بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (محض)

حلقه‌های تمیز

توسط

سیمین ملا محمودی گاوگانی

استاد راهنما

دکترسید احمد موسوی

خرداد ماه ۱۳۸۷

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

بسمه تعالی

تاییدیه اعضای هیات داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

اعضای هیئت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه خانم سیمین ملامحمودی رشته ریاضی گرایش (محض) تحت عنوان: «**حلقه‌های تمیز**» از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آنرا برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تائید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیداحمد موسوی	دانشیار	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر سیدمحمد باقری	استادیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر علی ایرانمنش	استاد	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر حسین ذاکری	استاد	
۵- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر سیدمحمد باقری	استادیار	

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم پایه

آیین‌نامهٔ چاپ پایان‌نامه (رساله) های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

مادهٔ ۲ در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند

«کتاب حاضر حاصل پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد/رسالهٔ دکتری نگارنده در رشتهٔ ریاضی محض است که در سال ۱۳۸۴ در دانشکدهٔ علوم پایه دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی ~~سرکار خانم~~/جناب آقای دکتر سید احمد موسوی ، مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر ـــــ و مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر ـــــ از آن دفاع شده است.»

مادهٔ ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

مادهٔ ۴- درصورت عدم رعایت مادهٔ ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ‌شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرس، تادیه کند.

مادهٔ ۵- دانشجو تعهد و قبول می‌کند درصورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادهٔ ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

مادهٔ ۶- اینجانب سیمین ملامحمودی کوکانی دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام خانوادگی: سیمین ملامحمودی کوکانی

تاریخ و امضا:

۱۳۸۷/۴/۴

۱۳۸۷/۵/۲۲

دستورالعمل حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیات علمی، دانشجویان، دانش آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی که با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد ذیل را رعایت نمایند:

ماده ۱- حقوق مادی و معنوی پایان نامه‌ها / رساله‌های مصوب دانشگاه متعلق به دانشگاه است و هرگونه بهره‌برداری از آن باید با ذکر نام دانشگاه و رعایت آیین‌نامه‌ها و دستورالعمل‌های مصوب دانشگاه باشد.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و استاد راهنما مسئول مکاتبات مقاله باشند.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب حاصل از نتایج پایان نامه / رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی دانشگاه باید با مجوز کتبی صادره از طریق حوزه پژوهشی دانشگاه و بر اساس آئین نامه های مصوب انجام می‌شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق حوزه پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این دستورالعمل در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۱۳۸۴/۴/۲۵ در شورای پژوهشی دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب لازم الاجرا است و هرگونه تخلف از مفاد این دستورالعمل، از طریق مراجع قانونی قابل پیگیری خواهد بود.

ملاحظه و تایید می‌شود؟

اگر شایسته تقدیم باشد، به

دو الههٔ عشق و مهربانی، پدر و مادر عزیزم.

قدردانی

سپاس و ستایش معبود یگانه را که پرتو الطاف بی‌شمارش بر لحظه لحظهٔ زندگی‌ام ساطع و آشکار است. حمد و ثنا می‌گزارم او را که فکرت و اندیشه را در بستر روحم روان ساخت و بهره‌گیری از خوان گستردهٔ دانش اساتیدم را نصیب و روزی‌ام گردانید.

امتنان و سپاس می‌گزارم تلاشها، زحمات و راهنمایی‌های ظریف، ارزشمند و بی‌شائبهٔ استاد فرزانه و گرانمایه‌ام، جناب دکتر سید احمد موسوی را که با حمیت و جدیت، مرا به دقت، اندیشه، درک و تعمق وامی‌داشتند.

از پدر و مادر عزیزم به خاطر عشق و حمایت مداومشان تشکر می‌کنم.

چکیده

حلقه شرکت پذیر یکتا را تمیز نامیم، در صورتیکه هر عضو آن، جمع یک عضو یکه و یک عضو خودتوان باشد. اگر این نمایش یکتا باشد، حلقه را به طور یکتا تمیز گوییم. حلقه‌های تمیز، توسیع طبیعی حلقه‌های بولی هستند. در واقع یک حلقه تمیز است اگر و تنها اگر به پیمانه رادیکال ژاکبسون، بولی باشد و خود توان‌ها به پیمانه رادیکال ژاکبسون ارتقاء یابند. همچنین نشان می‌دهیم هر تصویر حلقه تمیز، تمیز است و چند مثال از حلقه‌های ناجابجایی تمیز ارائه می‌دهیم.

فرض کنید R یک حلقه و α یک درون ریختی روی آن باشد؛ در این صورت حلقه سریهای توانی اُریب $R[[x,\alpha]]$، تمیز است اگر و تنها اگر برای هر خود توان $e^{2}=e \in R$، داشته باشیم $e=\alpha(e)$.

حلقه عمومی حلقه‌ای است که ممکن است یکدار نباشد. در این پایان‌نامه، بسیاری از نتایج حلقه‌های تمیز را به حلقه‌های عمومی تمیز توسیع می‌دهیم و نشان می‌دهیم هر حلقه معاوضه‌ای، تمیز است.

در این پایان‌نامه، مقالات زیر را مورد مطالعه و بررسی کامل قرار می‌دهیم:

W.K. Nicholson, Y. Zhou, Clean general rings, J. Algebra ۲۹۱ (۲۰۰۵).

J. Han, W.K. Nicholson, Extension of clean ring, Comm. Algebra ۲۹ (۲۰۰۱).

W.K. Nicholson, Y. Zhou, Ring in which element are uniquely the sum of

an idempotent and a unit, *Glasgow Math. J.* ۴۶(۲۰۰۴) ۲۲۷ − ۲۳۶.

واژه‌های کلیدی: حلقه‌های تمیز، عمومی تمیز، بولی، نیم‌بولی، معاوضه‌ای، نیم‌کامل، نیم‌توان، توان، ارتقاء خودتوان‌ها.

فهرست مندرجات

۱ مقدمات ۷

۱.۱ تعاریف و قضایای اساسی ۷

۲ توسیع‌هایی از حلقه‌های تمیز ۱۷

۱.۲ مقدمه ۱۷

۲.۲ حلقه‌های تمیز ۱۷

۳.۲ توسیع های ماتریسی حلقه‌های تمیز ۱۹

۴.۲ اثباتی ساده برای قضیه مشهور کمیلو— یو ۲۳

۵.۲ حلقه چند جمله‌ای‌های حلقه‌های تمیز ۲۷

۳ حلقه‌های بطور یکتا تمیز ۲۹

۱.۳ مقدمه ۲۹

۲.۳ حلقه‌های تمیز ۲۹

۳.۳ قضایای ساختاری ۳۸

۴ حلقه‌های عمومی تمیز ۴۶

۱.۴ مقدمه ۴۶

۲.۴ حلقه‌های عمومی تمیز ۴۷

۳.۴ توسیع حلقه‌های عمومی تمیز ۵۵

۴.۴ حلقه‌های عمومی بطور یکتا تمیز ۶۱

۵.۴ حلقه‌های نیم‌بولی ۶۹

مقدمه

حلقه‌های معاوضه‌ای برای اولین بار توسط وارفیلد[۱] در سال ۱۹۷۲ به صورت زیر معرفی شد. عملگر $\circ$ را روی حلقه کلی تمیز I به صورت $x \circ y = x + y - xy$ تعریف می‌کنیم. $(I, \circ)$ یک منوئید با عضو خنثی صفر است. با استفاده از این تعریف، حلقه I را حلقه معاوضه‌ای می‌نامیم در صورتیکه در یکی از شرایط زیر صدق کند:

۱) برای هر $x \in I$، دو عضو $r, s \in I$ و خود توان $e^۲ = e \in I$ وجود دارد به طوریکه $e = rx = s \circ x$.

۲) برای هر $x \in I$ دو عضو $r, s \in I$ و خود توان $e^۲ = e \in I$ وجود دارد به طوریکه $e = xr = x \circ s$.

و این شرایط به صورت زیر تعمیم می‌یابد[۱۴]:

حلقه R یک حلقه معاوضه‌ای است اگر و فقط اگر برای هر $x \in I$، خودتوان $e^۲ = e = Rx$ وجود داشته باشد به طوریکه $۱ - e \in R(۱ - x)$. به طور معادل عضو خودتوان $e^۲ = e \in xR$ وجود داشته باشد به طوریکه $۱ - e \in (۱ - x)R$.

[۱] Warfield

وارفیلد نشان داد در حلقه‌های معاوضه‌ای، خودتوانها به پیمانه هر ایده‌آل این حلقه ارتقاء می‌یابد. پس از آن نیکلسون در سال ۱۹۷۷ مفهوم حلقه‌های تمیز را بیان کرد و ثابت نمود هر حلقه تمیز، حلقه‌ی معاوضه‌ای است. کمیلو[۲] در سال ۱۹۹۴ گزاره‌های زیر را ثابت کرد:

۱) هر حلقه منظم یکدار، تمیز است.

۲) فرض کنید حلقه R شامل مجموعه نامتناهی از خودتوان‌های متعامد نباشد. در این صورت، R معاوضه‌ای است اگر و تنها اگر تمیز باشد.

چند سال بعد نیکلسون (۱۹۹۸) ثابت کرد تبدیلات خطی شمارا، تمیز هستند و در سال ۲۰۰۱ سؤالی به صورت زیر مطرح کرد:

فرض کنید A و B دو جبر تمیز روی میدان F باشند. آیا $A \otimes_F B$ تمیز است.

طوسی و یاسمی نشان داده‌اند که اگر A و B جبرهای جابجایی روی میدان بستهٔ جبری F باشند، با این خاصیت که A و B هر دو حداکثر شمارا ایده‌آل مینیمال داشته باشند، آنگاه $A \otimes_F B$ تمیز است اگر وتنها اگر A و B تمیز باشند و حداقل یکی از A یا B روی F جبری باشند.

سؤال: اگر M یک مدول آزاد با تولید شمارا روی حلقه تمیز R باشد آیا $\mathbf{end}_R(M)$ تمیز است؟

در [۱۶] نشان داده شده است که تبدیلات خطی روی فضای برداری با بعد شمارا تمیز است. کمیلو (۲۰۰۲) مفهوم $g(x)-$ تمیز را برای حلقه R که $g(x)$ یک چند جمله‌ای روی R می‌باشد را بیان کرد و نشان داد:

---
[۲] Camillo

اگر V_D یک فضای برداری با بُعد حداکثر شمارا روی حلقه تقسیم D باشد و $g(x)$ حداقل دو ریشه در D داشته باشد، آنگاه $End_D(V)$ یک حلقه $g(x)$—تمیز است.

همچنین اندرسون[۳] نشان داد هر حلقه شبه موضعی تمیز است. در همان سال، آذرپناه سؤال کرد که:

آیا حلقه $C(X)$ یک حلقه تمیز است؟

و ثابت کرد شرایط زیر معادلند:

۱) X فضای توپولوژی قویاً صفر بُعدی[۴] است.

۲) $C(X)$ حلقه تمیز است.

۳) یک ایده‌آل اول تمیز در $C(X)$ وجود دارد.

نیکلسون در سال ۲۰۰۴ نشان داد که حلقه درون‌ریختی مدول راست تصویری روی یک حلقه کامل، تمیز است. کمیلو در سال ۲۰۰۶ ثابت کرد، هرگاه M یک مدول پیوسته[۵] باشد در این صورت $End_R(M)$ تمیز است. مرجع اصلی این پایان‌نامه

W.K.Nicholson, Y.Zhou, Clean general rings, J. Algebra ۲۹۱ (۲۰۰۵) ۲۹۷–۳۱۱.

است. یک عضو در حلقه R را تمیز[۶] می‌نامیم هرگاه به صورت جمع یک عضو یکه[۷] و یک عضو خودتوان[۸] باشد و اگر هر عضو حلقه R تمیز باشد حلقه R را تمیز می‌نامیم. به عنوان

---

[۳] Anderson

[۴] Strongly zero-dimention

[۵] Continous module

[۶] *Clean*

[۷] Unit

[۸] Idempotent

مثال هر حلقه نیم کامل [۵] و هر حلقه منظم یکدار [۴] حلقه‌هایی تمیز هستند. تبدیلات خطی شمارا، تمیز است[۱۶]. اگر D یک حلقه تقسیم و V فضای برداری با بعد شمارا روی D باشد، حلقه $end_D(V)$ تمیز است. می‌توان گفت هر حلقه تمیز، حلقه‌ای معاوضه‌ای[۹] است و همچنین نیکلسون[۱۰] نشان داد که یک حلقه با خودتوان‌های مرکزی، تمیز است اگر و تنها اگر معاوضه‌ای باشد[۱۴].

ما در آنالیز تابعی در مبحث C^*- جبرهای یگانه[۳] با حلقه‌های معاوضه‌ای [۲۰] سر و کار داریم که در آن حلقه معاوضه‌ای بودن همان داشتن رتبه حقیقی صفر است. آرا[۱۱] مفهوم یک حلقه معاوضه‌ای بدون عضو یکه را تعریف کرد که‌در طول فصل به آن اشاره می‌کنیم. [۴] اینک ما یک حلقه تمیز را به حلقه‌های عمومی (غیر یکدار) توسعه می‌دهیم و نتایج مشهور را برای این حلقه‌ها تعمیم می‌دهیم.

فرض کنید I یک حلقه عمومی و $A \lhd I$ باشد. اگر I تمیز باشد نشان می‌دهیم که I معاوضه‌ای است اما عکس این مطلب زمانی برقرار است که خودتوان‌های I مرکزی باشند، همچنین حلقه ماتریس‌های $M_n(I)$ تمیز است و هر دو ایده‌آل A و I/A نیز تمیز هستند و خودتوان‌ها به پیمانه A ارتقا یابند، عکس مطلب زمانی برقرار است که $A \subseteq J(I)$ باشد و یا فاکتورهای ابتدایی I آرتینی باشند.

یک حلقه عمومی را حلقه بطور یکتا تمیز می‌نامیم هرگاه هر عضو آن به صورت مجموع منحصر بفردی از یک عضو خودتوان و یک عضو q نوشته شود که برای عضوی مانند p داشته باشیم:

$$p + q + pq = \circ = q + p + qp$$

[۹] Exchange

[۱۰] Nicholson

[۱۱] Ara

همچنین در طول فصل نشان می‌دهیم که یک حلقه عمومی I تمیز است اگر و تنها اگر

(۱) $I/J(I)$ بولی باشد.

(۲) خودتوان‌ها به پیمانه $J(I)$ ارتقا یابند.

(۳) خودتوان‌های I مرکزی باشند.

اگر و تنها اگر

۱) A و I/A بطور یکتا تمیز باشند.

۲) هر خودتوان I/A به یک خودتوان I ارتقا یابند.

۳) $J(I/A) = (A+J)/A$.

در انتها یک حلقهٔ عمومی I را نیم‌بولی نامیم اگر $I/J(I)$ بولی و خودتوان‌ها به پیمانه $J(I)$ ارتقا یابند.

در این پایان‌نامه اصطلاح « حلقه[۱۲]» را برای حلقه شرکت‌پذیرِ یکدار و همچنین اصطلاح « حلقه عمومی [۱۳]» برای حلقه شرکت‌پذیرِ غیر یکدار یا یکدار بکار می‌بریم. برای راحتی حلقه را با R و S، حلقه‌های عمومی را با I, A, B, C و یا L نشان می‌دهیم. گروه اعضای یکه حلقه R را با $U = U(R)$ نشان می‌دهیم، اگر I یک حلقه عمومی باشد I را حلقه رادیکال[۱۴] می‌نامیم اگر $I = J(I)$. وقتی می‌نویسیم $A \lhd I$ یعنی A ایده‌آلی از حلقه I است. حلقه اعداد صحیح را با $\mathbb{Z}$، حلقه ماتریس‌های $n \times n$ روی I را با $M_n(I)$ و همچنین حلقه همه ماتریس‌های بالا مثلثی $n \times n$ روی I را با $T_n(I)$ نمایش می‌دهیم.

تسلسل مطالب در این پایانامه به صورت زیر است.

در فصل اول، تعاریف و قضایای اساسی بیان شده است.

---

[۱۲] Ring

[۱۳] General Ring

[۱۴] Radical Ring

در فصل دوم، حلقه‌های تمیز را تعریف کرده و توسیع‌هایی از آن‌ها را بیان می‌کنیم. با استفاده از مفهوم تمیز بودن، اثبات ساده‌ای برای قضیه کمیلو—یو ارائه می‌دهیم. سپس حلقه‌های نیم‌کامل و I—متناهی و تمیز بودن آنها را بررسی می‌کنیم. در آخر فصل، حلقه تمیزی را معرفی می‌کنیم که زیر حلقه‌اش تمیز نیست.

در فصل سوم، حلقه‌های بطور یکتا تمیز را تعریف کرده و مثال‌هایی از آن در جبر ناجابجایی ارائه می‌دهیم. سپس شرایط معادل برای بطور یکتا تمیز بودن حلقه‌ها را بیان می‌کنیم. در نهایت قضایای ساختاری را برای حلقه‌های بطور یکتا تمیز موضعی بیان می‌کنیم. مسأله مهمی که در این فصل بررسی خواهیم کرد رابطه‌های حلقه‌های بولی و تمیز است. در واقع ثابت می‌کنیم حلقه I بطور یکتا تمیز است اگر و تنها اگر R/J بولی باشد و خودتوان‌ها به پیمانه J بطور یکتا ارتقاء یابند. به خصوص R بولی است اگر و تنها اگر R بطور یکتا تمیز باشد و $J = 0$ (J، رادیکال ژاکبسون حلقه R است).

در فصل چهارم، حلقه‌های عمومی را حلقه‌هایی در نظر می‌گیریم که ممکن است یکدار نباشند و مفهوم تمیز بودن را برای این حلقه‌ها تعریف می‌کنیم. تمامی قضایای بیان شده برای حلقه‌های تمیز را در مورد حلقه‌های عمومی تمیز ثابت می‌کنیم. سپس حلقه‌های رادیکال، معاوضه‌ای، بولی و نیم بولی را معرفی کرده و به روابط بین این حلقه‌ها اشاره می‌کنیم.

فصل ۱

مقدمات

۱.۱ تعاریف و قضایای اساسی

در این فصل بعضی تعاریف و قضایا و پیشنیازهایی که در متن پایان‌نامه نیاز داریم ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۱ حلقه R را تجزیه‌ناپذیر [۱] نامیم در صورتیکه R را نتوان به صورت جمع مستقیم دو ایده‌آل غیر صفر حلقه R نوشت. بنابرین حلقه R تجزیه‌ناپذیر است اگر و تنها اگر خودتوان مرکزی غیر بدیهی نداشته باشد.

تعریف ۲.۱ $R-$ مدول M را آرتینی نامیم در صورتیکه هر زنجیر نزولی از زیر مدول‌های M متوقف شود. یعنی هرگاه $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ یک زنجیر نزولی از زیرمدول‌های M باشد، عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد بطوریکه $A_n = A_{n+1} = \cdots$.

[۱]indecomposable

تعریف ۳.۱ $R-$ مدول M را وفادار نامیم هرگاه $Ann_R M = 0$ که

$$Ann_R M = \{r \in R | rm = 0\}.$$

تعریف ۴.۱ حلقه R را ابتدایی نامیم هرگاه حلقه R دارای یک $R-$ مدول ساده وفادار باشد.

تعریف ۵.۱ ایده‌آل $A \lhd R$ را ابتدایی نامیم، هرگاه حلقه R/A دارای یک $R/A-$ مدول ساده وفادار باشد.

تعریف ٦.۱ خودتوان $e \in R$ موضعی است هرگاه eRe موضعی باشد($eRe/rad(eRe)$ حلقه تقسیمی باشد).

تعریف ۷.۱ $R-$ مدول ناصفر M را تجزیه‌ناپذیر نامیم در صورتیکه نتوان آن را به صورت جمع مستقیم دو تا از $R-$ زیر مدول‌ها نوشت.

تعریف ۸.۱ $R-$ مدول M را نیم ساده گوییم هرگاه هر $R-$ زیر مدول ان جمعوند مستقیمش باشد.

تعریف ۹.۱ حلقهR را نیم ساده گوییم هرگاه هر $R-$مدول چپ (یا راست) نیم ساده باشد.

تعریف ۱۰.۱ خودتوان $e \in R$ را ابتدایی [2] نامیم، هرگاه در یکی از شرایط معادل زیر صدق کند:

---

[2]primitive