردهای آن در نابرابری‌های تغییراتی برداری

استاد راهنما:

دکتر جعفر زعفرانی

استاد مشاور:

دکتر مجید فخار

پژوهشگر:

فهیمه السادات میردامادی

دی ماه 1388

کلیه حقوق مادی مرتبط بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه اصفهان است.

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز خانم فهیمه السادات میردامادی

تحت عنوان:

توابع شکاف و کاربردهای آن در مسائل نابرابری تغییراتی برداری

در تاریخ ... ۸۸/۱۰/۲۸..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ....عالی.......... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر جعفر زعفرانی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۲- استاد مشاور پایان نامه	دکتر مجید فخار	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه	دکتر محبوبه رضایی	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۴- استاد داور خارج گروه	دکتر طوبی جبروتیان	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

تقدیم به

صاحبان حق

همه ی کسانی که تا آخرین لحظه ی زندگی چون رود خروشان در مسیر دانستن جاریند

تقدیم به

پدرم و مادرم

که با گفته های ادراک و عاطفه، مجمر جانم را همواره همنشین شمیم ذوق آن تعبیر جاوید ساختند که فرمود:

عقل گوید شش جهت حد است و بیرون راه نیست

عشق گوید راه است و رفته ام من بارها

و خواهر و برادرانم

و تقدیم به همه ی کسانی که دوستشان دارم

سپاس و ستایش آن حی توانا را که وصفش فراتر از سطح عالی لغات است و غواص خرد بازیچه ی کوچکترین دریای عظمتش می گردد. سپاس خدایی را که نعمت تفکر و اندیشه را به ما ارزانی داشت. سپاس خدایی را که درهای دانش را با سرانگشت پروردگاریش به انسان ها گشود. سپاس خدایی را که شکرگذاری نعمت هایش را به انسان ها آموخت.

دستان مهربان دو فرشته ی زندگانیم را می بوسم. هر نفسم منت پذیر دم قدسی پدر و مادری اندیشمند و فداکار است. آن دو سروش ایزدی را که پیش از هر حرف، به من «بسم الله» آموختند می ستایم.

راهنمایی ها و دلسوزی های بی شائبه ی یگانه استاد بسیار ارجمندم جناب آقای دکتر جعفر زعفرانی که با وجودی آراسته به گوهر انسانیت، انگیزه ی این پژوهش را در من ایجاد نموده و در تمامی مراحل پژوهش، از ابتدا تا انتها، با روشنفکری های اندیشمندانه ی خود مرا مورد لطف و عنایت قرار داده و مشوق اصلی من در امر تحصیل بودند، از چنان غنایی برخوردار است که هیچ قلمی را توان و یارای تقدیر و تشکر نمی باشد. امید آن دارم که این دانشمند فرزانه صمیمانه ترین مراتب قدردانی ام را با خلوص همیشگی شان پذیرا باشند.

از جناب آقای دکتر مجید فخار، استاد مشاور عزیز و دانشمند همراه و همدل این پایان نامه که به عنوان مرجع علمی و اخلاقی در مراحل مختلف تحصیل راهنمای من بودند، بی پایان سپاسگزارم.

همچنین از راهنمایی ها و پیشنهادهای سازنده ی استادان داور این پایان نامه، سرکار خانم دکتر محبوبه رضایی که صمیمانه مثل همیشه لطفشان شامل حال بنده بوده و سرکار خانم دکتر طوبی جبروتیان که قبول زحمت نموده و در جلسه ی دفاعیه ی اینجانب شرکت نمودند، قدردانی می نمایم.

و در پایان از زحمات سرکار خانم ها گرامی، غازی، فرهمند و معاریه پاس زحماتشان در دوران تحصیل و نیز در تدوین این پایان نامه و نیز تمام دوستان همدل و مهربانم سپاسگزارم

چکیده

مسئله‌ی نابرابری تغییراتی با نگاشت‌های مجموعه–مقدار در اقتصاد و بهینه سازی بسیار سودمند است. توابع شکاف نقش مهمی در تبدیل کردن یک مسئله‌ی نابرابری تغییراتی به یک مسئله‌ی بهینه سازی بازی می‌کنند. سپس الگوریتم‌ها و روش‌های حل یک مسئله‌ی بهینه سازی می‌توانند برای پیدا کردن جواب یک نابرابری تغییراتی به کار روند. در این پایان نامه ابتدا توابع شکاف برای نابرابری‌های تغییراتی را به یک نگاشت مجموعه–مقدار برای نابرابری‌های تغییراتی برداری تعمیم می‌دهیم. یک مسئله‌ی جالب آنست که مسئله‌ی بهینه سازی فرمول بندی شده با استفاده از توابع شکاف می‌تواند به مسئله‌ی برنامه ریزی نیم–نامتناهی تبدیل شود. پس یک روش حل برای نابرابری تغییراتی برداری با نگاشت‌های مجموعه–مقدار از طریق مسئله‌های برنامه ریزی نیم–نامتناهی به دست می‌آید. ما توابع شکاف را برای چندین نوع نابرابری پیش تغییراتی و نیز یک کلاس جدید از نابرابری‌های تغییراتی برداری تعمیم یافته با نگاشت‌های نقطه–به–مجموعه معرفی کرده و نشان می‌دهیم که توابع شکاف اسلندر که برای تبدیل نابرابری‌های تغییراتی به یک مسئله‌ی مینیمم سازی هم ارز به کار می‌رود، مشتق پذیر در حالت تعمیم یافته است و یک مشتق ضمنی پایین تحت شرایط مناسب دارد. در ادامه توابع شکاف را برای دو کلاس از مسئله‌های شبه تعادلی برداری و نیز برای چندین نوع از مسئله-های تعادلی برداری بررسی کرده و در پایان مشتقات جهتی کلارک–راکفلر توابع شکاف منظم را برای مسئله‌ی نابرابری تغییراتی تعریف شده به وسیله‌ی یک تابع موضعاً لیپ شیتز مطالعه و یک راه جدید برای قضیه‌ی دوگان در مسئله‌های بهینه سازی برداری خطی ارائه می‌دهیم.

واژه های کلیدی: تابع شکاف، مسئله‌ی بهینه سازی، نابرابری‌های تغییراتی.

فهرست مطالب

پیشگفتار

در سال ۱۹۹۴، بلام [۱] و اتلی [۲] مسئله‌ی تعادلی اسکالر (EP) را معرفی و مطالعه کردند که شامل حالات خاصی است. برای مثال، شامل نگاشت‌های نقطه—به—مجموعه، نابرابری‌های تغییراتی، مسئله‌های متمم و نیز مسئله‌های بهینه‌سازی و کنترل است. از طرف دیگر، در سال ۱۹۸۰، جیانسی [۳] نابرابری‌های تغییراتی برداری را در یک فضای دکارتی متناهی البعد معرفی کرد که یک تعمیم از نابرابری‌های تغییراتی اسکالر به حالت برداری است. سپس ریاضیدانان زیادی نابرابری‌های تغییراتی برداری، مسئله‌های متمم برداری و مسئله‌های تعادلی برداری با مخروط‌های ثابت یا متحرک را در فضاهای متناهی البعد و فضاهای مجرد نامتناهی البعد بررسی کردند.

توابع شکاف نقش مهمی در تبدیل کردن یک مسئله‌ی نابرابری تغییراتی به یک مسئله‌ی بهینه سازی بازی می‌کنند. سپس الگوریتم‌ها و روش‌های حل در مسئله‌های بهینه سازی می‌توانند برای پیدا کردن جواب‌های نابرابری‌های تغییراتی به کار روند. در سال ۲۰۰۲ یانگ و یائو توابع شکاف را معرفی کردند و شرایط لازم و کافی را برای وجود جواب نابرابری‌های تغییراتی برداری (VVI) با نگاشت‌های مجموعه—مقدار ایجاد کردند. آنها همچنین وجود جواب برای VVI تعمیم یافته با نگاشت‌های مجموعه—مقدار را به وسیله‌ی خاصیت وجود جواب برای VVI با یک

[۱] Blum

[۲] Oettli

[۳] Giannessi

تابع تک—مقداری و نیز یک قضیه‌ی انتخاب پیوسته بررسی کردند. در سال ۲۰۰۳، مسترونی [۴] تابع شکاف را برای مطالعه‌ی EP توسیع داد. در سال ۲۰۰۷، هانگ [۵] و یائو [۶] به وسیله‌ی خاصیت تابع اسکالر غیر خطی معرفی شده به وسیله‌ی چن [۷]، یانگ [۸] و یو [۹]، یک تابع شکاف برای یک دستگاه از مسئله‌های تعادلی برداری $(SVEP)$ معرفی و شرایط لازم و کافی برای وجود جواب $(SVEP)$ را بنانهادند.

نظر به اهمیت موضوع، این پایان نامه در ۱۰ فصل گردآوری شده است:

در فصل اول به بیان تعاریف و مفاهیم و بعضی قضایا و نتایج مقدماتی و کلیدی می‌پردازیم.

در فصل دوم توابع شکاف برای نابرابری‌های تغییراتی را به یک نگاشت مجموعه—مقدار برای VVI، از دو طریق تعمیم می‌دهیم: یکی تعمیم توابع شکاف اسلندر[۱۰] و دیگری تعمیم توابع شکاف جیانسی. توابع شکاف را برای دوگان VVI معرفی کرده و معنای آ ن را در ارتباط با نابرابری یانگ تعمیم یافته، ناشی از تئوری دوگان مزدوج فنچل تفسیر می‌کنیم. همچنین تحدب و مشتق پذیری تابع شکاف را بررسی می‌کنیم. در ادامه به‌وسیله‌ی دوگان مسئله‌ی بهینه‌سازی فنچل نشان می‌دهیم

---

[۴] Mastroeni

[۵] Huang

[۶] Yao

[۷] Chen

[۸] Yang

[۹] Yu

[۱۰] Auslender

که توابع شکاف برای مسئله‌ی اولیه و دوگان وابسته هستند. بالاخره، نشان می‌دهیم که توابع شکاف جفت اولیه—دوگان نابرابری تغییراتی متناظر با جفت اولیه—دوگان مسائل بهینه‌سازی فنچل است.

در فصل سوم وجود جواب و روش‌های فرمول بندی شده‌ی حل را برای نابرابری‌های تغییراتی برداری (VVI) با نگاشت‌های مجموعه—مقدار را مطالعه می‌کنیم.توابع شکاف را معرفی و شرایط لازم و کافی را برای وجود جواب VVI می‌سازیم. نشان داده شده است که مسئله‌ی بهینه‌سازی فرمول بندی شده با استفاده از توابع شکاف می‌تواند به مسئله‌ی برنامه ریزی نیم—نامتناهی تبدیل شود. همچنین وجود جواب برای VVI تعمیم یافته با یک نگاشت مجموعه—مقدار را به وسیله‌ی خاصیت وجود جواب VVI با یک تابع تک—مقداری و نیز قضیه‌ی انتخاب پیوسته بررسی می‌کنیم.

در فصل چهارم توابع شکاف برای چندین نوع نابرابری پیش تغییراتی بررسی شده است. به ویژه، نابرابری‌های پیش تغییراتی، نابرابری‌های پیش تغییراتی گسترش یافته و نابرابری‌های پیش تغییراتی ضعیف—برداری گسترش یافته مطرح شده اند. به علاوه، یک کلاس از توابع شکاف برای نابرابری پیش تغییراتی مقید بررسی شده است.

در فصل پنجم توابع شکاف برای یک کلاس جدید از نابرابری‌های تغییراتی برداری تعمیم یافته با نگاشت‌های نقطه—به—مجموعه ($GVVI$) معرفی شده و شرایط لازم و کافی برای $GVVI$ بنا نهاده شده است. برای وجود جواب $GVVI$ مفهوم $C(x)-h-\eta$—یکنوانمایی را معرفی می‌کنیم. نظر به وجود جواب برای نابرابری‌های تغییراتی برداری (VVI) با یک تابع تک—مقداری و نیز یک قضیه‌ی گزینش پیوسته،

قضیه‌ی وجود برای $GVVI$ را تحت فرض $C(x)$-h-η-یکنوانمایی به دست می آوریم.

در فصل ششم نشان می‌دهیم که توابع شکاف اسلندر که برای تبدیل نابرابری‌های تغییراتی به یک مسئله‌ی مینیمم‌سازی هم‌ارز به کار می‌رود، مشتق پذیر در حالت تعمیم یافته است و یک مشتق ضمنی پایین تحت شرایط مناسب دارد. این کار، ما را توانا می‌سازد که شرایط لازم و کافی را برای وجود یک جواب برای مسئله‌های نابرابری تغییراتی ایجاد کنیم.

در فصل هفتم با مسئله‌های شبه—تعادلی سر و کار داریم. با توجه به خاصیت یک تابع اسکالر غیرخطی، توابع شکاف برای دو کلاس از مسئله‌های شبه تعادلی برداری تعمیم یافته به دست می آید. سپس از یک قضیه‌ی وجود، برای یک مسئله‌ی شبه تعادلی تعمیم یافته، و نیز یک نابرابری مینیماکس، قضیه‌های وجود برای دو کلاس از مسئله‌های شبه تعادلی برداری تعمیم یافته بنا نهاده می‌شود.

در فصل هشتم مفهوم توابع شکاف از حالت اسکالر به برداری توسیع یافته است. سپس، توابع شکاف و توابع شکاف تعمیم یافته برای چندین نوع از مسئله‌های تعادلی برداری نشان داده شده و برخی شرایط لازم و کافی برای دستگاه مسئله‌های تعادلی برداری ایجاد شده است. به عنوان یک کاربرد، مسئله‌ی دوگان یک کلاس از مسئله‌های بهینه‌سازی با یک دستگاه از قیود تعادل برداری (OP) بنانهاده شده است. تقعر تابع دوگان، دوگان ضعیف (OP)

و شرط کافی نقطه زینی با استفاده از توابع شکاف نتیجه گرفته شده است. به علاوه، برخی نتایج وجود جواب برای دستگاه مسئله‌های تعادلی برداری اثبات شده‌اند.

در فصل نهم مشتقات جهتی کلارک[۱۱]—راکفلر[۱۲] توابع شکاف منظم (و برخی اصلاحات دیگر) را برای مسئله‌ی نابرابری تغییراتی (VIP) تعریف شده به وسیله‌ی یک تابع موضعاً لیپ شیتز مطالعه می‌کنیم. چنین توابعی روی یک مجموعه‌ی محدب بسته در یک فضای اقلیدسی لازم نیست مشتق پذیر باشند. به عنوان کاربرد، نشان می‌دهیم که توابع شکاف منظم، تحت فرض قوی—یکنوایی، کران‌های خطا با مولفه‌ی کسری دارند و بنابراین دنباله‌های تولید شده به وسیله‌ی الگوریتم نوع ارمیجو [۱۳]، همگرا به جواب (VIP) هستند.

در فصل دهم با استفاده از یک تابع ارزشی دوگان مجموعه—مقدار، یک راه جدید برای قضیه‌ی دوگان در مسئله‌های بهینه سازی برداری ارائه می‌دهیم. ما قضیه را با توجه به حالت اسکالر کامل می‌کنیم. به ویژه، در مقایسه با نتایج شناخته شده، از پیدایش یک دوگان شکاف در حالت $b = 0$ اجتناب می‌کنیم.

---

[۱۱] Clarke

[۱۲] Rockafellar

[۱۳] Armijo

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

با توجه به اینکه تمام اجزای تشکیل دهنده‌ی ساختمان ریاضیات به هم مربوط می‌باشند، لذا برای تشریح هر قسمت از آن نیازمند به بیان مطالبی مقدماتی می‌باشیم. بر همین اصل لازم دیدیم برای کامل تر بودن پایان نامه، این فصل را که متشکل از تعاریف و قضایای اولیه می‌باشد اضافه نماییم. ضمن آنکه، آن دسته از مفاهیم اولیه را که مجرد و فقط وابسته به فصل یا بخش خاصی از این پایان نامه هستند را در ابتدای همان فصل یا بخش آورده ایم. لازم به ذکر است که در این فصل از منابع [۳۲، ۱۸، ۱۴، ۵، ۳۴، ۴۴، ۳۵، ۳۳، ٦] استفاده شده است.

در این فصل فرض می‌کنیم X, Z فضاهای برداری باشند.

تعریف ۱.۱ . $A \subseteq X$ را یک مجموعه‌ی محدب می‌نامیم، اگر برای هر $x, y \in A$ و $\lambda \in [۰, ۱]$ داشته باشیم

$$\lambda x + (۱ - \lambda)y \in A.$$

تعریف ۲.۱ . فرض کنیم $A \subseteq X$، در این صورت کوچک ترین مجموعه‌ی محدب شامل A را غلاف محدب A گوئیم و با coA نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۱ . $A \subseteq X$ را مخروط می‌نامیم، اگر برای هر $\lambda \geq ۰$ داشته باشیم، $\lambda A \subseteq A$.

تعریف ۴.۱ . فرض کنیم $A \subseteq X$. در این صورت اشتراک همه‌ی مخروط های شامل A را غلاف مخروط A گوییم و با $cone(A)$ نمایش می‌دهیم.

لم ۵.۱ . $A \subseteq X$ یک مخروط محدب است، اگر وتنها اگر A نسبت به جمع و ضرب اسکالر بسته باشد.

اثبات . رجوع کنید به [۳۳]. ■

تعریف ۶.۱ . مخروط محدب $A \subseteq X$ را نوک دار می‌نامیم، هرگاه

$$A \bigcap \{-A\} = \{۰\}$$

که در آن نماد ۰ نشان دهنده‌ی بردار صفر است.

تعریف ۷.۱ . $A \subseteq X$ را یک مجموعه‌ی آفین می‌نامیم، اگر برای هر $x, y \in A$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in A.$$

تعریف ۸.۱ . اگر $f : X \to Z \cup \{\pm\infty\}$، آنگاه دامنه‌ی f مجموعه‌ی $dom f := \{x \mid f(x) \in Z\}$ و نمودار f مجموعه‌ی $Grf := \{(x, f(x)) \mid x \in dom f\}$ می‌باشند.

تعریف ۹.۱ . نگاشت $f : X \to Z \cup \{\pm\infty\}$ را سره می‌نامیم، اگر $dom f \neq \emptyset$ و برای هر $x \in X$ داشته باشیم $f(x) \neq -\infty$.

تعریف ۱۰.۱ . نگاشت $f : X \to Z$ را آفین می‌نامیم، اگر برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ و $x, y \in X$ داشته باشیم

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

تذکر ۱۱.۱ . نگاشت $f : X \to Z$ آفین است، اگر نگاشت خطی $T : X \to Z$ و $v \in Z$ وجود داشته باشند به قسمی که $f(x) = T(x) + v$.

تعریف ۱۲.۱ . نگاشت $f : X \to \mathbb{R}$ را محدب می‌نامیم، اگر برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ و $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

در صورتی که $-f$ محدب باشد f را مقعر گوییم.

تعریف ۱۳.۱ . نگاشت $p : X \to \mathbb{R}$ را زیر خطی می‌نامیم، اگر

(i). برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

(ii). برای هر $x \in X$ و $\lambda \geq 0$ داشته باشیم $p(\lambda x) = \lambda p(x)$.

تعریف ۱۴.۱ . فرض کنید $\leq$ یک رابطه روی مجموعه‌ی X باشد، در این صورت X را به طور جزئی مرتب با رابطه‌ی $\leq$ گوییم، هرگاه

۱– با ازای هر $x \in X$، $x \leq x$.

۲– به ازای هر $x, y, z \in X$، اگر $x \leq y$ و $y \leq z$، آنگاه $x \leq z$.

۳– به ازای هر $x, y \in X$، اگر $x \leq y$ و $y \leq x$، آنگاه $x = y$.

تعریف ۱۵.۱ . فرض کنیم X یک فضای برداری باشد. در این صورت نگاشت خطی $T : X \to \mathbb{R}$ را زیر گرادیان (زیر دیفرانسیل) تابع محدب $f : X \to \mathbb{R}$ در نقطه‌ی $\bar{x} \in dom f$ گوییم، اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم

$$T(x) - T(\bar{x}) \leq f(x) - f(\bar{x})$$

تعریف ۱۶.۱ . فرض کنیم E و F دو مجموعه‌ی نا تهی باشند. نگاشت $\Gamma : E \to 2^F$ را یک نگاشت مجموعه مقدار می‌نامیم و با $\Gamma : E \multimap F$ و یا $\Gamma : E \rightrightarrows F$ نشان می‌دهیم. منظور از 2^F تمام زیر مجموعه‌های F است.

مجموعه‌ی $dom\Gamma := \{x \in E | \Gamma(x) \neq \emptyset\}$ دامنه Γ، $Im\Gamma := \bigcup_{x \in E} \Gamma(x)$ برد Γ و مجموعه‌ی $Gr\Gamma := \{(x,y) | y \in \Gamma(x)\}$ نمودار Γ را مشخص می‌کنند.

تعریف ۱۷.۱ . فرض کنیم X و Z فضاهای برداری توپولوژیکی باشند. نگاشت مجموعه مقدار $T : X \rightrightarrows Z$ را نیم پیوسته‌ی پایینی (l.s.c.)(نیم پیوسته‌ی بالایی