به نام خدایی که در این نزدیکی است

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه خانم زهرا پاشایی رشته ریاضی‌محض به شماره دانشجویی ۹۰۵۲۰۵۱۰۰۶ تحت عنوان: **«رده‌بندی خمینه‌های ۵- بعدی ریمانی نقطه ثابت همگن با خمیدگی برشی نامنفی»** را در تاریخ ۱۳۹۲/۶/۳۱ از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمحمدباقر کاشانی	استاد	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر سیدمسعود امینی	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر ناصر بروجردیان	دانشیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلا به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ ~~رساله دکتری~~ نگارنده در رشته ریاضی (محض) است که در سال ۱۳۹۲ در دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی ~~سرکار خانم~~/جناب آقای دکتر سید محمد باقر کاشانی ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب زهرا پارسائی دانشجوی رشته ریاضی (محض) مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: زهرا پارسائی

تاریخ و امضا: ۱۳۹۲/۱۰/۳

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیات علمی، دانشجویان، دانش‌اموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درامدهای حاصل از انها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید اورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌اموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا اثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس ائین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این آیین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیات رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب...زهرا پارسائی...دانشجوی رشته...ریاضی محض... ورودی سال تحصیلی...۱۳۹۰... مقطع ...کارشناسی ارشد... دانشکده ...علوم ریاضی... متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در ائین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد ائین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر ان به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمنا نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس براورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:......................

تاریخ: ۱۳۹۲/۱۰/۳

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده‌ی علوم ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد
گروه ریاضی محض

رده بندی خمینه‌های ۵-بعدی نقطه ثابت همگن با خمیدگی برشی نامنفی

نگارنده:
زهرا پاشایی

استاد راهنما:
دکتر سیدمحمد باقر کاشانی

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

نهال را باران باید
تا بشوید غبار نشسته بر گلهایش
و سیرابش کند از آب حیات
و آفتاب باید
تا بتاباند
نیرو را و محکم کند
شاخه های تازه روییده را

به نام مادر

بوسه ای باید زد
دست هایی را که
می شویند غبار خستگی روزگار را
و سیراب می کنند روح تشنه را

به نام پدر

بوسه ای باید زد
دست هایی را
که می تابانند
نیرو را و محکم می کنند
استواری پایه های زیستن را

از دلسوزی و راهنمایی بی دریغ استاد عزیز

دکتر سید محمد باقر کاشانی

برای انجام هرچه بهتر این مهم، کمال تشکر را دارم.

چکیده

فرض کنید M یک خمینه‌ی هموار، فشرده، ریمانی و $G \subset Iso(M)$ زیر گروهی بسته و همبند باشد، چنانکه $Fix(M,G)$ (مجموعه نقطه‌های ثابت عمل) ناتهی است. عمل G بر M را نقطه ثابت همگن نامند اگر G بر کره‌ی نرمال بر یکی از مؤلفه‌های $Fix(M,G)$ ترایا عمل کند، یا به بیان هم ارز، $Fix(M,G)$ در فضای مداری دارای نقص همگنی یک باشد.در این پایان‌نامه رده بندی خمینه‌های ۵-بعدی بسته، ساده همبند با خمیدگی برشی نامنفی و عمل مؤثر و نقطه ثابت همگن، یک گروه لی فشرده از طولپاییها، با تقریب وابرسانی مطالعه می‌شود. پایان نامه به تشریح بازبرد ([۹]) می‌پردازد.

واژگان کلیدی: خمیدگی نامنفی، عمل S^1 ، خمینه‌های ۵-بعدی، نقطه ثابت همگن

فهرست مطالب

پیش گفتار

اگر G یک زیر گروه لی فشرده (همبند) از گروه طولپاپی‌های خمینه‌ی ریمانی (فشرده) M باشد، بعد فضای مداری که برابر نقص بعد مدار اصلی $\frac{G}{H}$ در M است، نقص همگنی عمل گروه G بر M نامند و با $cohom(M,G)$ نمایش می‌دهند.
$cohom(M,G)=0$ به این معناست که G بر M ترایا عمل می‌کند و $M\cong\frac{G}{H}$ یک خمینه‌ی همگن است، که H زیر گروه پایاگر یک نقطه M می‌باشد. مطالعه‌ی فضاهای با نقص‌همگنی $1,2\cdots$ از دهه‌ی ۱۹۴۰ با عمل گروه‌های فشرده بر فضای اقلیدسی و کره‌ها آغاز شد و در سال ۱۹۵۶ $P.SMostert$ نشان داد که اگر خمینه‌ی همبند M با عمل گروه لی همبند و فشرده G بر آن از نقص‌همگنی یک باشد، آنگاه فضای مداری با یکی از چهار فضای $[0,1],[0,\infty),R,S^1$ همانسان است؛ همچنین رده‌بندی گروه‌های فشرده که بر فضای اقلیدسی با نقص‌همگنی ۱،۲،۳ عمل می‌کند توسط ای.اشتروم در سال ۱۹۹۶ تکمیل شده است.
اگر M^G بیانگر مجموعه‌ی نقطه‌های ثابت عمل G بر M باشد، آنگاه نقص‌همگنی نقاط ثابت عمل که با $cohomfix(M,G)$ نمایش داده می‌شود، چنین است

$$\begin{cases} cohomfix(M,G):=dim(\frac{M}{G})-dim\pi(M^G)-1 & M^G\neq\emptyset \\ cohomfix(M,G):=cohom(M,G)=dim(\frac{M}{G}) & M^G=\emptyset \end{cases}$$

که $\pi:M\to\frac{M}{G}$ نگاشت خارج قسمتی است که هر نقطه را به مدار آن نقطه می‌برد.

اگر $cohomfix(M,G)=0$ آنگاه $G-$ خمینه‌ی M را نقطه ثابت همگن گویند. خمینه‌های نقطه ثابت همگن با خمیدگی مثبت به کمک $Berger$ ، $Wilking$ و $Berard-Bergery$ شناسایی شده‌است و $Grove-Searle$ آن‌ها را به‌طور کامل با استفاده از عمل ترایای G بر کره یکه عمود بر مؤلفه‌ی همبندی مجموعه نقطه‌های ثابت با بیشترین بعد رده‌بندی کرده‌اند.
خمینه‌های نقطه ثابت همگن با خمیدگی نامنفی در بعد ۲ ،۳،۴ در([۷]) و خمینه‌های ۵-بعدی نقطه ثابت همگن با خمیدگی نامنفی در ([۹])به کمک $Galaz\ \ Garcia$ رده‌بندی شده‌است. این پایان‌نامه شامل ۳ فصل است که در فصل اول پیش نیازها آورده می‌شود. در فصل دوم فضاهای الکساندروف به دلیل اهمیت آن‌ها در مطالعه‌ی خمینه‌های با خمیدگی نامنفی مطالعه می‌شود. در فصل پایانی به بررسی و شرح اثبات قضیه‌ی پایین از باز برد اصلی پایان نامه، ([۹]) می‌پردازد.

قضیه‌ی اصلی ([۹]) : فرض کنید M^5 یک $G-$ خمینه‌ی بسته، ساده‌همبند و نقطه ثابت همگن با خمیدگی نامنفی باشد. آنگاه G یکی از گروه‌های $SO(5), SO(4), SU(2), SO(3), S^1$ ، است و داریم:

a) اگر $G = SO(5), SO(4), SU(2)$ باشد، آنگاه M^5 با S^5 وابرسان است.

b) اگر $G = SO(3), S^1$ آنگاه M^5 با S^5 یا با یکی از دو کلاف بر S^2 با تار S^3 وابرسان است.

فصل ۱

پیش نیاز ها

گنجایش هر ظرفی با آنچه در آن نهند تنگ می شود
جز ظرف دانش که هر چه در آن نهند گسترش یابد

(حضرت علی (ع))

۱.۱ گروه های لی

تعریف ۱.۱.۱. ([۲]) یک مجموعه G را یک گروه توپولوژیک نامند اگر
- G یک فضای توپولوژیک هاسدورف باشد.
- G یک گروه باشد.
- نگاشت $\alpha_G : G \times G \longrightarrow G$ که

$$\forall (g,h) \in G \times G \quad \alpha_G(g,h) = gh^{-1}$$

پیوسته باشد.

نکته ۲.۱.۱. از تعریف بالا به سادگی دیده می‌شود نگاشت $\begin{matrix} m : G \times G \to G \\ (g,h) \to gh \end{matrix}$ پیوسته و نگاشت‌های $\begin{matrix} i : G \to G \\ g \to g^{-1} \end{matrix}$ و $\begin{matrix} L_h : G \to G \\ g \to hg \end{matrix}$ و $\begin{matrix} R_h : G \to G \\ g \to gh \end{matrix}$ برای هر h در G همانسانی است.

تعریف ۳.۱.۱. ([۲]) زیر فضاو زیرگروه H از گروه توپولوژیک G را یک زیر گروه توپولوژیک گویند.

گزاره ۴.۱.۱. ([۲]) اگر H زیر گروه بسته‌ی گروه توپولوژیگ G باشد آنگاه $\frac{G}{H}$ ، فضای همدسته‌های چپ H در G با توپولوژی خارج قسمتی ، یک فضای هاسدورف است و $\phi : G \to \frac{G}{H}$ نگاشتی باز و پیوسته است چنانکه H زیر گروه نرمال G باشد، $\frac{G}{H}$ گروه توپولوژیک است.

لم ۵.۱.۱. ([۲]) فرض کنید $H \subset G$ یک زیر گروه توپولوژیک باشد، آنگاه $N(H) = \{g \in G : gHg^{-۱} = H\}$ که، نرمال ساز H در G نامیده می‌شود ، یک زیر گروه توپولوژیک G است و اگر H در G بسته باشد آنگاه $N(H)$ نیز بسته است.

گزاره ۶.۱.۱. ([۲]) فرض کنید G یک گروه توپولوژیک و H یک زیر گروه بسته‌ی آن باشد. هرگاه H و $\frac{G}{H}$ همبند (فشرده)باشد،آنگاه G نیز همبند(فشرده) است.

تعریف ۷.۱.۱. ([۲]) مجموعه G را گروه لی گویند اگر

- G يك خمینه‌ی هموار باشد.
- G یک گروه باشد.
- نگاشت $\alpha_G : G \times G \to G$ که $\alpha_G(g,h) = gh^{-۱}$ هموار باشد.

نکته ۸.۱.۱. از تعریف بالا به سادگی دیده می‌شود نگاشت $\begin{array}{c} m : G \times G \to G \\ (g,h) \to gh \end{array}$ هموار و نگاشت‌های $\begin{array}{c} i : G \to G \\ g \to g^{-۱} \end{array}$ و $\begin{array}{c} L_h : G \to G \\ g \to hg \end{array}$ و $\begin{array}{c} R_h : G \to G \\ g \to gh \end{array}$ برای هر h در G وابرسانی است.

تعریف ۹.۱.۱. ([۲]) زیر مجموعه‌ی H از گروه لی G را یک زیر گروه لی گویند هرگاه

- H زیر گروه G باشد.
- H دارای ساختار هموار باشدکه نسبت به آن یک گروه لی شود.
- H زیر خمینه‌ی فروبرده شده G باشد($i : H \to G$ یک فروبری یک به یک باشد)

قضیه ۱.۱.۱۰. ([۲]) $(Cartan)$ اگر G یک گروه لی و H یک زیر گروه بسته(به معنای توپولوژیکی) از G باشد آنگاه H یک زیر گروه لی G است.

تعریف ۱.۱.۱۱. ([۲]) هرگاه G و H دو گروه لی باشد نگاشت $f : G \to H$ را یک همریختی گروه‌های لی نامند اگر f هموار و یک همریختی گروهی باشد. همریختی f را یکریختی نامند هرگاه f یکریختی گروهی و وابرسانی باشد.

قضیه ۱.۱.۱۲. ([۲]) یک گروه توپولوژیک فشرده یک گروه لی است اگر و تنها اگر با یک زیر گروه بسته‌ی $O(n)$ ، (برای یک n) یکریخت باشد.

قضیه ۱.۱.۱۳. ([۱۶]) گروه طولپایی های یک خمینه‌ی ریمانی $n-$ بعدی (M,g) ، $Iso(M,g)$ ، یک گروه لی است و اگر M فشرده باشد $Iso(M,g)$ نیز فشرده است.

قضیه ۱.۱.۱۴. ([۱۶]) فرض کنید (M,g) یک خمینه‌ی ریمانی $n-$ بعدی باشد. گروه لی $Iso(M,g)$ ، حداکثر از بعد $\frac{1}{2}n(n+1)$ است. اگر بعد $Iso(M,g)$ برابر $\frac{1}{2}n(n+1)$ باشد آنگاه M با یکی از خمینه‌های پایین طولپا است.

۱) فضاي اقلیدسی R^n

۲) کره ی $n-$ بعدی S^n

۳) فضای افکنشی $n-$ بعدی RP^n

۴) فضای هذلولوی(ابربریکی) $n-$ بعدی H^n

۲.۱ عمل گروه لی بر یک خمینه هموار

تعریف ۱.۲.۱. ([۲]) فرض کنید G یک گروه لی و M یک خمینه‌ی هموار باشد، عمل هموار چپ G بر M یک نگاشت هموار

$$\theta : G \times M \to M$$

$$(g, m) \overset{\theta}{\mapsto} g.m = \theta(g, h)$$

با ویژگی های پایین است

- $g_۱.(g_۲.m) = (g_۱g_۲).m \qquad m \in M, \forall g_۱, g_۲ \in G$
- $e.m = m \qquad \forall m \in M$

(عمل هموار راست به شکل مشابه تعریف می‌شود)

تعریف ۲.۲.۱. ([۲]) فرض کنید G بر M هموار عمل کند. آنگاه M را یک $G-$ خمینه و G را گروه تبدیل لی نامند.

تعریف ۳.۲.۱. ([۲]) فرض کنید M یک $G-$ خمینه باشد. مجموعه‌ی $G_x = \{g \in G : g.x = x\}$ را زیر گروه پایاگر x و مجموعه $G(x) = \{g.x : g \in G\}$ مدار x نامند.

تعریف ۴.۲.۱. ([۱۶]) فرض کنید گروه لی G بر خمینه‌ی M عمل کند. مجموعه نقطه‌های ثابت عضو $g \in G$ چنین $M^g = \{x \in M : gx = x\}$ تعریف می‌شود.
مجموعه نقطه های ثابت زیر گروه $H \leq G$ عبارتست از $M^H = \bigcap_{g\in G} M^g$ که با نماد $Fix(M, H)$ نمایش داده می‌شود.

قضیه ۵.۲.۱. ([۱۶]) فرض کنید (M, g) یک خمینه‌ی ریمانی و S یک زیر مجموعه‌ی گروه $Iso(M, g)$ باشد. آنگاه هر مؤلفه‌ی همبندی مجموعه M^S یک زیر خمینه تمام ژئودزیکی و بسته‌ی M است.

تعریف ۶.۲.۱. ([۱۶]) بعد M^H عبارتست از

$$dimM^H = max\{dimC_i : \text{است } M^H \text{ یک مؤلفه‌ی همبندی } C_i\}$$

قضیه ۱.۲.۷. ([۲]) اگر $G \times M \to M$ یک عمل هموار گروه لی فشرده G باشد، آنگاه برای هر $x \in M$ نگاشت $\alpha_x : \frac{G}{G_x} \to M$ که $\alpha_x(gG_x) = g.x$ ، یک نشاننده است.

نتیجه ۱.۲.۸. ([۲]) فرض کنید گروه لی فشرده G بر M هموار عمل کند، آنگاه هر مدار $G(x)$ یک زیرخمینه نشانده شده و بسته‌ی M است و نگاشت $\alpha_x : \frac{G}{G_x} \to G(x)$ یک وابرسانی است.

تعریف ۱.۲.۹. ([۲]) عمل گروه لی G بر خمینه‌ی M را مؤثر نامند هرگاه $\cap_{x\in M} G_x$ زیر گروه بدیهی باشد.

تعریف ۱.۲.۱۰. ([۲]) عمل گروه لی G بر خمینه‌ی M را آزاد گویند، هر گاه زیر گروه پایاگر هر عضو $x \in M$ بدیهی باشد.

تعریف ۱.۲.۱۱. ([۲]) عمل گروه لی G بر خمینه‌ی M را سره گویند هرگاه نگاشت

$$G \times M \to M \times M$$

$$(g,m) \overset{\theta}{\mapsto} (g.m, m)$$

یک نگاشت سره (تصویر وارون هر فشرده،فشرده است) باشد.

گزاره ۱.۲.۱۲. ([۲]) عمل گروه لی فشرده بر یک خمینه‌ی هموار سره است.

نکته ۱.۲.۱۳. اگر عمل G بر M سره باشد، آنگاه برای هر $x \in M$ زیر گروه پایاگر G_x فشرده است.

قضیه ۱.۲.۱۴. ([۲]) فرض کنید گروه لی G بر خمینه‌ی M هموار ، آزادوسره عمل کند. آنگاه $\frac{M}{G}$ دارای یک ساختار هموار یکتا است که نسبت به آن $\pi : M \to \frac{M}{G}$ هموار و استغراق است و $dim(\frac{M}{G}) = dimM - dimG$.

قضیه ۱.۲.۱۵. ([۲]) فرض کنید گروه لی همبند G بر فضای همبند X مؤثر عمل کند و X' یک فضای پوششی X باشد.آنگاه گروه پوششی (گروه لی و فضای پوششی) G' از G با عمل مؤثر بر X' موجود است که عمل G را می پوشاند. گروه G' و عملش بر X' یکتاست. هسته‌ی $G' \to G$ زیر گروهی از گروه تبدیل‌های پوششی نگاشت $\pi : X' \to X$ است. اگر X^G ناتهی باشد آنگاه $G' = G$ و $X'^G = \pi^{-۱}(X^G)$.

تعریف ۱.۲.۱۶. ([۲]) عمل گروه لی G بر خمینه‌ی M را طولپا گویند هرگاه G زیر گروهی از گروه طولپایی‌های M باشد.

تعریف ۱.۲.۱۷. ([۷]) فرض کنید M یک خمینه‌ی ریمانی باشد که گروه لی G برآن طولپا عمل می‌کند. اگر

$$Cohomfix(M,G) = dim\frac{M}{G} - dim\pi(M^G) - ۱ = ۰$$

آنگاه عمل G بر M را نقطه ثابت همگن نامند.

قضیه ۱.۲.۱۸. ([۷]) فرض کنید M یک $G-$ خمینه‌ی ریمانی دو-بعدی نقطه ثابت همگن با خمیدگی نامنفی باشد. آنگاه $G = S^۱$ و M با یکی از خمینه‌های $S^۲$ یا $RP^۲$ ، $G-$ وابرسان است.

قضیه ۱.۲.۱۹. ([۷]) فرض کنید M یک $G-$ خمینه‌ی ریمانی ۳-بعدی نقطه ثابت همگن با خمیدگی نامنفی باشد. آنگاه G می‌تواند یکی از گروه‌های $SO(۳)$ یا $S^۱$ باشد و به ترتیب ۲ یا ۳= $codimM^G$.

۱) اگر $G = SO(۳)$ ، آنگاه M با یکی از خمینه‌های $S^۳, RP^۳$ ، $G-$ وابرسان است.

۲) اگر $G = S^۱$ ، آنگاه M با یکی از خمینه‌های $S^۳, L^۳, S^۲\times S^۱, RP^۲\times S^۱, RP^۳\#RP^۳$ ، $G-$ وابرسان است که در آن $L^۳$ فضای عدسی است.

قضیه ۱.۲.۲۰. ([۷]) فرض کنید M یک $G-$ خمینه‌ی ریمانی ۴-بعدی نقطه ثابت همگن با خمیدگی ریمانی نامنفی باشد. آنگاه G می تواند یکی از گروه‌های $SO(۴), SU(۲), SO(۳), S^۱$ باشد و

۱) اگر $G = SO(۴)$ ، آنگاه M با $S^۴$ یا $RP^۴$ ، $G-$ وابرسان است.

۲) اگر $G = SU(۲)$ ، آنگاه M با یکی از فضاهای $S^۴, RP^۴, HP^۱, CP^۲$ ، $G-$ وابرسان است.

۳) اگر $G = SO(۳)$ ، آنگاه M با $S^۴$ ، یا $S^۳ \times S^۱$ ، $G-$ وابرسان است.

۴) اگر $G = S^۱$ آنگاه M با یکی از فضاهای $S^۴, CP^۲, S^۲ \times S^۲, CP^۲ \# CP^۲, S^۳ \times R$ ، $G-$ وابرسان است.

۳.۱ فضای مداری

در این بخش G یک گروه لی و M یک $G-$ خمینه‌ی هموار و M^* فضای مداری است.

تعریف ۱.۳.۱. ([۲]) مجموعه همه‌ی مدارهای عمل G بر M را که با $\frac{M}{G}$ نمایش داده می‌شود ، با توپولوژی خارج قسمتی نسبت به نگاشت $\pi : M \to \frac{M}{G}$ ، $\pi(x) = G(x)$ ، فضای مداری نامند.

نکته ۲.۳.۱. نگاشت خارج قسمتی $\pi : M \to \frac{M}{G}$ یک نگاشت باز است.

گزاره ۳.۳.۱. ([۲]) فرض کنید G یک گروه لی (توپولوژیک)فشرده باشد آنگاه

- فضای مداری $\frac{M}{G}$ هاسدورف است.
- نگاشت خارج قسمتی $\pi : M \to \frac{M}{G}$ بسته است.
- M فشرده است اگروتنهااگر $\frac{M}{G}$ فشرده باشد.
- نگاشت π سره است.
- M موضعی فشرده است اگر و تنها اگر $\frac{M}{G}$ موضعی فشرده باشد.

قضیه ۴.۳.۱. ([۲]) فرض کنید G بر M آزاد و سره عمل کند آنگاه فضای مداری، $\frac{M}{G}$ ،یک خمینه‌ی توپولوژیک با بعد $dim(M) - dim(G)$ است و یک ساختار هموار یکتا بر $\frac{M}{G}$ وجود دارد که نگاشت خارج قسمتی $\pi : M \to \frac{M}{G}$ استغراق است.

نکته ۵.۳.۱. ([۱۰]) فرض کنید گروه لی فشرده G بر M آزاد و سره عمل کند آنگاه فضای مداری $\frac{M}{G}$ یک خمینه‌ی هموار و $(M, \frac{M}{G}, G, \pi)$ یک کلاف اصلی است.

قضیه ۶.۳.۱. ([۲]) فرض کنید X یک فضای توپولوژیک همبندباشد که گروه لی فشرده‌ی G بر آن عمل می‌کند. اگر یکی از مدارها همبند باشد آنگاه $\pi_* : \pi_1(X) \to \pi_1(\frac{X}{G})$ پوشا است ؛ که π نگاشت افکنش خارج قسمتی است. بنابراین اگر X ساده همبند باشد $\frac{X}{G}$ نیز ساده همبند است($\pi_1(X)$ گروه بنیادی X است).

تعریف ۷.۳.۱. ([۲]) فرض کنید M یک $G-$ خمینه باشد. دو مدار $X = G(x)$ و $Y = G(y)$ را از یک نوع گویند، هرگاه G_x و G_y در G مزدوج باشد. مدارهای از نوع X را با $typeX$ نمایش می‌دهند. $typeY$ را کوچکتر از $typeX$ $(typeY \leq typeX)$ گویند، هرگاه G_x با زیر گروهی از G_y مزدوج باشد.

لم ۸.۳.۱. ([۱۵]) $(isotropy\ \ lemma)$ فرض کنید M یک $G-$ خمینه ی ریمانی و $\gamma : [0, 1] \to M$ یک ژئودزیک کمین بین دو مدار $G\gamma(1)$ و $G\gamma(0)$ باشد. آنگاه برای هر $t \in (0, 1)$ ، $G_{\gamma(t)} = G_\gamma$ یک زیر گروه $G_{\gamma(0)}$ و $G_{\gamma(1)}$ است.

قضیه ۹.۳.۱. ([۲]) $(principal\ \ orbit\ \ theorem)$ فرض کنید گروه لی فشرده G ، بر خمینه‌ی همبند M هموار عمل کند. آنگاه مدار یکتای $\frac{G}{H}$ از نوع بیشین (برای هر زیر گروه پایاگر K ، H با زیر گروهی از K مزدوج است) موجود است، که آن را مدار اصلی نامند. اجتماع مدارهای از نوع $\frac{G}{H}$ یک زیر خمینه‌ی باز و چگال در M است و تصویر آن در $\frac{M}{G}$ همبند است.

نکته ۱۰.۳.۱. اگر P یک مدار بیشین باشدو Q مداری که $dimQ = dimP$ ولی از نوع بیشین نباشد، Q را مدار استثنایی و مدارهایی راکه بعد آنها از بعد P کمتر است مدار تکین نامند.

نکته ۱۱.۳.۱. فرض کنید گروه لی S^1 بر خمینه‌ی M طولپا عمل کند. منظور از یک تکینگی منزوی p^* یک مدار استثنایی منزوی است.منزوی بودن به این معناست که گروه پایاگر p یعنی Z_k $(k > 1)$ بر کره نرمال بر مدار S^1p آزاد عمل می کند.

تعریف ۱۲.۳.۱. ([۱۶]) همسایگی U^* از نقطه‌ی تکین $p^* \in M^*$ با گروه پایاگر نابدیهی را منظم نامند هرگاه $U^* \setminus \{p^*\}$ فقط شامل مدار اصلی باشد.

لم ۱۳.۳.۱. ([۱۲]) فرض کنید M یک خمینه‌ی ریمانی نقطه ثابت همگن با خمیدگی نامنفی باشد که گروه لی فشرده G بر آن طولپا عمل می‌کند. اگر مجموعه‌ی C مجموعه‌ای در بیشترین فاصله از $\partial\frac{M}{G}$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی $\frac{M}{G} - \{C \cup \pi(M^G)\}$ در تناظر دوسویی با مدارهای اصلی است .