بسم الله الرحمن الرحيم

١٠٢٦٤٢

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه علوم پایه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

خواص سایه زدن ضعیف برای C^1- دیفئومورفیسم ها

توسط:

محبوبه رنگریز

استاد راهنما:

دکتر عباس فخاری

استاد مشاور:

دکتر غلامرضا عباسپورتبادکان

شهریورماه ۱۳۸۷

بسم الله الرحمن الرحیم

خواص سایه زدن ضعیف برای C^1 – دیفئومورفیسم ها

توسط:

محبوبه رنگریز

پایان نامه ارائه شده به تحصیلات تکمیلی

به عنوان بخشی از فعالیت های لازم جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض- گرایش سیستم های دینامیکی

از

دانشگاه علوم پایه دامغان

دامغان - ایران

ارزیابی و تصویب شده توسط کمیته ی داوران با درجه عالی

امضای اعضای کمیته پایان نامه:

۱. دکتر عباس فخاری، استادیار دانشکده ریاضی دانشگاه علوم پایه دامغان(استاد راهنما)

۲.دکتر غلامرضا عباسپور، استادیار دانشکده ریاضی دانشگاه علوم پایه دامغان(استاد مشاور)

۳.دکتر علی گلمکانی، استادیار دانشگاه غیرانتفاعی خیام مشهد(استاد داور)

۴.دکتر سید علی تقوی، استادیار دانشکده ریاضی دانشگاه علوم پایه دامغان(استادداور)

۵.دکتر اکبر هاشمی برزآبادی، استادیار دانشکده ریاضی دانشگاه علوم پایه دامغان(نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ماه ۱۳۸۷

تقدیم به

پدرم و روح پر مهر مادرم

سپاسنامه

در آغاز لازم می‌دانم از زحمات خانواده‌ام که در دوران تحصیل همواره مشوق و پشتیبان من بوده‌اند، کمال تشکر را بنمایم. همچنین از زحمات بی دریغ استاد راهنما، جناب آقای دکتر فخاری که در طول یک سال گذشته با راهنمایی‌های خود راهگشای اینجانب بوده‌اند و از استاد مشاور، جناب آقای دکتر عباسپور کمال سپاسگذاری را دارم. همچنین از اساتید محترم گروه ریاضی بویژه آقای مهندس طهماسبی، آقای دکتر گچ پزان، آقای دکتر تقوی و سایر دوستانم تشکر و قدردانی می‌نمایم.

محبوبه رنگریز

شهریور ۱۳۸۷

چکیده

سیستم دینامیکی گسسته عبارت است از جفت (M, f) که در آن M یک فضای متریک و f یک نگاشت پیوسته است. هدف اصلی در سیستم‌های دینامیکی درک ماهیت مدار $\{f^n(x)\}_{n\in Z}$، است. در این رساله ما خواص سایه زدن ضعیف را در سیستم‌های دینامیکی به شیوه‌ی زیر مورد مطالعه قرار می‌دهیم:

ما مدارهای کاملی که فاصله‌ی هاسدورف بین بستارآنها با بستار مدارهای تقریبی آنها بسیار کوچک است را جستجو می‌کنیم. بعلاوه برخی از مجموعه‌های باز شامل دیفئومورفیسم‌هایی که دارای ویژگی فوق هستند و همچنین دیفئومورفیسم‌های Ω–پایدار را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

در بخش اول از فصل دوم شرایطی را بدست می آوریم که تحت این شرایط، دیفئومورفیسم‌های خطی، خاصیت سایه زدن ضعیف نوع دوم دارند. در بخش دوم از این فصل ثابت می‌کنیم هر سیستم دینامیکی روی فضای فشرده، خاصیت سایه زدن ضعیف نوع دوم دارد و در واقع نشان می‌دهیم C^1–درون مجموعه‌ی دیفئوموریسم‌هایی که خاصیت سایه زدن ضعیف نوع دوم دارند، با مجموعه‌ی دیفئومورفیسم‌ها برابر است. در بخش سوم برخی مجموعه‌های باز، متشکل از دیفئومورفیسم‌هایی که خاصیت سایه زدن ضعیف نوع دوم دارند را بررسی می‌کنیم. در فصل سوم این رساله ثابت می‌کنیم هرگاه نمودار فاز یک دیفئومورفیسم Ω–پایدار، زنجیری با طول بزرگتر از ۳ نداشته باشد، خاصیت سایه زدن ضعیف نوع اول دارد. مراجع اصلی ما در این رساله، مقاله‌های [۲۱] و [۳۱] می‌باشند.

کلمات کلیدی: مدار– پایداری ساختاری — سایه زدن

فهرست مندرجات

پیشگفتار

خاصیت سایه زدن از مهمترین نظریه‌ها در سیستم‌های دینامیکی است. یکی از انواع سایه زدن، سایه زدن ضعیف است که این مفهوم اولین بار توسط کُرلِس و پیلیوگین مطرح شد و بعدها تحقیقات وسیعی در این زمینه بوسیله‌ی افرادی چون ساکایی و پلامنسکایا نیز انجام شد. در سال ۱۹۹۹، کُرلِس و پیلیوگین ثابت کردند خاصیت سایه زدن ضعیف در سیستم‌های دینامیکی که روی منیفلدهای هموار و فشرده تعریف می‌شوند، یک خاصیت C^0–ژنریک است. علاوه بر سیستم‌های غیرخطی، خاصیت سایه زدن ضعیف در سیستم‌های خطی نیز مورد مطالعه قرار گرفت به‌طوری‌که پیلیوگین ثابت کرد سیستم‌های خطی نیز دارای خاصیت سایه زدن هستند.

در ۴۰ سال اخیر یکی از موضوعات مهم و قابل توجه در زمینه‌ی سیستم‌های دینامیکی، سیستم‌های پایدار بوده‌اند. از جمله‌ی مهمترین ویژگی‌های این نوع سیستم‌ها، خاصیت سایه‌زدن است. شیوه‌های مختلفی به کار برده شد تا نشان داده شود که سیستم‌های پایدار نیز خاصیت سایه‌زدن دارند. لذا از آن‌جایی که سیستم‌های پایدار به عنوان سیستم‌های قابل پیش‌بینی مطرح هستند، هر گونه مشخص سازی آنها بر حسب پارامترها و دیگر خواص، می‌تواند در شناسایی بیشتر آنها کمک کند. این مشخص سازی توسط افرادی چون ساکایی، پیلیوگین و لن‌ون، با یافتن C^1–درون مجموعه‌ی دیفئومورفیسم‌هایی که خاصیت سایه زدن دارند، انجام شد. ساکایی ثابت کرد که C^1–درون مجموعه‌ی دیفئومورفیسم‌هایی که خاصیت سایه زدن معمولی دارند با مجموعه‌ی دیفئومورفیسم‌هایی که پایدار ساختاری هستند، برابر است.

فصل ۱

مقدّمات

در ابتدا برخی از مفاهیم و قضایای اولیه در سیستم‌های دینامیکی را یادآوری می‌کنیم:
فرض کنید M یک فضای متریک فشرده با متریک d و $f : M \to M$ یک همیومورفیسم باشد. همچنین فرض کنید 2^X، مجموعه‌ی تمام زیر مجموعه‌های بسته‌ی M باشد. برای هر X و Y متعلق به 2^X، متر هاسدورف [1] d_H را روی 2^X بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d_H(X,Y) = \inf\{\varepsilon > 0;\ X \subseteq \mathcal{N}_\varepsilon(Y),\ \ Y \subseteq \mathcal{N}_\varepsilon(X)\},$$

که در آن $\mathcal{N}_\varepsilon$، یک ε–همسایگی با متر d از هر زیرمجموعه‌ای از M می‌باشد. بعبارت دیگر هرگاه M یک فضای متریک فشرده با متر هاسدورف باشد و $A \subseteq M$. دراین صورت همسایگی به شعاع $\varepsilon > 0$ حول A را با نماد $\mathcal{N}(\varepsilon, A)$ نمایش می‌دهیم که عبارت‌است از $\mathcal{N}(\varepsilon, A) = \{x \in M;\ d_H(x, A) < \varepsilon\}$.

هرگاه M یک فضای توپولوژیک باشد، خاصیت P از فضای M، ژنریک [2] نامیده می‌شود اگر مجموعه‌ی همه‌ی x های متعلق به M، که در خاصیت P صدق می کنند، مجموعه‌ی

[1] Hausdorff Metrice
[2] Generic

مانده‌ای باشند یعنی شامل اشتراک شمارایی از مجموعه‌های باز و چگال باشند.

هرگاه M یک منیفلد فشرده و بدون مرز و $f: M \to M$ یک دیفئومورفیسم باشد، مجموعه‌ی C^r–دیفئومورفیسم‌های روی M را با $Diff^r(M)$ نمایش می‌دهیم. هدف اصلی سیستم‌های دینامیکی مطالعه‌ی ساختار توپولوژیکی مدارهای $f: M \to M$ می‌باشد که f می‌تواند یک همیومورفیسم و یا یک دیفئومورفیسم باشد. برای هر دیفئومورفیسم $f: M \to M$ و برای هر x متعلق به M، مدار f در نقطه‌ی x عبارت‌است از

$$O(x,f) = \{f^n(x);\ n \in \mathbf{Z}\}.$$

و مدارهای جلویی و عقبی f به ترتیب عبارتند از تکرارهای مثبت و منفی x توسط f. یعنی

$$O^+(x,f) = \left\{x, f(x), f^{۲}(x), \ldots\right\} \text{ و } O^-(x,f) = \left\{\ldots, f^{-۲}(x), f^{-۱}(x), x\right\}.$$

برای هر دو نقطه‌ی x, y در M، گوییم $\varepsilon-$ زنجیراز x به y وجود دارد هرگاه دنباله‌ی متناهی $\{x = x_۰, x_۱, \ldots, x_n = y\}$ به‌قسمی وجود داشته باشد که نامساوی $d(f(x_i), x_{i+۱}) < \varepsilon$، برای هر i متعلق به مجموعه‌ی $\{۰, ۱, \ldots, n-۱\}$، برقرار باشد.

x را یک نقطه متناوب برای f گوییم هرگاه عدد n، بزرگتر یا مساوی با ۱ چنان موجود باشد که $f^n(x) = x$. به کوچکترین عدد صحیح مثبت با این ویژگی، تناوب x گوییم و مجموعه‌ی این نقاط را با $Per(f)$ نمایش می‌دهیم.

نقطه‌ی تناوبی با تناوب ۱ را نقطه‌ی ثابت f می‌نامیم و مجموعه‌ی این نقاط را با $Fix(f)$ نمایش می‌دهیم.

توجه داریم که هرگاه x یک نقطه‌ی تناوبی برای f با تناوب n باشد، آن‌گاه $O(x,f) = \left\{x, f(x), \ldots, f^{n-۱}(x)\right\}$ و همچنین اگر x یک نقطه ثابت برای f باشد آن‌گاه $O(x,f) = \{x\}$. مجموعه‌ی $\Lambda \subseteq M$ را تحت f، پایا گوییم هرگاه $f(\Lambda) \subseteq \Lambda$.

۱.۱ مجموعه‌های حدی

فرض کنید $\mathcal{H}(M)$ مجموعه‌ی همه‌ی همیومورفیسم‌های روی M باشد.

تعریف ۱.۱.۱: فرض کنید f، متعلق به مجموعه‌ی $\mathcal{H}(M)$ باشد. برای هر x متعلق به M، مجموعه‌ی $\omega-$ حدی از x را با نماد $\omega_f(x)$، نمایش می‌دهیم که عبارت است از

$$\omega_f(x) = \{y \in M : \exists \{n_i\};\ y = \lim_{n_i \to +\infty} f^{n_i}(x)\}.$$

و مجموعه‌ی $\alpha-$ حدی برای x را با نماد $\alpha_f(x)$، نمایش می‌دهیم که عبارت است از

$$\alpha_f(x) = \{y \in M : \exists \{n_i\};\ y = \lim_{n_i \to -\infty} f^{n_i}(x)\}.$$

هرگاه $L_-(f) = \overline{\bigcup_{x\in M} \alpha_f(x)}$ و $L_+(f) = \overline{\bigcup_{x\in M} \omega_f(x)}$، آن‌گاه قرار می‌دهیم

$$L(f) = L_+(f) \cup L_-(f),$$

که به $L(f)$ مجموعه‌ی نقاط حدی f، گوییم.

مفهوم زنجیر بازگشتی اولین بار توسط کانلی [۱] مطرح شد و در واقع راهی برای بدست آوردن خواص بازگشتی یک سیستم دینامیکی، می‌باشد.

تعریف ۲.۱.۱: نقطه‌ی x متعلق به M را زنجیر بازگشتی گوییم هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، یک $\varepsilon-$زنجیر از x به خودش وجود داشته باشد. مجموعه‌ی این نقاط را با $CR(f)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۳.۱.۱: هرگاه M یک فضای متریک با متر d و $f : M \to M$ یک همیومورفیسم باشد. دنباله‌ی $\xi = \{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ را یک $\varepsilon-$ شبه مدار $(\varepsilon > 0)$ برای سیستم دینامیکی f گوییم هرگاه برای هر i متعلق به مجموعه‌ی اعداد صحیح، $d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$.

[۱] Conley

تعریف ۴.۱.۱: نقطه‌ی x، متعلق به M را یک نقطه‌ی سرگردان برای دیفئومورفیسم f گوئیم، هرگاه همسایگی U از x وجود داشته باشد به‌قسمی که برای هر عدد صحیح n متعلق به $Z\setminus\{0\}$، داشته باشیم $f^n(U)\cap U=\emptyset$ و نقطه‌ی x را یک نقطه‌ی ناسرگردان f گوییم هرگاه، سرگردان نباشد. به عبارت دیگر برای هر همسایگی U از x، عدد صحیح k وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f^k(U)\cap U\neq\emptyset$. مجموعه‌ی نقاط ناسرگردان f را با $\Omega(f)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۵.۱.۱: برای هر همیومورفیسم $f:M\to M$

۱) $Fix(f)\subset\overline{Per(f)}\subset L(f)\subset\Omega(f)\subset CR(f)$.

۲) $Fix(f)$، $L(f)$، $\Omega(f)$ و $CR(f)$، زیرمجموعه‌هایی بسته از M و f–پایا هستند امّا، $Per(f)$ در حالت کلی در M بسته نیست.

۳) $K(f)=K(f^{-1})$ که در آن، $K=Fix,\ Per,\ \Omega,\ CR$.

برهان . به [۳] مراجعه کنید. □

قضیه ۶.۱.۱: هرگاه f، یک همیومورفیسم از فضای متریک و فشرده‌ی M باشد آن‌گاه $CR(f|_{CR(f)})=CR(f)$. امّا در حالت کلی نمی‌توان نتیجه گرفت که $\Omega(f|_{\Omega(f)})=\Omega(f)$.

برهان . به [۳] مراجعه کنید. □

۲.۱ مجموعه‌های پایدار و ناپایدار

فرض کنید f متعلق به مجموعه‌ی $Diff^r(M)$ و نقطه‌ی p متعلق به M باشند.

تعریف ۱.۲.۱: مجموعه‌ی پایدار f در نقطه‌ی p عبارت است از

$$W^s(p)=\{x\in M\ ;\ d(f^n(x),f^n(p))\to 0,\ n\to\infty\}.$$

وبه‌طور مشابه مجموعه‌ی ناپایدار f در نقطه‌ی p عبارت است از

$$W^u(p) = \{x \in M \ ; \ d(f^{-n}(x), f^{-n}(p)) \to \circ, \ n \to \infty\}.$$

تعریف ۲.۲.۱: برای هر $\varepsilon > \circ$، مجموعه‌ی موضعاً پایدار f در نقطه‌ی p عبارت است

$$W^s_\varepsilon(p) = \{x \in M \ ; \ d(f^n(x), f^n(p)) < \varepsilon, \ n \geq \circ\}.$$

و به‌طور مشابه مجموعه‌ی موضعاً ناپایدار f در نقطه‌ی p عبارت است

$$W^u_\varepsilon(p) = \{x \in M \ ; \ d(f^{-n}(x), f^{-n}(p)) < \varepsilon, \ n \geq \circ\}.$$

تعریف ۳.۲.۱: فرض کنید $f : X \to X$ و $g : Y \to Y$ همیومورفیسم‌هایی از فضای متریک و فشرده‌ی X و Y باشند. گوئیم f و g، مزدوج توپولوژیک یکدیگرند اگر همیومورفیسم $h : X \to Y$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $hof = goh$.

تعریف ۴.۲.۱: فرض کنید $r \geq \circ$ و $C^r(M, \mathbf{R}^s)$، فضای تمام نگاشت‌های C^r از M به $\mathbf{R}^s$ باشد. اگر M فشرده باشد، می‌توان یک پوشش متناهی از همسایگی‌های باز $V_1, \ldots, V_k$ برای M چنان یافت که هر V_i در دامنه‌ی یک همسایگی مختصاتی (U_i, ϕ_i)، قرار داشته باشد به‌طوری‌که $\phi_i(V_i) = B_1(\circ)$ و $\phi_i(U_i) = B_2(\circ)$ که $B_\varepsilon(x)$ گویی به شعاع ε و مرکز x است.
برای هر f متعلق به $C^r(M, \mathbf{R}^s)$، قرار می‌دهیم

$$f_i = fo\phi_i^{-1} : B_2(\circ) \to \mathbf{R}^s$$

و

$$\|f\|_r = Max_{i=1,2,\ldots,k} sup\{\|f_i(u)\|, \|Df_i(u)\|, \ldots, \|D^r f_i(u)\| : u \in B_1(\circ)\}.$$

توپولوژی تعریف شده توسط نرم بالا را C^r–توپولوژی گوئیم.

یکی از نظریه‌های مهم در سیستم‌های دینامیکی، مفهوم پایداری ساختاری می‌باشد. این مفهوم اولین بار در سال ۱۹۳۷ توسط آندرانف[۱] و پونتریاگین[۲] مطرح شد.

تعریف ۱.۲.۵: C^r–دیفئومورفیسم $f : M \to M$ را در نظر بگیرید. برای هر $r \geq ۱$ دیفئومورفیسم f، C^r–پایداری ساختاری دارد هرگاه یک C^r–همسایگی مثل $\mathcal{U}(f)$ از f در $Diff^r(M)$، وجود داشته باشد به‌قسمی‌که هر g متعلق به $\mathcal{U}(f)$، مزدوج توپولوژیک با f باشد.

مجموعه‌ی همه‌ی دیفئومورفیسم‌هایی که خاصیت پایداری ساختاری دارند را با نماد SS نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱.۲.۶: فرض کنید f متعلق به $Diff^r(M)$ باشد. برای هر $r \geq ۱$ دیفئومورفیسم f، $C^r-\Omega(f)$–پایداراست اگروتنهااگر C^r–همسایگی $\mathcal{U}(f)$ از f وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر g متعلق به $\mathcal{U}(f)$، همیومورفیسم $h(g) : \Omega(f) \to \Omega(g)$ وجود داشته باشد به‌قسمی‌که، $hof|_{\Omega(f)} = g|_{\Omega(g)}oh$.

برهان . [۱۴] را ببینید. □

دیفئومورفیسم‌های $CR(f)$–پایدار، $L(f)$–پایدار و $\overline{Per(f)}$–پایدار نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند.

۱.۳ مفاهیم و فضاهای توپولوژیکی

تعریف ۱.۳.۱: زیرمجموعه‌ی فشرده و پایای $A \subset M$ را زنجیری ترایا گوئیم هرگاه برای هر دو عنصر x, y متعلق به مجموعه‌ی A و برای هر $\varepsilon > ۰$، یک ε–زنجیر از x به y وجود داشته باشد.

---
[۱] Andronov
[۲] Pontryagin

تعریف ۲.۳.۱: زیرمجموعه‌ی Y از مجموعه‌ی $CR(f)$ را مؤلفه‌ی زنجیری گوئیم هرگاه Y زنجیری ترایا باشد و هر مجموعه‌ای که به طور محض Y را شامل می‌شود، زنجیری ترایا نباشد.

مفهوم ترایا توپولوژیک یکی از مفاهیم مهم در سیستم‌های دینامیکی آشوبناک است که مطالعات زیادی در این زمینه توسط افرادی چون گلاسنر[۱]، آکین[۲] و... انجام شد.

تعریف ۳.۳.۱: دیفئومورفیسم f متعلق به مجموعه‌ی $Diff^r(M)$ را ترایا توپولوژیک گوئیم هرگاه برای هر دو مجموعه‌ی باز و ناتهی U و V در M، عدد صحیح و مثبت k وجود داشته باشد به‌قسمی که $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

تعریف ۴.۳.۱: دیفئومورفیسم f متعلق به مجموعه‌ی $Diff^r(M)$ را آمیخته توپولوژیک گوئیم اگروتنهااگر برای هر دو مجموعه ی باز U و V در M، عدد صحیح n_0 وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر n بزرگتر یا مساوی n_0 ، $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

قضیه ۵.۳.۱: هرگاه (M, f) یک سیستم دینامیکی باشد، شرایط زیر معادلند:

۱) f ترایا توپولوژیک است.

۲) برای هر دو مجموعه‌ی باز و ناتهی U و V در M، عدد صحیح و مثبت k وجود دارد به‌طوری‌که $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

۳) زیرمجموعه‌ی مانده‌ای R در M وجود دارد به‌قسمی‌که برای هر x متعلق به R، $O(x, f)$ در M، چگال است.

۴) $\Omega(f) = M$

[۱] Glasner
[۲] Akin

برهان . به [۱۳] مراجعه کنید. □

تعریف ۶.۳.۱: همیومورفیسم f را پایدارتوپولوژیک گوئیم هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که اگر $g : M \to M$، همیومورفیسمی باشد که برای هر x متعلق به M، $d(f(x), g(x)) < \delta$ آن‌گاه نگاشت پیوسته‌ی $h : M \to M$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر x متعلق به M، اولاً $hog(x) = foh(x)$ و ثانیاً $d(h(x), x) < \varepsilon$.

مفهوم گسترشی، اولین بار در سال ۱۹۶۰ بر روی همیومورفیسم‌های ناپایدار مطرح شد.

تعریف ۷.۳.۱: همیومورفیسم f از فضای متریک M با متر d را گسترشی گوئیم هرگاه عدد $c > 0$ وجود داشته باشد به‌قسمی‌که برای هر x و y متعلق به M که x مخالف با y است، عدد صحیح n وجود داشته باشد به‌قسمی‌که $d(f^n(x), f^n(y)) > c$. به عدد c، ثابت گسترشی برای f گفته می‌شود.

در [۳] ثابت شده است که همیومورفیسم f از فضای متریک و فشرده‌ی M، گسترشی است اگروتنهااگر برای هر $k \geq 0$، f^k گسترشی باشد.

قضیه ۸.۳.۱: فرض کنید f یک نگاشت خطی روی فضای اقلیدسی $\mathbf{R}^n$ ($n > 1$)، با متر معمولی d باشد. f تحت d گسترشی است اگروتنهااگر f هیچ مقدار ویژه‌ای برابر با قدرمطلق ۱ نداشته باشد.

برهان . به [۳] مراجعه کنید. □

تعریف ۹.۳.۱: برای $\varepsilon > 0$ ثابت، گوئیم نقطه‌ی x متعلق به M، δ–شبه‌مدار $\xi = \{x_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$ را ε–سایه می‌زند هرگاه برای هر عدد صحیح i، داشته باشیم $d(f^i(x), x_i) < \varepsilon$ و اصطلاحاً گوئیم x، ξ را ε–سایه می‌زند.

تعریف ۱۰.۳.۱: نگاشت $f : M \to M$ دارای خاصیت سایه زدن شبه‌مدارها $(POTP)$ است اگر برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که هر δ–شبه‌مدار از f توسط نقطه‌ای در M، ε–سایه زده شود.

قضیه ۱۱.۳.۱: f دارای خاصیت سایه زدن شبه‌مدارها است اگروتنهااگر برای هر k متعلق به $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$، f^k دارای خاصیت سایه زدن شبه‌مدارهاباشد.

برهان . به [۳] مراجعه کنید. □

قضیه ۱۲.۳.۱: هرگاه M و N دو فضای متریک فشرده باشند و همیومورفیسم‌های $f : M \to M$ و $g : N \to N$، مزدوج توپولوژیک یکدیگر باشند، دراین صورت f خاصیت سایه زدن شبه‌مدارها دارد اگروتنهااگر g چنین باشد.

برهان . به [۱۳] مراجعه کنید. □

تعریف ۱۳.۳.۱: فرض کنید M یک فضای متریک فشرده و f متعلق به مجموعه‌ی $Diff^r(M)$ باشد. f دارای مختصات متعارفی است هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ ای وجود داشته باشد به‌طوری‌که اگر $d(x, y) < \delta$، آن‌گاه $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y) \neq \emptyset$.

تعریف ۱۴.۳.۱: همیومورفیسم f دارای مختصات هذلولوی است اگر f نسبت به متر d، دارای مختصات متعارفی باشد و ثابت‌های $0 < \lambda < 1$ و $a \geq 1$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای هر x متعلق به M، اگر y متعلق به $W^s_\varepsilon(x)$ باشد آن‌گاه برای هر $n \geq 0$،

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq a\lambda^n d(x, y).$$

و اگر y متعلق به $W^u_\varepsilon(x)$ باشد آن‌گاه برای هر $n \geq 0$،

$$d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq a\lambda^n d(x, y).$$

قضیه ۱۵.۳.۱: همیومورفیسم $f : M \to M$، مختصات هذلولوی دارد اگروتنهااگر f گسترشی باشد و خاصیت سایه زدن شبه‌مدارها داشته باشد.

برهان . به [۳] مراجعه کنید. □

قضیه ۱۶.۳.۱: هرگاه f یک همیومورفیسم گسترشی با خاصیت سایه زدن شبه‌مدارها باشد، آن‌گاه $\Omega(f) = \overline{Per(f)}$.

برهان . [۳] را ببینید. □

والتر[۱] و موریموتو[۲] در قالب قضیه‌ای ثابت کردند پایدار توپولوژیک، سایه زدن شبه‌مدارها را نتیجه می‌دهد و در سال ۱۹۷۹ موریموتو در [۱۷] ثابت کرد اگر f، یک همیومورفیسم پایدارتوپولوژیک از منیفلد فشرده‌ی M باشد، آن‌گاه $\Omega(f) = \overline{Per(f)}$.

قضیه ۱۷.۳.۱: ([۳] را ببینید) هرگاه دیفئومورفیسم $f : M \to M$، خاصیت سایه زدن شبه‌مدارها داشته باشد آن‌گاه $CR(f) = \Omega(f)$.

۴.۱ مجموعه‌های هذلولوی

یکی از مفاهیم اساسی در سیستم‌های دینامیکی مشتق پذیر که اغلب هم ارز با پایداری سیستم می‌باشد، مفهوم هذلولوی است که برای اولین بار در سال ۱۹۶۰ مطرح شد. بعدها اسمیل [۳] شرایط کافی برای Ω–پایداری سیستم‌های دینامیکی را بدست آورد و از جمله این شرایط این بود که $\Omega(f)$، ساختار هذلولوی داشته باشد.

[۱] Walter
[۲] Morimoto
[۳] Smale

تعریف ۱.۴.۱: فرض کنید f متعلق به مجموعه‌ی $Diff^r(M)$ باشد و $\Lambda \subset M$ یک مجموعه‌ی بسته و f–پایا باشد. Λ یک مجموعه‌ی هذلولوی برای f است هرگاه ثابت‌های $c > 0$، $0 < \lambda < 1$، نقطه‌ی p متعلق به Λ، E_p^s و E_p^u وجود داشته باشند به‌قسمی‌که

۱) $T_pM = E_p^s \oplus E_p^u$

۲) برای هر نقطه‌ی p، E_p^s و E_p^u، Df_p–پایا باشند. به‌قسمی‌که $Df_p(E_p^s) = E_{f(p)}^s$ و $Df_p(E_p^u) = E_{f(p)}^u$.

۳) برای $n \geq 0$ و برای هر v در E_p^s، $\left\|Df_p^n(v)\right\| \leq c\lambda^n \|v\|$ و برای هر u در E_p^u، $\left\|Df_p^{-n}(v)\right\| \leq c\lambda^{-n} \|v\|$.

تعریف ۲.۴.۱: f متعلق به $Diff^r(M)$ را آنوسوف[۱] گوئیم هرگاه کل M برای f، هذلولوی باشد.

البته در قضیه‌ای ثابت می‌شود که مجموعه‌ی همه‌ی دیفئومورفیسم‌های آنوسوف، یک مجموعه‌ی باز است. قضیه‌ی زیر نیز اولین بار در سال ۱۹۶۷، توسط آنوسوف اثبات شد.

قضیه ۳.۴.۱: هرگاه M یک منیفلد فشرده و دیفئومورفیسم f، آنوسوف باشد آن‌گاه f، دارای پایداری ساختاری است.

برهان . [۱۴] را ببینید. □

قضیه ۴.۴.۱: فرض کنید M یک مجموعه‌ی فشرده و f متعلق به $Diff^r(M)$ باشد. هرگاه Λ مجموعه‌ای هذلولوی و ترایا برای f، باشد به‌قسمی‌که درون Λ مخالف با تهی باشد، آن‌گاه $\Lambda = M$ و f، آنوسوف است.

---

[۱] Anosov