بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه

گروه ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش هندسه

حد در رسته توابع جزئی

استاد راهنما:

دکتر سید ناصر حسینی

مولف:

شیما رحیم خانی

شهریور ماه ۱۳۸۹

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی - دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: شیما رحیم خانی

استاد راهنما: دکتر سید ناصر حسینی

داور ۱ : دکتر سید شاهین موسوی

داور ۲ : دکتر اسفندیار اسلامی

نمایندە تحصیلات تکمیلی دانشگاه: دکتر سید ناصر حسینی

تقدیم به :

مادرم

به پاس دل نگرانی های مقدسش

و

پدرم

به پاس لطف های بیکرانش

و

مهندس علیرضا افضلی پور و فاخره صبا

بنیان گذاران دانشگاه شهید باهنر کرمان

تقدیر و تشکر

باسپاس وستایش بی قیاس به درگاه ایزدمنان، اولین معلم وراهنمای بشریت، پروردگارعالمیان،که نعمت صحت، سلامت وبندگی رابه آدمی ارزانی داشت ووی رااشرف مخلوقات درهستی قرارداد.

جناب آقای دکترحسینی، بهره مندی ام ازمحضرعلم واخلاقتان راهمیشه باافتخاریادمی کنم. بیکران گلواژه ی سپاس را بهر وسعت بی وصف یاری هایتان از من پذیرا باشید.

دکتر اسلامی و دکتر موسوی، همکاری های صمیمانه تان در پذیرفتن داوری این پایان نامه را بی نهایت سپاسگزارم.

در کمال تواضع و فروتنی منت اساتید و معلمان فرزانه و بزرگواری را به دوش می کشم که در تمام دوران تحصیلم تکیه گاه ساقه های نازک نیلوفران باورم شد تا در اوج آسمان شکفتن پهنه ای از زیبایی دانش را لمس کنم.

خواهران عزیزم، عزیزترین واژه های هستی ام، تشکر بهر حمایت های بی دریغ و راهنمایی های صمیمانه تان، ناچیز کلامی است که ادا کنم.

و سپاس از آن تمام دوستان عزیزم، خالق خاطرات خوب زندگی ام، که قداست یاری شان و گام های سبزشان تا ابد در نگاهم ماندگار است.

چکیده

دراین پایان نامه پس ازمعرفی رسته توابع جزئی $\overrightarrow{Set}$، به مطالعه وجود ضرب، معادلساز و عقب بر دراین رسته پرداخته ایم. وجودضرب ومعادلساز دراین رسته را با بدست آوردن آنها ثابت نموده ایم. همچنین عقب بر را در این رسته محاسبه نموده ایم. نهایتا وجود حد را در این رسته نتیجه گرفته و این بدان معنی است که رسته توابع جزئی رسته ای کامل می باشد.

مقدمه

رسته ریخت جزئی از اهمیت بالایی برخوردار است و در زمینه های گوناگونی مورد استفاده قرار گرفته است، ببینید[۲، ۳، ۴، ۵، ۷، ۸، ۹، ۱۰].

در این پایان نامه به مطالعه رسته ریخت جزئی وابسته به رسته مجموعه ها $\overrightarrow{Set}$ که آنرا رسته توابع جزئی نامیده ایم، پرداخته ایم.

بدین منظور در فصل اول پیش نیازهای رسته ای را در سه بخش آورده ایم که خواننده را برای مطالعه بیشتر و کامل تر به [۱] و [۶] ارجاع می دهیم.

در فصل دوم، بخش اول رسته توابع جزئی را تعریف و معرفی نموده ایم. در بخش دوم ضرب متناهی، در بخش سوم معادلساز و در بخش چهارم عقب بر را در رسته توابع جزئی بدست آ ور ده ایم.

در فصل سوم، در بخش اول نمادگذاری و پیش نیازهای لازم را آورده ودر بخش دوم ضرب (دلخواه) در رسته توابع جزئی را بدست آورده ایم. نهایتا نتیجه گرفته ایم حد در این رسته وجود دارد و اینکه رسته توابع جزئی رسته ای کامل است.

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش نیازهای رسته ای

دراین فصل تعاریف و قضایایی را مطرح می کنیم که در بخش ها و فصل های بعد از آنها استفاده می کنیم. ازجمله مفهوم حد و بعضی قضایای مربوط به آن را مروری کنیم.

۱.۱ رسته و تابعگون

تعریف ۱.۱.۱. *رسته ی $\mathbf{C}$ شامل $\mathbf{C_0}$ کلاس اشیاء و $\mathbf{C_1}$ کلاس ریختی ها یا پیکان ها است که اگر f دامنه ی a و هم دامنه ی b داشته باشد، می گوییم f یک ریختی از a به b است و آن را با نماد $f : a \longrightarrow b$ نشان می دهیم. برای هر دو شیء a و b گردایه ی همه ی ریختی ها از a به b را با نماد $hom(a,b)$ که یک مجموعه است نشان می دهیم. چنین مجموعه هایی دوبدو مجزا هستند. ترکیب دو ریختی ترکیب پذیر $f : a \longrightarrow b$ و $g : b \longrightarrow c$، $h : a \longrightarrow c$ است که با $gf : a \longrightarrow c$ نشان داده می شود به طوری که ترکیب فوق شرکت پذیر است یعنی برای هر $k : c \longrightarrow d$ داریم: $k(gf) = (kg)f$. همچنین برای هر عضو $a \in \mathbf{C_0}$ ریختی از a به a متناظر می شود که آنرا با $۱_a : a \longrightarrow a$ نمایش می دهیم که همانند همانی عمل می کند یعنی برای هر $f : a \longrightarrow b$ و $g : b \longrightarrow a$ داریم: $f۱_a = f$ و $۱_ag = g$.*

تعریف ۲.۱.۱. *برای هر دو رسته ی $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ تابعگون $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ زوج توابع*

$$F_۰ : \mathbf{C_0} \longrightarrow \mathbf{D_0} \text{ و } F_۱ : \mathbf{C_1} \longrightarrow \mathbf{D_1}$$

است که دامنه، هم دامنه، ترکیب و همانی را حفظ می کند. حفظ کردن دامنه و هم دامنه یعنی اگر $f : a \longrightarrow b$ ریختی در $\mathbf{C}$ باشد آنگاه $F_۱(f) : F_۰(a) \longrightarrow F_۰(b)$ ریختی در $\mathbf{D}$ باشد. حفظ کردن ترکیب یعنی برای هر دو ریختی ترکیب پذیر f و g داشته باشیم: $F(fg) = F(f)F(g)$ و حفظ کردن همانی یعنی $F(۱_a) = ۱_{(F_a)}$.

۲.۱ حد در یک رسته

تعریف ۱.۲.۱. شیء a را در رسته $\mathbf{A}$ نهایی گویند هرگاه برای هر شیء b در رسته $\mathbf{A}$ ریختی منحصربفرد $f : b \longrightarrow a$ موجود باشد.

تعریف ۲.۲.۱. در یک رسته ریختی $f : a \longrightarrow b$ را تکریختی گویند هرگاه برای هر زوج ریختی $a \xleftarrow{g} c \xrightarrow{h} a$ که $fg = fh$، آنگاه $g = h$.

گزاره ۳.۲.۱. ترکیب تکریختی ها، تکریختی است.

تعریف ۴.۲.۱. زوج $(a, (f_i)_{i\in I})$ را که شامل شیء a و خانواده ای از ریختی های $f_i : a \longrightarrow a_i$ است که با رده I اندیس گذاری شده اند را چشمه می نامند. a دامنه چشمه و a_i هم دامنه چشمه نامیده می شود.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم $S = \{f_i : a \longrightarrow a_i, i \in I\}$ یک چشمه باشدکه با (S, a) نمایش داده می شود و $f : b \longrightarrow a$ ریختی باشد، آنگاه ترکیب ریختی f با چشمه S، چشمه $Sf = \{f_i f : b \longrightarrow a_i\}$ است.

تعریف ۶.۲.۱. چشمه $P = \{\pi_i : p \longrightarrow p_i, i \in I\}$ راضرب می نامیم اگربرای هرچشمه با هم دامنه مشابه P مثل $S = \{f_i : a \longrightarrow p_i, i \in I\}$ ریختی منحصربفردی مانند $f : a \longrightarrow p$ موجود باشد بطوریکه $Pf = S$. p راضرب خانواده $\{p_i\}_{i\in I}$ می نامیم.

لم ۷.۲.۱. چشمه $(p, \emptyset)$ ضرب است اگر و فقط اگر p شی نهایی باشد.

قضیه ۸.۲.۱. یک رسته ضرب متناهی دارد اگر و تنها اگر شیء نهایی و ضرب دوتایی داشته باشد.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم $b \xleftarrow{g} a \xrightarrow{f} b$ یک زوج ریختی در رسته $\mathbf{A}$ باشند. معادلساز f و g ریختی مانند $h : c \longrightarrow a$ است بطوریکه $fh = gh$ وخاصیت جهانی زیررادارااست:

اگر $h' : c' \longrightarrow a$ در رسته $\mathbf{A}$ بگونه ای موجود باشد که $fh' = gh'$ آنگاه ریختی یکتای $\overline{h} : c' \longrightarrow c$ موجود باشد بطوریکه $h\overline{h} = h'$.

مثال ۱۰.۲.۱. در رسته مجموعه ها معادلساز زوج ریختی $Y \xleftarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$ نگاشت شمول $i : E \longrightarrow X$ است که درآن $E = \{x \in X, f(x) = g(x)\}$.

تعریف ۱۱.۲.۱. مربع $g\overline{f} = f\overline{g}$ که به صورت زیر نشان داده می شود

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\overline{g}"'] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

عقب بر نامیده می شود، اگرجابجایی باشد و خاصیت جهانی زیر را داشته باشد:

برای هرمربع جابجایی به شکل

$$\begin{tikzcd} p' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

ریختی یکتای $k : p' \longrightarrow p$ موجود باشد بطوریکه داشته باشیم: $\overline{g}k = g'$ و $\overline{f}k = f'$

(ریخت $\overline{f}$ را عقب بر f در امتداد g می نامیم و با $g^{-1}(f)$ نمایش می دهیم.)

مثال ۱۲.۲.۱. در رسته مجموعه ها عقب بر دو تابع $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ به صورت زیر تعریف می شود.

قرارمی دهیم $D = \{(x,y) : x \in A, y \in B, f(x) = g(y)\}$ و $A \xleftarrow{\overline{g}} D \xrightarrow{\overline{f}} B$ که $\overline{g}(x,y) = x$ و $\overline{f}(x,y) = y$ آنگاه مربع زیر عقب بر می باشد.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\overline{g}"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

گزاره ۱.۲.۱۳. *در رسته مجموعه ها تابع $m : A \longrightarrow B$ تکریختی است اگر وتنها اگر مربع*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "1"] \arrow[d, tail, "1"'] & A \arrow[d, "m"] \\ A \arrow[r, "m"'] & B \end{tikzcd}$$

عقب بر باشد.

قضیه ۱.۲.۱۴. *گیریم $f : a \longrightarrow c$ و $g : b \longrightarrow c$ ریختی هایی در رسته $\mathbf{A}$ باشند و فرض کنیم $a \times b$ ضرب a و b در رسته $\mathbf{A}$ باشد و توابع تصویر $pr_1 : a \times b \longrightarrow a$ و $pr_2 : a \times b \longrightarrow b$ باشند، اگر $d \xrightarrow{e} a \times b$ معادلساز $c \xleftarrow{fpr_1} a \times b \xrightarrow{gpr_2} c$ باشد سپس مربع زیرعقب براست.*

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "pr_2 e"] \arrow[d, "pr_1 e"'] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

قضیه ۱.۲.۱۵. *عقب بر $A \rightarrowtail^{1} A$ در امتداد هر تابع $f : C \longrightarrow A$ در رسته مجموعه ها موجود و (باتقریب یکریختی برابر با $C \rightarrowtail^{1} C$) است.*

تعریف ۱.۲.۱۶. *گوییم رسته $\mathbf{A}$:*

(۱) معادلساز دارد اگر برای هر زوج ریختی موازی در رسته A معادلساز وجود داشته باشد.

(۲) ضرب (متناهی) دارد اگر برای هرخانواده با مجموعه اندیس گذار (متناهی) ضرب وجود داشته باشد.

(۳) عقب بر دارد اگر برای هر ۲ - چاهک (دوگان چشمه) عقب بر داشته باشد.

تعریف ۱.۲.۱۷. *یک دیاگرام در رسته $\mathbf{A}$، تابع گون $D : I \longrightarrow \mathbf{A}$ با هم دامنه $\mathbf{A}$ است. دامنه I طرح دیاگرام نامیده می شود.*

تعریف ۱.۲.۱۸. فرض کنیم $D : I \longrightarrow \mathbf{A}$ یک دیاگرام در $\mathbf{A}$ باشد و برای هر $i \in I$، $D(i) = d_i$ قرار می دهیم.

(۱) یک چشمه $(a \xrightarrow{\theta_i} d_i)_{i\in I_\circ}$ در $\mathbf{A}$ برای D طبیعی نامیده می شود، اگر برای هر ریختی $i \xrightarrow{f} j$ داشته باشیم: $D(f)\theta_i = \theta_j$.

(۲) یک حد از D یک چشمه طبیعی $(l \xrightarrow{\theta_i} d_i)_{i\in I_\circ}$ برای D با خاصیت جهانی زیراست:
برای هرچشمه طبیعی $(a \xrightarrow{\alpha_i} d_i)_{i\in I_\circ}$ از D ریختی منحصربفرد $a \xrightarrow{\alpha} l$ موجود باشد که برای هر $i \in I_\circ$ داشته باشیم: $\theta_i\alpha = \alpha_i$

تعریف ۱.۲.۱۹. گوییم رسته $\mathbf{A}$:

(۱) متناهیا کامل است اگر هردیاگرام متناهی در $\mathbf{A}$ حد داشته باشد.

(۲) کامل است اگر هر دیاگرام کوچک در $\mathbf{A}$ حدداشته باشد.

قضیه ۱.۲.۲۰. برای هررسته $\mathbf{A}$ گزاره های زیرمعادلند:

(۱) رسته $\mathbf{A}$ (متناهیا) کامل است.

(۲) رسته $\mathbf{A}$ ضرب (متناهی) و معادلسازدارد.

قضیه ۱.۲.۲۱. فرض کنید مربع هاي زير جابجايي باشند .

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}$$

(۱) اگر هر دو مربع عقب بر باشند آن گاه مستطيل بيروني نيز عقب بر است .

(۲) اگر مستطيل بيرون و مربع سمت راست عقب بر باشند آن گاه مربع سمت چپ نيز عقب بر است .

۳.۱ هم- حد در یک رسته

در ابتدا متذکرمی شویم چون در این پایان نامه از تعاریف مربوط به هم-حد تنها از هم-ضرب نام برده شده، بنابراین تنها تعاریف و پیشنیازهای مربوط به هم-ضرب رابیان می کنیم.

تعریف ۱.۳.۱. *شیء a را در رسته $\mathbf{A}$ اولیه گویند هرگاه برای هرشیء b در رسته $\mathbf{A}$، یک ریختی منحصربفرد $f : a \longrightarrow b$ موجود باشد.*

تعریف ۲.۳.۱. چشمه $P = \{\pi_i : p_i \longrightarrow p, i \in I\}$ *را هم-ضرب نامیم اگر برای هرچشمه با دامنه مشابه P مثل $S = \{f_i : p_i \longrightarrow a, i \in I\}$ ریختی منحصربفردی مانند $f : p \longrightarrow a$ موجود باشد بطوریکه $fP = S$. p را هم-ضرب خانواده $\{p_i\}_{i\in I}$ می نامیم.*

قضیه ۳.۳.۱. *اگر در رسته مجموعه هاعقب بر توابع $A \overset{\nu_1}{\rightarrowtail} A\coprod B$ و $B \overset{\nu_2}{\rightarrowtail} A\coprod B$ را در امتداد تابع $f : C \longrightarrow A\coprod B$ به ترتیب با $C_1 \overset{\nu_1}{\rightarrowtail} C$ و $C_2 \overset{\nu_2}{\rightarrowtail} C$ نمایش دهیم، آنگاه $C = C_1 \coprod C_2$ و $C_1 \overset{\nu_1}{\rightarrowtail} C$ و $C_2 \overset{\nu_2}{\rightarrowtail} C$ ریختی های هم-ضرب می باشند.*

قضیه ۴.۳.۱. *مربع های عقب بر*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "k'"'] & C' \arrow[d, "k"] \\ D \arrow[r, "h"'] & D' \end{tikzcd} \quad \text{و} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & A' \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & B' \end{tikzcd}$$

را در رسته مجموعه ها در نظربگیرید. در این صورت مربع زیر عقب بر است.

$$\begin{tikzcd} A\coprod C \arrow[r, "f'\coprod h'"] \arrow[d, "g'\coprod k'"'] & A'\coprod C' \arrow[d, "g\coprod k"] \\ B\coprod D \arrow[r, "f\coprod h"'] & B'\coprod D' \end{tikzcd}$$

برهان. داریم:

$$(g\coprod k)(f'\coprod h') = gf'\coprod kh' = fg'\coprod hk' = (f\coprod h)(g'\coprod k')$$

حال e و e' را توابعی در نظر بگیرید که مربع بیرونی دیاگرام زیر جابجایی باشد.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[drr, bend left, "e'"] \arrow[dd, bend right, "e"'] & & \\
& A\coprod C \arrow[r, "f'\coprod h'"] \arrow[d, "g'\coprod k'"'] & A'\coprod C' \arrow[d, "g\coprod k"] \\
& B\coprod D \arrow[r, "f\coprod h"'] & B'\coprod D'
\end{tikzcd}$$

در دیاگرام های زیر به وضوح دو مربع پایینی عقب بر هستند و عقب برهای بالایی را تشکیل

می دهیم.

$$\begin{tikzcd}
E_1' \arrow[r, tail, "\nu_1''"] \arrow[d, "e_1'"'] & E \arrow[d, "e'"'] & E_2' \arrow[l, tail, "\nu_2''"'] \arrow[d, "e_2'"] \\
A' \arrow[r, tail, "\nu_1'"'] \arrow[d, "g"'] & (A'\coprod C') \arrow[d, "g\coprod k"'] & C' \arrow[l, tail, "\nu_2'"] \arrow[d, "k"] \\
B' \arrow[r, tail, "\nu_1"'] & (B'\coprod D') & D' \arrow[l, tail, "\nu_2"]
\end{tikzcd}$$

و

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, tail, "\nu_1**"] \arrow[d, "e_1"'] & E \arrow[d, "e"'] & E_2 \arrow[l, tail, "\nu_2**"'] \arrow[d, "e_2"] \\
B \arrow[r, tail, "\nu_1*"'] \arrow[d, "f"'] & (B\coprod D) \arrow[d, "f\coprod h"'] & D \arrow[l, tail, "\nu_2*"] \arrow[d, "h"] \\
B' \arrow[r, tail, "\nu_1"'] & (B'\coprod D') & D' \arrow[l, tail, "\nu_2"]
\end{tikzcd}$$

دیاگرام های زیر را داریم.

$$\begin{tikzcd}
E_1' \arrow[r, "ge_1'"] \arrow[d, "\nu_1''"'] & B' \arrow[d, "\nu_1"] \\
E \arrow[r, "(g\coprod k)e'"] & B'\coprod D' \\
E_2' \arrow[r, "ke_2'"'] \arrow[u, "\nu_2''"] & D' \arrow[u, "\nu_2"']
\end{tikzcd}
\quad \text{و} \quad
\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "fe_1"] \arrow[d, "\nu_1**"'] & B' \arrow[d, "\nu_1"] \\
E \arrow[r, "(f\coprod h)e"] & B'\coprod D' \\
E_2 \arrow[r, "he_2"'] \arrow[u, "\nu_2**"] & D' \arrow[u, "\nu_2"']
\end{tikzcd}$$

از دیاگرام های بالا، قضیه ۳.۳.۱ و تساوی $(g\coprod k)e' = (f\coprod h)e$ خواهیم داشت:

$$E_۱ = E_۱{}' \text{ و } E_۲ = E_۲{}'$$

همچنین از دیاگرام های بالا نتیجه می شود که:

$$E = E_۱ \coprod E_۲,\ e' = e'_۱ \coprod e'_۲,\ e = e_۱ \coprod e_۲,\ fe_۱ = ge'_۱$$

و

$$he_۲ = ke'_۲$$

ازمربع های عقب بر

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & A' \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & B' \end{tikzcd} \quad \text{و} \quad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "k'"'] & C' \arrow[d, "k"] \\ D \arrow[r, "h"'] & D' \end{tikzcd}$$

ریختی های$\varphi_۱ : E_۱ \longrightarrow A$و$\varphi_۲ : E_۲ \longrightarrow C$حاصل می شوند، به قسمی که:

$$f'\varphi_۱ = e'_۱,\ g'\varphi_۱ = e_۱,\ h'\varphi_۲ = e'_۲$$

و

$$k'\varphi_۲ = e_۲.$$

حال تعریف کنید:

$$\varphi = \varphi_۱ \coprod \varphi_۲ : E \longrightarrow A \coprod C$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$(f' \coprod h')\varphi = (f' \coprod h')(\varphi_۱ \coprod \varphi_۲) = f'\varphi_۱ \coprod h'\varphi_۲ = e'_۱ \coprod e'_۲ = e' \text{ ،}$$

و

$$(g' \coprod k')\varphi = (g' \coprod k')(\varphi_۱ \coprod \varphi_۲) = g'\varphi_۱ \coprod k'\varphi_۲ = e_۱ \coprod e_۲ = e.$$

منحصربفردی φ به آسانی نتیجه می شود. □

قضیه ۵.۳.۱. *توابع* $A \xrightarrow{\gamma} C$ ، $C \xrightarrow{\alpha} E$ ، $B \xrightarrow{\xi} D$ *و* $D \xrightarrow{\beta} E$ *را در رسته*

مجموعه ها در نظر بگیرید. در این صورت

$$(\alpha \bigoplus \beta)(\gamma \coprod \xi) = \alpha\gamma \bigoplus \beta\xi$$

برهان. توابع $\gamma \coprod \xi : A \coprod B \longrightarrow C \coprod D$ و $\alpha \bigoplus \beta : C \coprod D \longrightarrow E$ را داریم.

مربع های جابجایی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\nu_1"] \arrow[d, "\gamma"'] & A \coprod B \arrow[d, "\gamma \coprod \xi"] & B \arrow[l, "\nu_2"'] \arrow[d, "\xi"] \\ C \arrow[r, "\nu'_1"'] & C \coprod D & D \arrow[l, "\nu'_2"] \end{tikzcd}$$

لذا تساوی های زیر را به دست می آوریم.

$$(\alpha \bigoplus \beta)(\gamma \coprod \xi)\nu_1 = (\alpha \bigoplus \beta)((\gamma \coprod \xi)\nu_1) = (\alpha \bigoplus \beta)(\nu'_1\gamma) =$$

$$((\alpha \bigoplus \beta)\nu'_1)\gamma = \alpha\gamma = (\alpha\gamma \bigoplus \beta\xi)\nu_1$$

(۱)

$$(\alpha \bigoplus \beta)(\gamma \coprod \xi)\nu_2 = (\alpha \bigoplus \beta)((\gamma \coprod \xi)\nu_2) = (\alpha \bigoplus \beta)(\nu'_2\xi) =$$

$$((\alpha \bigoplus \beta)\nu'_2)\xi = \beta\xi = (\alpha\gamma \bigoplus \beta\xi)\nu_2$$

(۲)

از آنجاییکه ν_1 و ν_2 نگاشت های شمول هم-ضرب هستند، لذا از تساوی های (۱) و (۲) نتیجه می شود:

$$(\alpha \bigoplus \beta)(\gamma \coprod \xi) = \alpha\gamma \bigoplus \beta\xi$$

□

قضیه ۶.۳.۱. *ریختی های* $g_\alpha : A_\alpha \longrightarrow B$ *و* $f : B \longrightarrow A$ *را در نظر بگیرید. آنگاه:*

$$\oplus_\alpha(fg_\alpha) = f\oplus_\alpha g_\alpha$$

گزاره ۷.۳.۱. *فرض کنید مربع*

$$\begin{tikzcd} P_\beta \arrow[r, "{f^*}_\beta"] \arrow[d, "{g^*}_\beta"'] & B_\beta \arrow[d, "g_\beta"] \\ A \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

دیاگرام۱ .۳ .۱

در رسته مجموعه ها عقب بر باشد. آنگاه مربع

$$\begin{tikzcd} \coprod_J P_\beta \arrow[r, "\coprod_J {f^*}_\beta"] \arrow[d, "\bigoplus_J {g^*}_\beta"'] & \coprod_J B_\beta \arrow[d, "\bigoplus_J g_\beta"] \\ A \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

عقب برمی باشد.

برهان. تساوی

$$(\bigoplus_J g_\beta)(\coprod_J {f^*}_\beta) = \bigoplus_J (g_\beta {f^*}_\beta) = \bigoplus_J (f {g^*}_\beta) = f(\bigoplus_J {g^*}_\beta)$$

برقراراست.

حال s و t را ریخت های دلخواهی در نظر بگیرید به طوری که مربع بیرونی دیاگرام زیر جابجاشود.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[drr, bend left, "t"] \arrow[dr, bend right, "s"'] & & \\ & \coprod_J P_\beta \arrow[r, "\coprod_J {f^*}_\beta"] \arrow[d, "\bigoplus_J {g^*}_\beta"'] & \coprod_J B_\beta \arrow[d, "\bigoplus_J g_\beta"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

از مربع عقب بر

$$\begin{tikzcd} C_\beta \arrow[r, "t_\beta"] \arrow[d, "\nu_\beta"'] & B_\beta \arrow[d, "{\nu'}_\beta"] \\ C \arrow[r, "t"'] & \coprod_J B_\beta \end{tikzcd}$$

دیاگرام۱ .۳ .۲

نتیجه می شود:

$$t = \coprod_J t_\beta \text{ و } C = \coprod_J C_\beta$$

لذا تساوی زیر را به دست می آوریم:

$$fs\nu_\beta = (\bigoplus_J g_\beta)t\nu_\beta = (\bigoplus_J g_\beta)\nu'_\beta t_\beta = g_\beta t_\beta$$

از آنجایی که دیاگرام ۱.۳.۱ عقب بر بوده و تساوی $fs\nu_\beta = g_\beta t_\beta$ برقرارمی باشد بنابراین ریختی منحصربفرد $k_\beta : C_\beta \longrightarrow P_\beta$ چنان موجوداست که تساوی های $f^*{}_\beta k_\beta = t_\beta$ و $g^*{}_\beta k_\beta = s\nu_\beta$ در دیاگرام زیر صادق می باشد.

$$\begin{tikzcd}
C_\beta \arrow[dr, "k_\beta"'] \arrow[drr, bend left, "t_\beta"] \arrow[ddr, bend right, "s\nu_\beta"'] & & \\
& P_\beta \arrow[r, "f^*{}_\beta"] \arrow[d, "g^*{}_\beta"'] & B_\beta \arrow[d, "g_\beta"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

ریختی $k = \coprod_J k_\beta : C = \coprod_J C_\beta \longrightarrow \coprod_J P_\beta$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$(\bigoplus_J g^*{}_\beta)k = \bigoplus_J (g^*{}_\beta k_\beta) = \bigoplus_J (s\nu_\beta) = s(\bigoplus_J \nu_\beta) = s$$

و

$$(\coprod_J f^*{}_\beta)k = \coprod_J (f^*{}_\beta k_\beta) = \coprod_J t_\beta = t$$

بنابراین دیاگرام زیر را به دست می آوریم.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, "k"'] \arrow[drr, bend left, "t"] \arrow[ddr, bend right, "s"'] & & \\
& \coprod_J P_\beta \arrow[r, "\coprod_J f^*{}_\beta"] \arrow[d, "\bigoplus_J g^*{}_\beta"'] & \coprod_J B_\beta \arrow[d, "\bigoplus_J g_\beta"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

برای اثبات منحصربفردی ریختی k، فرض کنید ریختی $k' : C \longrightarrow \coprod_J P_\beta$ چنان داده شده باشد که درتساوی های $(\bigoplus_J g^*{}_\beta)k' = s$ و $(\coprod_J f^*{}_\beta)k' = t$ صدق نماید.

مربع عقب بر زیر را در نظر می گیریم.